УДК 514.12

О ВЫРОЖДЕННЫХ МАТРИЦАХ, ОБРАЗОВАННЫХ ЛИНЕЙНЫМИ ФОРМАМИ

А.И. Криворучко

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина

Abstract

The classification and constructive description of matrices consisting of the linear forms and having a rank $\leqslant 3$ are obtained.

Введение

При вычислении образующих алгебр полиномиальных инвариантов некоторых бесконечных групп отражений, действующих на векторном пространстве V, возникает необходимость *постановки следующей задачи:*

Получить конструктивное описание матриц, у которых строки образованы линейно независимыми линейными функциями, определенными на пространстве V, а ранг не превосходит заданного натурального числа ρ.

Решение этой задачи для $\rho = 2$ использовалось в работе [1] при изучении бесконечных групп отражений с тремя линейными оболочками орбит направлений симметрии.

Целью работы является:

Дать конструктивное описание матриц, образованных линейными функциями, и получить классификацию таких матриц с точностью до эквивалентности, определяемой элементарными преобразованиями столбцов матриц, а также перестановками строк и умножением их на ненулевые скаляры, в случае, когда V — векторное пространство над бесконечным полем, характеристика которого не равна 2, у матриц имеются строки, образованные линейно независимыми функциями, и $\rho = 3$.

Отметим, что рассматриваемая задача естественным образом связана с линейной классификацией n-ок линейных отображений конечномерного линейного пространства L в дуальное линейное пространство V^*, линейно зависимых над полем $F(V^*)$ рациональных функций.

1. Основные результаты

Пусть V — векторное пространство над бесконечным полем F, характеристика которого не равна 2, V^* — дуальное векторное пространство;

$$M = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m,1} & \dots & x_{m,n} \end{bmatrix}$$

— $m \times n$-матрица, элементы которой принадлежат V^*, и при этом $x_{1,1}, \dots, x_{1,n}$ n линейно независимы.

Для любой матрицы A и целого неотрицательного s пусть $A^{(s)}$ — подматрица матрицы A, полученная при вычеркивании первых s столбцов A.

Очевидно, что если ранг над F множества строк матрицы $M^{(s)}$ не превосходит некоторого натурального числа l, то rank $(M) \leqslant s + l$.

Матрицу M назовем стандартной, если для некоторого целого неотрицательного $s \leqslant$ rank (M) ранг над F множества строк матрицы $M^{(s)}$равен rank $(M) - s$.

Матрицу M' будем называть эквивалентной матрице M, если

$$M' = \mathrm{diag}\ (a, A)MC,$$

где $a \in F \setminus \{0\}$, A и C — невырожденные матрицы, элементы которых принадлежат F, причем матрица A мономиальна (т.е. каждая строка и каждый столбец матрицы A содержат лишь один ненулевой элемент).

Таким образом, при построении матрицы, эквивалентной матрице M, можно производить всевозможные элементарные преобразования над F множества столбцов матрицы M (умножая при этом столбцы M лишь на элементы поля F), умножать ее строки (в том числе, и первую строку) на ненулевые элементы поля F и переставлять строки, оставляя первую строку на месте.

Теорема 1. *Если rank $(M) \leqslant 2$, то M эквивалентна стандартной матрице.*

Теорема 2. *Если rank $(M) = 3$, то M не эквивалентна стандартной матрице, то либо M эквивалентна матрице M', первые четыре строки которой образуют матрицу*

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n \\ \alpha_2 x_1 + z_3 & \alpha_2 x_2 - z_4 & \alpha_2 x_3 & \alpha_2 x_4 & \dots & \alpha_2 x_n \\ \alpha_3 x_1 - z_2 & \alpha_3 x_2 & \alpha_3 x_3 + z_4 & \alpha_3 x_4 & \dots & \alpha_3 x_n \\ \alpha_4 x_1 & \alpha_4 x_2 + z_2 & \alpha_4 x_3 - z_3 & \alpha_4 x_4 & \dots & \alpha_4 x_n \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где z_2, z_3, z_4 принадлежат V^* и линейно независимы, $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \subset F$, а остальные строки матрицы M' — линейные комбинации над F первых четырех ее строк, либо $n = 4$ и для каждого $i \in \{2, \dots, m\}$

$$[x_{i,1}, \dots, x_{i,4}] = [x_{1,1}, \dots, x_{1,4}]S_1 S_i \tag{2}$$

где $S_1, \dots, S_m$ — кососимметричные матрицы, элементы которых принадлежат F, и det $(S_1) \neq 0$.

Отметим, что матрицу (1) можно получить из матрицы M элементарными преобразованиями над F ее столбцов тогда и только тогда, когда $m = 4$ и

$$\begin{bmatrix} x_{2,j} \\ x_{3,j} \\ x_{4,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_j & c_j \\ -b_j & 0 & d_j \\ -c_j & -d_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} [x_{1,j}] \qquad (j = 1, \dots, n),$$

где $(b_1, \dots, b_n), (c_1, \dots, c_n), (d_1, \dots, d_n)$ —линейно независимые векторы в линейном пространстве F^n. При этом можно считать, что $\{\alpha_2; \alpha_3; \alpha_4\} \subseteq \{0; 1\}$.

Если матрица M эквивалентна стандартной матрице и $\mathrm{rank}(M) \leqslant 3$, но ранг над F множества строк матрицы M больше, чем $\mathrm{rank}(M)$, то M совпадает с одной из матриц

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \alpha_2 x_{1,1} + \lambda_1 y_1 & \dots & \alpha_2 x_{1,n} + \lambda_n y_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m x_{1,1} + \lambda_1 y_m & \dots & \alpha_m x_{1,n} + \lambda_n y_m \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \alpha_2 x_{1,1} + \lambda_1 y_2 + \mu_1 z_2 & \dots & \alpha_2 x_{1,n} + \lambda_n y_2 + \mu_n z_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m x_{1,1} + \lambda_1 y_m + \mu_1 z_m & \dots & \alpha_m x_{1,n} + \lambda_n y_m + \mu_n z_m \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \alpha_2 x_{1,1} + \beta_2 u_1 + \lambda_1 y_2 & \dots & \alpha_2 x_{1,n} + \beta_2 u_n + \lambda_n y_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m x_{1,1} + \beta_m u_1 + \lambda_1 y_m & \dots & \alpha_m x_{1,n} + \beta_m u_n + \lambda_n y_m \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $\alpha_i, \beta_i, \lambda_j$ и μ_j принадлежат F, y_i, z_i и u_j принадлежат V^*, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ неколлинеарны в F^n, а некоторые z_i и β_k не равны 0 (и если, например, $\beta_2 \neq 0$, то можно считать, что $u_j = x_{2,j}$ для всех $j = 1, \dots, n$).

Матрица (3) эквивалентна матрице

$$\begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \dots & y_{1,n} \\ y_{2,1} & \alpha_2 y_{1,2} & \dots & \alpha_2 y_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{m,1} & \alpha_m y_{1,2} & \dots & \alpha_m y_{1,n} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

матрица (4) — матрице

$$\begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} & \dots & y_{1,n} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & \alpha_2 y_{1,3} & \dots & \alpha_2 y_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{m,1} & y_{m,2} & \alpha_m y_{1,3} & \dots & \alpha_m y_{1,n} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

а матрица (5) — матрице

$$\begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \dots & y_{1,n} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & \dots & y_{2,n} \\ y_{3,1} & \alpha_3 y_{1,2}+\beta_3 y_{2,2} & \dots & \alpha_3 y_{1,n}+\beta_3 y_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{m,1} & \alpha_m y_{1,2}+\beta_m y_{2,2} & \dots & \alpha_m y_{1,n}+\beta_m y_{2,n} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

причем для матриц (6)— (8) можно считать, что $\alpha_i \in \{0;1\}$ для каждого i, и если у матрицы (8) некоторое $\alpha_i = 0$, то $\beta_i \in \{0;1\}$; если $\alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 1$ для матрицы (6), то линейная независимость над F первых s ее строк равносильна аффинной независимости над F функций $y_{1,1}, \ldots, y_{s,1}$.

Эти результаты могут использоваться при изучении бесконечных групп отражений с четырьмя линейными оболочками орбит направлений симметрии [2].

2. Некоторые свойства матриц и линейных отображений

Для $i = 1, \ldots, m$ и $j = 1, \ldots, n$ положим

$$T_{i,j} = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,j} \\ x_{i,1} & x_{i,j} \end{vmatrix}, \qquad M_{i,j} = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,j} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,j} \\ x_{i,1} & x_{i,2} & x_{i,j} \end{vmatrix},$$

Λ_i — линейная оболочка $\langle x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}\rangle$ множества $\{x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}\}, g_i : \Lambda_1 \to \Lambda_i$ — линейное отображение, определяемое равенствами $g_i(x_{1,l}) = x_{i,l} \quad (l = 1, \ldots, n)$;

$F[V^*]$ — алгебра полиномиальных функций, определенных на пространстве V.

Следующие утверждения используются при доказательстве теорем 1 и 2.

Лемма 1. *Пусть элементы $m \times n$-матрицы A принадлежат факториальному кольцу K, и при этом* rank $(A) = 1$. *Тогда найдутся элементы $p_1, \ldots, p_m$, $q_1, \ldots, q_n$ кольца K, для которых*

$$A = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Из равенства $\mathrm{rank}(A) = 1$ следует, что найдутся элементы a_i, b_i, c_j и d_j кольца K, для которых в поле частных кольца K справедливо равенство $A = A_1 A_2$, где

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{b_1} \\ \vdots \\ \frac{a_m}{b_m} \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{d_1}, \ldots, \frac{c_n}{d_n} \end{bmatrix}.$$

Умножая элементы матрицы A_1 и деля элементы матрицы A_2 на общее кратное элементов $b_1, \ldots, b_m$, получаем :

$$A = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{q_1}{r_1}, & \ldots, & \frac{q_n}{r_n} \end{bmatrix},$$

где все $p_i, \quad q_j, \quad r_j$ принадлежат K. Можно считать, что $m \geqslant 2$ и $p_1, \ldots, p_m$ взаимно просты в K. Но $p_i q_j$ делится в K на r_j для всех i и j, а тогда из взаимной простоты $p_1, \ldots, p_m$ следует, что q_j делится в K на r_j для всех j.

Лемма 2. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ принадлежат V^* и линейно независимы, $y_1, \ldots, y_m$ принадлежат $F[V^*]$. Тогда $x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m = 0$ в том и только в том случае, если $[y_1, \ldots, y_m] = [x_1, \ldots, x_m]\Phi$, где Φ - кососимметрическая матрица, элементы которой принадлежат $F[V^*]$.

Доказательство. При $m = 1$ лемма верна.

Предположим, что для всех $m \leqslant 1$ лемма верна. Докажем ее при $m = l + 1$.

Пусть $x_1, \ldots, x_{l+1}$ линейно независимы и $x_1 y_1 + \ldots + x_{l+1} y_{l+1} = 0$. Для каждого $i = 1, \ldots, l+1$ имеем : $y_i = x_{l+1}\ u_i + z_i$, где u_i и z_i принадлежат $F[V^*]$, причем z_i не зависит от x_{l+1}. Поэтому

$$\left(\sum_{i=1}^{l} u_i x_i + y_{l+1} \right) x_{l+1} + \sum_{i=1}^{l} z_i x_i = 0$$

и $z_1 x_1 + \ldots + z_l x_l$ делится на x_{l+1}. Отсюда $z_1 x_1 + \ldots + z_l x_l = 0$, а тогда

$$y_{l+1} = -\sum_{i=1}^{l} u_i x_i. \tag{9}$$

По индуктивному предположению,

$$[z_1, \ldots, z_l] = [x_1, \ldots, x_l]\Phi_l, \tag{10}$$

где Φ_l — кососимметрическая матрица, элементы которой принадлежат $F[V^*]$. Но тогда (9) и (10)

$$[y_1, \ldots, y_{l+1}] = [x_1, \ldots, x_{l+1}] \left[\begin{array}{ccc|c} & & & u_1 \\ & \Phi_l & & \vdots \\ & & & u_l \\ \hline -u_1 & \ldots & -u_l & 0 \end{array} \right].$$

Обратно, если $x_1, \ldots, x_m$ и элементы кососимметрической матрицы Ψ принадлежат полю, характеристика которого не равна 2, и $[y_1, \ldots, y_m] = [x_1, \ldots, x_m]\Psi$, то

$$[y_1, \ldots, y_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = [x_1, \ldots, x_m]\Psi \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = -[x_1, \ldots, x_m] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = 0.$$

Лемма 3. *Пусть $f_1, \ldots, f_s$ — линейные отображения n-мерного линейного пространства L в линейное пространство $W, n > 2$, и при этом для каждого $i = 1, \ldots, s$ не существует гиперплоскость $P_i \subset L$, сужение на которую отображения f_i- гомотетия. Тогда для любого конечного множества $(n-2)$- плоскостей $L_1, \ldots, L_k$, лежащих в L, найдется 2-плоскость $Q \subset L$, которая не содержит собственных векторов ни одного из отображений $f_1, \ldots, f_s$ и имеет нулевое пересечение с каждой из плоскостей $L_1, \ldots, L_k$.*

Доказательство. Из условия леммы следует, что множество всех собственных векторов отображения f_i содержится в объединении конечного семейства $(n-2)$-плоскостей, лежащих в L. Но для любого конечного семейства $(n-2)$-плоскостей, лежащих в L, в L найдется 2-плоскость, имеющая нулевое пересечение с каждой из плоскостей этого семейства.

Лемма 4. *Пусть x и y принадлежат V^* и неколлинеарны. Тогда линейное отображение $g : \langle x, y \rangle \longrightarrow V^*$ имеет собственный вектор в том и только в том случае, если полиномиальная функция $x\ g(y) - y\ g(x)$ приводима в $F[V^*]$.*

Доказательство. 1) Пусть z — собственный вектор g с собственным значением α. Можно считать, что $z = y - \lambda\ x$. Тогда

$$y = z + \lambda\ x, \quad g(z) = g(y) - \lambda\ g(x) = \alpha\ z, \quad g(y) = \alpha\ z + \lambda\ g(x),$$
$$x\ g(y) - y\ g(x) = (\alpha\ x - g(x))\ z.$$

2) Пусть $x\ g(y) - y\ g(x) + u\ w = 0$, где u и w принадлежат V^*. Из леммы 2 следует, что либо x, y, u линейно зависимы, либо x, y, w линейно зависимы. Можно считать, что x, y, u линейно зависимы. Значит, $u = p\ x - q\ y$, где p и q принадлежат F. Теперь из равенства $x\ g(y) - y\ g(x) + u\ w = 0$ получаем:

$$(g(y) + p\ w)x = (g(x) + q\ w)y.$$

Из неколлинеарности x и y следует, что найдется $r \in F$, для которого

$$g(x) = r\ x - q\ w, \quad g(y) = r\ y - p\ w, \quad g(p\ x - q\ y) = r(p\ x - q\ y).$$

Таким образом, если $p = q = 0$, то g - гомотетия. В противном случае $p\ x - q\ y$ - собственный вектор отображения g.

Лемма 5. *Пусть $\lambda \in F$ и $x_{2,j} = \lambda x_{1,j}$ для всех $j \geqslant 2$. Тогда либо $x_{2,j} = \lambda x_{1,j}$ для всех $j \geqslant 1$, либо rank $(M^{(1)}) <$ rank (M).*

Доказательство. Положим

$$B = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ x_{2,1} - \lambda x_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ x_{3,1} & x_{3,2} & \dots & x_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \dots & x_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что rank $(B) =$ rank (M) и rank $(B^{(1)}) =$ rank $(M^{(1)})$. Но если $x_{2,1} \neq \lambda\, x_{1,1}$, то rank $(B^{(1)}) <$ rank (B).

Лемма 6. *Пусть $k \in F$ и $T_{2,3} = k\; T_{2,2}$. Тогда $x_{1,1}$ и $x_{2,1}$ коллинеарны.*

Доказательство. Из равенства $T_{2,3} = kT_{2,2}$ получаем :

$$x_{1,1}(x_{2,3} - kx_{2,2}) = x_{2,1}(x_{1,3} - kx_{1,2})$$

Отсюда и из неколлинеарности $x_{1,1}$ и $x_{1,3} - kx_{1,2}$ следует, что $x_{1,1}$ и $x_{2,1}$ коллинеарны.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть rank $(M) = 2$. При доказательстве теоремы можно считать, что $m \geqslant 3, \quad n \geqslant 3$ и строки матрицы M попарно непропорциональны.

Предположим сначала, что $x_{2,j} = \lambda x_{1,j}$ для всех $j \geqslant 2$ и некоторого $\lambda \in M$. Тогда, по лемме 5, rank $(M^{(1)}) = 1$, и из попарной неколлинеарности $x_{1,2}, \dots, x_{1,n}$ получаем, что строки матрицы $M^{(1)}$ пропорциональны ее первой строке.

Теперь предположим, что не существует $(n-1)$-мерное подпространство X пространства Λ_1, для которого $g_2\,|_X$ - гомотетия. Тогда по леммам 3 и 4 можно считать, что $T_{2,2}$ неприводимо.

Положим

$$D = \begin{bmatrix} T_{2,2} & \dots & T_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ T_{m,2} & \dots & T_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Из неравенств rank $(M) \leqslant 2, T_{2,2} \neq 0$ и детерминантного тождества Сильвестра ([3], гл. $II, \S 3, c.45$) получаем: rank $D = 1$. Но тогда, по лемме 1, найдутся $\varphi_3, \dots, \varphi_m, \psi_3, \dots, \psi_n$, принадлежащие $F[V^*]$, для которых

$$T_{i,j} = \varphi_i \psi_j \quad (i \geqslant 2, j \geqslant 2). \tag{11}$$

Следовательно, $\varphi_2 \neq 0, \psi_2 \neq 0, \quad \varphi_2, \dots, \varphi_m, \psi_2, \dots, \psi_n$ однородны,

$$\deg(\varphi_2) + \deg(\psi_2) = 2, \quad \deg(\varphi_2) = \dots = \deg(\varphi_m), \quad \deg(\psi_2) = \dots = \deg(\psi_n).$$

В силу неприводимости $T_{2,2}$ возможны лишь следующие два случая.

а) $\deg(\varphi_2) = 0$.

Тогда $\mu_i = \varphi_i \varphi_2^{-1} \in F$ для всех $i \geqslant 2$, и, в силу (11),

$$T_{i,j} = \mu_i T_{2,j} \quad (i > 2, j > 1),$$

т.е.

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,j} \\ x_{i,1} - \mu_i x_{2,1} & x_{i,j} - \mu_i x_{2,j} \end{vmatrix} = 0$$

для всех $i \geqslant 3$, и $j \geqslant 2$. Отсюда и из неколлинеарности $x_{1,1}$ и $x_{1,j}$ следует, что для некоторых $\eta_3, \ldots, \eta_n$, принадлежащих F,

$$x_{i,j} = \eta_i x_{1,j} + \mu_i x_{2,j} \quad (i \geqslant 3, j \geqslant 1).$$

b) $\deg(\psi_2) = 0$.

Тогда из (11) получаем : $\psi_3 \psi_2^{-1} \in F, T_{2,3} = \psi_3 \psi_2^{-1} T_{2,2}$. По лемме 6 отсюда следует, что $T_{2,2}$ приводимо.

4. Доказательство теоремы 2

Лемма 7. *Пусть полиномиальные функции $T_{2,2}$ и $T_{3,2}$ не пропорциональны и хотя бы одна из них неприводима. Тогда $M_{3,3} \neq 0$.*

Доказательство. Допустим, что $M_{3,3} = 0$. Тогда, по теореме 1, имеет место лишь один из следующих двух случаев.

1) $\alpha x_{1,j} + \beta x_{2,j} + \gamma x_{3,j} = 0$ для каждого $j \in \{1; 2; 3\}$ и некоторых α, β и γ, принадлежащих F; при этом хотя бы один из элементов α, β, γ не равен 0.

2) $x_{1,j} = \alpha_i x_{1,j} + \lambda_j y_i$ для любых $i \in \{2; 3\}, j \in \{1; 2; 3\}$, некоторых α_i и λ_j, принадлежащих F, и некоторой $y_i \in V^*$.

В первом случае один из элементов β, γ не равен 0 и $\beta T_{2,2} + \gamma T_{3,2} = 0$, а во втором $T_{i,2} = (\lambda_2 x_{1,1} - \lambda_1 x_{1,2}) y_i$ для каждого $i \in \{2; 3\}$.

Лемма 8. *Пусть $\lambda_i \in F$ и $x_{i,j} = \lambda_i x_{1,j}$ для всех $j \geqslant 3$ и $i \in \{2; 3\}$. Тогда либо rank $(M^{(2)})$ = rank $(M) - 2$, либо найдется $\nu \in F$, для которого*

$$x_{j,2} - \nu x_{j,1} = \lambda_j (x_{1,2} - \nu x_{1,1}) \quad (j \in \{2; 3\}), \tag{12}$$

либо первые три строки матрицы M линейно зависимы над F.

Доказательство. Положим

$$B = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \ldots & x_{1,n} \\ x_{2,1} - \lambda_2 x_{1,1} & x_{2,2} - \lambda_2 x_{1,2} & 0 & \ldots & 0 \\ x_{3,1} - \lambda_3 x_{1,1} & x_{3,2} - \lambda_3 x_{1,2} & 0 & \ldots & 0 \\ x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} & \ldots & x_{4,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & x_{m,3} & \ldots & x_{m,n} \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} x_{2,1} - \lambda_2 x_{1,1} & x_{2,2} - \lambda_2 x_{1,2} \\ x_{3,1} - \lambda_3 x_{1,1} & x_{3,2} - \lambda_3 x_{1,2} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что rank $(M) =$ rank (B) и rank $(M^{(2)}) =$ rank $(B^{(2)})$.

Если det $(S) \neq 0$, то rank $(B^{(2)}) =$ rank $(B) - 2$.

Если найдутся μ и ν, принадлежащие F, хотя бы один из которых не равен 0, и при этом $\mu(x_{3,i} - \lambda_3 x_{1,i}) = \nu(x_{2,i} - \lambda_2 x_{1,i})$ для каждого $i \in \{1; 2\}$, то

$$(\mu\lambda_3 - \nu\lambda_2)x_{1,i} + \nu x_{2,i} - \mu x_{3,i} = 0 \qquad (i \in \{1; 2\}).$$

Но и для каждого $j > 2$ имеем:

$$(\mu\lambda_3 - \nu\lambda_2)x_{1,j} + \nu x_{2,j} - \mu x_{3,j} = (\mu\lambda_3 - \nu\lambda_2)x_{1,j} + \nu\lambda_2 x_{1,j} - \mu\lambda_3 x_{1,j} = 0.$$

Это значит, что первые три строки матрицы M линейно зависимы над F.

Если же det $(S) = 0$, но строки матрицы S непропорциональны, то можно считать, что $x_{2,1} - \lambda_2 x_{1,1} \neq 0$, и в этом случае найдется $\nu \in F$, для которого

$$x_{j,2} - \lambda_j x_{1,2} = \nu(x_{j,1} - \lambda_j x_{1,1}) \qquad (j \in \{2; 3\}),$$

и тогда получаем (12).

Далее предполагаем, что rank $(M) = 3, m \geqslant 4, n \geqslant 4$.

Лемма 9. *Пусть $T_{2,2}, \ldots, T_{m,2}$ попарно пропорциональны и $T_{2,2} \neq 0$. Тогда либо ранг над F множества строк матрицы M равен 3, либо M эквивалентна матрице (8).*

Доказательство. Пусть $\beta_i \in F$ и $T_{i,2} = \beta_i T_{2,2}$ для всех $i \geqslant 3$. Учитывая неколлинеарность $x_{1,1}$ и $x_{1,2}$ получаем: для каждого $i = 3, \ldots, m$ найдется $\alpha_i \in F$ такое, что

$$x_{i,j} = \alpha_i x_{1,j} + \beta_i x_{2,j} \qquad (j \in \{1; 2\}). \tag{13}$$

Положим

$$S = \begin{bmatrix} x_{3,3} - \alpha_3 x_{1,3} - \beta_3 x_{2,3} & \ldots & x_{3,n} - \alpha_3 x_{1,n} - \beta_3 x_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m,3} - \alpha_m x_{1,3} - \beta_m x_{2,3} & \ldots & x_{m,n} - \alpha_m x_{1,n} - \beta_m x_{2,n} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \ldots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \ldots & x_{2,n} \\ \multicolumn{2}{|c|}{0} & \multicolumn{3}{|c|}{S} \end{bmatrix}.$$

Из (13) следует, что rank $(B) = 3$.

Можно считать, что $x_{3,3} - \alpha_3 x_{1,3} - \beta_3 x_{2,3} \neq 0$, т.к. все элементы матрицы S равны 0, то rank $(M) < 3$.

Все миноры четвертого порядка матрицы B равны 0, но $T_{2,2} \neq 0$. Поэтому rank $(S) = 1$, и, по лемме 1, выполняется одно из следующих двух условий.

1) $x_{i,j}-\alpha_i x_{1,j}-\beta_i x_{2,j}=k_i(x_{3,j}-\alpha_3 x_{1,j}-\beta_3 x_{2,j}) \qquad (i\geqslant 4;\geqslant j\geqslant 3; k_i\in F)$. Отсюда

$$x_{i,j}=(\alpha_i-k_i\alpha_3)x_{1,j}+(\beta_i-k_i\beta_3)x_{2,j}+k_i x_{3,j} \qquad (i=4,\dots,m; j=3,\dots,n).$$

Но последние равенства справедливы и для $j<3$. В самом деле, если $j<3$, то

$$(\alpha_i-k_i\alpha_3)x_{1,j}+(\beta_i-k_i\beta_3)x_{2,j}+k_i x_{3,j}=$$

$$=(\alpha_i-k_i\alpha_3)x_{1,j}+(\beta_i-k_i\beta_3)x_{2,j}+k_i(\alpha_3 x_{1,j}+\beta_3 x_{2,j})=$$

$$=\alpha_i x_{1,j}+\beta_i x_{2,j}=x_{i,j} \qquad (i=4,\dots,m).$$

Это значит, что каждая строка матрицы M — линейная комбинация над F первых трех ее строк.

2) $x_{i,j}-\alpha_i x_{1,j}-\beta_i x_{2,j}=k_i(x_{i,3}-\alpha_i x_{1,3}-\beta_i x_{2,3}) \qquad (i\geqslant 3; j\geqslant 4; k_j\in F)$.

Отсюда

$$x_{i,j}-k_i x_{i,3}=\alpha_i(x_{1,j}-k_j x_{1,3})+\beta_i(x_{2,j}-k_j x_{2,3}) \qquad (i=3,\dots,m; j=4,\dots,n),$$

и учитывая (13), получаем, что M эквивалентна матрице (8).

Лемма доказана.

Допустим, что выполнено одно из следующих условий:

1) M стандартна;

2) первые четыре строки матрицы M образуют матрицу (1), а остальные строки M — линейные комбинации над F строк матрицы (1);

3) $n=4$ и строки матрицы M удовлетворяют соотношению (2), причем входящие в это соотношение матрицы $S_1,\dots,S_m$ кососимметричны.

Тогда «структура» любой линейной комбинации над F строк матрицы M аналогична «структуре» строк этой матрицы. Поэтому теорему 2 достаточно доказать, предполагая, что

$$\text{строки матрицы } M \text{ линейно независимы над } F. \tag{14}$$

Если первые две строки матрицы $M^{(1)}$ пропорциональны, то из леммы 5 и (14) получаем, что rank $(M^{(1)})<3$; но тогда из теоремы 1 следует, что M эквивалентна стандартной матрице, и теорема 2 доказана.

Если первые три строки матрицы $M^{(2)}$ пропорциональны, то из леммы 8 и (14) получаем, что либо rank $(M^{(2)})=1$, либо M эквивалентна матрице U, для которой первые две строки матрицы $U^{(1)}$ пропорциональны, и теорема 2 доказана.

Таким образом, при доказательстве теоремы 2 можно считать, что

$$\begin{matrix}\text{не существует } (n-1)-\text{плоскость } P\subset\Lambda_1, \text{ для которой хотя}\\ \text{бы одно из отображений } g_2|_P,\dots,g_m|_P \text{ является гомотетией,}\end{matrix} \tag{15}$$

$$\begin{array}{l}\text{не существует } (n-2)-\text{плоскость } Q \subset \Lambda_1, \text{для которой хотя бы} \\ \text{два из отображений } g_2|_Q, \ldots, g_m|_Q \text{ является гомотетиями.}\end{array} \tag{16}$$

Используя леммы 3, 4 и (15), заменяя M на эквивалентную ей матрицу MC, где C — квадратная невырожденная матрица, элементы которой принадлежат F, можно считать, что

$$T_{2,2}, \ldots, T_{m,2} \quad \text{неприводимы.} \tag{17}$$

Теперь из леммы 9 следует, что заменяя M на эквивалентную ей матрицу, полученную перестановкой строк матрицы M, можно считать, что, наряду с условиями (14) — (17), выполняется условие

$$T_{2,2} \quad \text{и} \quad T_{3,2} \quad \text{взаимно} \quad \text{просты} \tag{18}$$

Из (17), (18) и леммы 7 следует, что

$$M_{3,3} \neq 0 \tag{19}$$

Далее будем считать, что выполнены все условия (14) — (19).

Положим

$$N = \begin{bmatrix} M_{3,3} & \ldots & M_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{m,3} & \ldots & M_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Из детерминантного тождества Сильвестра следует, что $\operatorname{rank}(N) = 1$. Но тогда, по лемме 1, найдутся $\varphi_3, \ldots, \varphi_m, \psi_3, \ldots, \psi_n$, принадлежащие $F[V^*]$, для которых

$$M_{i,j} = \varphi_i \psi_j \qquad (i \geqslant 3, j \geqslant 3). \tag{20}$$

Следовательно, $\varphi_3 \neq 0, \psi_3 \neq 0, \varphi_3, \ldots, \varphi_m, \psi_3, \ldots, \psi_n$ однородны,
$\deg(\varphi_3) + \deg(\psi_3) = 3, \quad \deg(\varphi_3) = \ldots = \deg(\varphi_m), \quad \deg(\psi_3) = \ldots = \deg(\psi_n)$.
При этом можно считать, что

$$\varphi_3, \ldots, \varphi_m \quad \text{взаимно} \quad \text{просты} \tag{21}$$

Возможны лишь следующие четыре случая.

1. $\deg(\varphi_3) = 0$.

Тогда $\mu_i = \varphi_i \varphi_3^{-1} \in F$ для всех $i \geqslant 3$, и, в силу (20),

$$M_{i,j} = \mu_i \; M_{3,j} \qquad (i > 3, j > 2). \tag{22}$$

Положим

$$B_1 = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n} \\ x_{4,1}-\mu_4 x_{3,1} & x_{4,2}-\mu_4 x_{3,2} & \dots & x_{4,n}-\mu_4 x_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m,1}-\mu_m x_{3,1} & x_{m,2}-\mu_m x_{3,2} & \dots & x_{m,n}-\mu_m x_{3,n} \end{bmatrix}$$

Тогда $\mathrm{rank}(B_1) = 2$, т.к. из (22) следует, что все миноры третьего порядка матрицы B_1, окаймляющие ненулевой минор $T_{2,2}$, равны 0. Значит, по теореме 1, имеются лишь две возможности.

1.1. Каждая строка матрицы B_1 — линейная комбинация над F первых двух ее строк.

Но тогда каждая строка матрицы M — линейная комбинация над F первых трех ее строк.

1.2. Найдутся $\xi \in V^*$ и $\{\alpha, \nu_1, \dots, \nu_n\} \subset F$ такие, что $x_{2,j} = \alpha x_{1,j} + \nu_j \xi$ для всех $j = 1, \dots, m$.

Отсюда следует, что существует $(n-1)$-плоскость $P \subset \Lambda_1$, для которой $g_2|_P$ - гомотетия, а это противоречит предположению (15).

2. $\deg(\psi_3) = 0$.

Тогда $\lambda_j = \psi_j\ \psi_3^{-1} \in F$ для всех $j \geqslant 3$, и, в силу (20),

$$M_{i,j} = \lambda_j M_{i,3} \qquad (i > 2, j > 3). \tag{23}$$

Положим

$$B_2 = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,4}-\lambda_4 x_{1,3} & \dots & x_{1,n}-\lambda_n x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,4}-\lambda_4 x_{2,3} & \dots & x_{2,n}-\lambda_n x_{2,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & x_{m,4}-\lambda_4 x_{m,3} & \dots & x_{m,n}-\lambda_n x_{m,3} \end{bmatrix}.$$

Тогда $\mathrm{rank}(B_2) = 2$, т.к. из (23) следует, что все миноры третьего порядка матрицы B_2, окаймляющие ненулевой минор $T_{2,2}$, равны 0. В то же время B_2 — подматрица матрицы, которая эквивалентна матрице M. Но тогда из теоремы 1 следует, что M эквивалентна стандартной матрице.

3. $\deg(\varphi_3) = 1$.

Из (21) следует, что $\varphi_3, \dots, \varphi_m$ неколлинеарны. Поэтому, изменяя нумерацию строк матрицы M, начиная с ее четвертой строки, и не меняя при этом $T_{2,2}, T_{3,2}$ и $M_{3,3}$, можно считать, что φ_3 и φ_4 неколлинеарны.

В силу (20), $\varphi_3 M_{i,j} = \varphi_i M_{3,j}$ для всех $i > 3$ и $j > 2$, или

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \varphi_3 x_{i,1} - \varphi_i x_{3,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \varphi_3 x_{i,2} - \varphi_i x_{3,2} \\ x_{1,j} & x_{2,j} & \varphi_3 x_{i,j} - \varphi_i x_{3,j} \end{vmatrix} = 0 \quad (i = 3, \dots, m; j = 4, \dots, n).$$

Отсюда, по детерминантному тождеству Сильвестра,

$$T_{2,2}\begin{vmatrix} x_{1,1} & \varphi_3\ x_{i,1}-\varphi_i\ x_{3,1} \\ x_{1,j} & \varphi_3\ x_{i,j}-\varphi_i\ x_{3,j}\end{vmatrix} = T_{2,j}\begin{vmatrix} x_{1,1} & \varphi_3\ x_{i,1}-\varphi_i\ x_{3,1} \\ x_{1,2} & \varphi_3\ x_{i,2}-\varphi_i\ x_{3,2}\end{vmatrix} \quad (i=3,\ldots,m;\, j=4,\ldots,n). \tag{24}$$

Из (17) и леммы 6 следует, что $T_{2,2}$ и $T_{2,3}$ взаимно просты. Но тогда из (24) и леммы 1 получаем: для каждого $i=4,\ldots,m$ найдется $\xi_i\in V^*$ такая, что

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & \varphi_3\ x_{i,1}-\varphi_i\ x_{3,1} \\ x_{1,j} & \varphi_3\ x_{i,j}-\varphi_i\ x_{3,j}\end{vmatrix} = \xi_i\ T_{2,j} \quad (i=4,\ldots,m;\, j=2,\ldots,n),$$

или

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & \varphi_3\ x_{i,1}-\varphi_i\ x_{3,1}-\xi_i\ x_{2,1} \\ x_{1,j} & \varphi_3\ x_{i,j}-\varphi_i\ x_{3,j}-\xi_i\ x_{2,j}\end{vmatrix} = 0 \quad (i=4,\ldots,m;\, j=2,\ldots,n).$$

Из неколлинеарности $x_{1,1}$ и $x_{1,j}$ следует, что найдется $\eta_i\in V^*$, для которой

$$\eta_i\ x_{1,1}+\xi_i\ x_{2,j}+\varphi_i\ x_{3,j}-\varphi_3\ x_{i,j}=0 \quad (i=4,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n). \tag{25}$$

Для каждого $i>3$ функции $\eta_i,\ \xi_i,\ \varphi_i,\ \varphi_3$ линейно зависимы, т.к. иначе из леммы 2 следует, что найдется $i>3$, для которого $\Lambda_1\subseteq\langle\varphi_3,\ \varphi_i,\ \xi_i\rangle$. Поэтому имеются лишь следующие возможности.

3.1. $\mathrm{rank}_F(\eta_i,\ \xi_i,\ \varphi_i,\ \varphi_3)=2$ для всех $i>3$.

Значит, $\eta_4=\beta_{1,4}\varphi_3-\beta_{1,3}\varphi_4,\quad \xi_4=\beta_{2,4}\varphi_3-\beta_{2,3}\varphi_4$, где каждое $\beta_{i,j}\in F$.

Тогда из (25)

$$(x_{4,j}-\beta_{1,4}\ x_{1,j}-\beta_{2,4}\ x_{2,j})\varphi_3 = (x_{3,j}-\beta_{1,3}\ x_{1,j}-\beta_{2,3}\ x_{2,j})\varphi_4 \quad (j=1,\ldots,n).$$

Следовательно, для некоторых $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, принадлежащих F,

$$x_{i,j}=\beta_{1,i}\ x_{1,j}+\beta_{2,i}\ x_{2,j}+\lambda_j\ \varphi_i \quad (i\in\{3;4\};\, j\geqslant 1).$$

Отсюда

$$M_{3,j}=\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,j} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,j} \\ \lambda_1\varphi_3 & \lambda_2\varphi_3 & \lambda_j\varphi_3\end{vmatrix}$$

для всех $j>2$, и из (20) при $i=3$

$$\psi_j=\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,j} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,j} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_j\end{vmatrix}$$

для всех $j>2$. Теперь из (20) для всех $i>2$ и $j>2$ получаем:

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,j} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,j} \\ x_{i,1}-\lambda_1\varphi_i & x_{i,2}-\lambda_2\varphi_i & x_{i,j}-\lambda_j\varphi_i\end{vmatrix}=0 \quad (i>2;\, j>2). \tag{26}$$

Положим

$$S=\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n}\\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n}\\ x_{3,1}-\lambda_1\varphi_3 & x_{3,2}-\lambda_2\varphi_3 & \dots & x_{3,n}-\lambda_n\varphi_3\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{m,1}-\lambda_1\varphi_m & x_{m,2}-\lambda_2\varphi_m & \dots & x_{m,n}-\lambda_n\varphi_m \end{bmatrix}.$$

Из (26) и неравенства $T_{2,2}\neq 0$ следует, что $\mathrm{rank}(S)=2$. Но S эквивалентна матрице S', вычеркивая из которой соответствующий столбец, получаем подматрицу M' матрицы, эквивалентной матрице M; значит, $\mathrm{rank}(M')\leqslant 2$, и, по теореме 1, M эквивалентна стандартной матрице. Например, если $\lambda_1\neq 0$, то можно считать, что $\lambda_1=1$, а тогда S эквивалентна матрице

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2}-\lambda_2x_{1,1} & \dots & x_{1,n}-\lambda_nx_{1,1}\\ x_{2,1} & x_{2,2}-\lambda_2x_{2,1} & \dots & x_{2,n}-\lambda_nx_{2,1}\\ x_{3,1}-\varphi_3 & x_{3,2}-\lambda_2x_{3,1} & \dots & x_{3,n}-\lambda_nx_{3,1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{m,1}-\varphi_m & x_{m,2}-\lambda_2x_{m,1} & \dots & x_{m,n}-\lambda_nx_{m,1} \end{bmatrix}.$$

3.2. $\mathrm{rank}_F(\eta_4,\ \xi_4,\ \varphi_4,\ \varphi_3)=3$.

Допустим, что $\xi_4=\beta_3\varphi_3+\beta_4\varphi_4$, где $\{\beta_3;\beta_4\}\subset F$. Тогда $\varphi_3,\ \varphi_4,\ \eta_4$ линейно независимы, а из равенства (25) при $i=4$ получаем

$$\eta_4\ x_{1,j}+\varphi_4(x_{3,j}+\beta_4x_{2,j})-\varphi_3(x_{4,j}+\beta_3x_{2,j})=0\quad (j=1,\dots,n).$$

Теперь из линейной зависимости $\varphi_3,\varphi_4,\eta_4$ и леммы 2 следует, что $\Lambda_1\subseteq\langle\varphi_3,\varphi_4\rangle$, а это невозможно.

Таким образом, $\varphi_3,\varphi_4,\xi_4$ линейно независимы и найдется $\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}\subset F$, для которого

$$\eta_4=-\alpha_2\xi_4+\alpha_4\varphi_3-\alpha_3\varphi_4.$$

Отсюда, учитывая (25), имеем:

$$(\alpha_4x_{1,j}-x_{4,j})\varphi_3+(x_{3,j}-\alpha_3x_{1,j})\varphi_4+(x_{2,j}-\alpha_2x_{1,j})\xi_4=0.$$

Но тогда, используя лемму 2, получаем

$$\begin{bmatrix}x_{2,j}\\x_{3,j}\\x_{4,j}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & b_j & c_j\\ -b_j & 0 & d_j\\ -c_j & -d_j & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_4\\ \varphi_4\\ -\varphi_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix}[x_{1,j}]\quad (j=1,\dots,n),\tag{27}$$

где b_j,c_j,d_j принадлежат F.

Пусть $\{t_1,t_2,k_1,k_2\}\subset F$. Если $b_j=k_jt_1$ и $c_j=k_jt_2$ для каждого $j\in\{1;2\}$, то в силу (27), $T_2=(k_2x_{1,1}-k_1x_{1,2})(t_1\varphi_4-t_2\varphi_3)$. Следовательно,

$$b_1c_2\neq b_2c_1.\tag{28}$$

Допустим, что $m > 4$. Из (25) и (27) получаем:

$$(\eta_i + \alpha_2\xi_i + \alpha_3\varphi_i)x_{1,j} - (c_j\xi_i + d_j\varphi_i + x_{1,j})\varphi_3 + b_j(\varphi_4\xi_i - \xi_4\varphi_i) = 0 \quad (i \geqslant 5; j \geqslant 1). \tag{29}$$

Отсюда следует, что для каждого $i > 4$ функции $\eta_i + \alpha_2\xi_i + \alpha_3\varphi_i, \varphi_3, \varphi_4, \xi_4$ линейно зависимы, т.к. иначе, по лемме 2, $\Lambda_1 \subseteq \langle\varphi_3, \varphi_4, \xi_4\rangle$.

Таким образом, найдутся $\alpha_i, t_{i,1},$ и $t_{i,2}$, принадлежащие F, для которых

$$\eta_i = -\alpha_2\xi_i - \alpha_3\varphi_i + \alpha_i\varphi_3 + t_{i,1}\varphi_4 + t_{i,2}\xi_4 \quad (i > 4),$$

и из (29)

$$(\alpha_i x_{1,j} - c_j\xi_i - d_j\varphi_i - x_{1,j})\varphi_3 + (t_{i,1}x_{1,j} + b_j\xi_i)\varphi_4 + (t_{i,2}x_{1,j} - b_j\varphi_i)\xi_4 = 0 \quad (i \geqslant 5; j \geqslant 1). \tag{30}$$

Из (30) получаем:

Если найдется $k > 4$, для которого $t_{k,1} \neq 0$, то $\Lambda_1 \subseteq \langle\varphi_3, \xi_4, \xi_k\rangle$;

если найдется $k > 4$, для которого $t_{k,2} \neq 0$, то $\Lambda_1 \subseteq \langle\varphi_3, \varphi_4, \varphi_k\rangle$.

Значит, $t_{i,1} = t_{i,2} = 0$ для каждого $i > 4$. Теперь из (30) следует, что найдутся $v_{i,j}$ и $u_{i,j}$ принадлежащие F, для которых

$$x_{i,j} = \alpha_i x_{1,j} - c_j\xi_i - d_j\varphi_i + v_{i,j}\varphi_4 + u_{i,j}\xi_4 \quad (i \geqslant 5; j \geqslant 1). \tag{31}$$

Но тогда из (30) и (31) имеем:

$$(b_j\xi_i - v_{i,j}\varphi_3)\varphi_4 = (b_j\varphi_i + u_{i,j}\varphi_3)\xi_4 \quad (i \geqslant 5; j \geqslant 1). \tag{32}$$

В силу (28), $b_1 \neq 0$ или $b_2 \neq 0$. Поэтому из (32) следует, что

$$\xi_i \in \langle\varphi_3, \xi_4\rangle, \quad \varphi_i \in \langle\varphi_3, \varphi_4\rangle \quad (i > 4),$$

т.е. для некоторых $\lambda_{i,j}$ и μ_i, принадлежащих F,

$$\varphi_i = \lambda_{i,3}\varphi_3 + \lambda_{i,4}\varphi_4, \quad \xi_i = \lambda_{i,2}\varphi_3 + \mu_i\xi_4 \quad (i > 4). \tag{33}$$

Из (32) и (33) для любых $i \geqslant 5$ и $j \geqslant 1$

$$((\lambda_{i,2}b_j - v_{i,j})\varphi_4 - (\lambda_{i,3}b_j + u_{i,j})\xi_4)\varphi_3 + b_j(\mu_i - \lambda_{i,4})\xi_4\varphi_4 = 0.$$

Левая часть последнего равенства — квадратичная форма относительно линейно независимых $\varphi_3, \varphi_4, \xi_4$. Поэтому коэффициенты этой квадратичной формы равны 0, и, с учетом (28)

$$v_{i,j} = b_j\lambda_{i,2}, \quad u_{i,j} = -b_j\lambda_{i,3}, \quad \mu_i = \lambda_{i,4} \quad (i \geqslant 5;\ j \geqslant 1). \tag{34}$$

Пусть X_k — k-ая строка матрицы M,

$$\lambda_{k,1} = \alpha_k - \sum_{i=2}^{4} \alpha_i\lambda_{k,i}.$$

Из (27), (31), (33) и (34) для каждого $i > 4$ имеем:

$$X_k = \sum_{l=1}^{4} \lambda_{k,l} X_l.$$

Из (27)

$$\begin{aligned}
[x_{2,1}, \dots, x_{2,n}] &= \quad \varphi_4[b_1, \dots, b_n] - \varphi_3[c_1, \dots, c_n] + \alpha_2[x_{1,1}, \dots, x_{1,n}],\\
[x_{3,1}, \dots, x_{3,n}] &= -\xi_4[b_1, \dots, b_n] - \varphi_3[d_1, \dots, d_n] + \alpha_3[x_{1,1}, \dots, x_{1,n}],\\
[x_{4,1}, \dots, x_{4,n}] &= -\xi_4[c_1, \dots, c_n] - \varphi_4[d_1, \dots, d_n] + \alpha_4[x_{1,1}, \dots, x_{1,n}].
\end{aligned}$$

Умножая справа обе части трех последних неравенств на квадратную невырожденную матрицу C, элементы которой принадлежат F, получаем, что элементы матрицы

$$MC = \begin{bmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{m,1} & \cdots & y_{m,n} \end{bmatrix},$$

эквивалентной матрице M, связаны равенством, аналогичным равенству (27) и отличающимся от него тем, что координаты векторов $\overline{b} = [b_1, \dots, b_n]$, $\overline{c} = [c_1, \dots, c_n]$, $\overline{d} = [d_1, \dots, d_n]$ пространства F^n заменяются на соответствующие координаты векторов $\overline{b}C$, $\overline{c}C$, $\overline{d}C$ (однако при этом предположения о минорах $T_{i,2}$ и $M_{i,j}$ матрицы M не обязаны выполняться для аналогичных миноров матрицы MC). Поэтому, учитывая (28), можно считать, что $\overline{b}C = [1, 0, \dots, 0]$, $\overline{c}C = [0, -1, 0, \dots, 0]$. Но если эти равенства выполнены, и при этом $\overline{d} \in \langle \overline{b}, \overline{c} \rangle$, то сужения отображений g_2 и g_3 (и g_4) на $n-2$-плоскость $\langle y_{1,3}, \dots, y_{1,n} \rangle$-гомотетии, а это противоречит предположению (16). Следовательно, можно считать, что $\overline{d}C = [0, 0, 1, 0, \dots, 0]$.

4. $\deg(\psi_3)$=1.

Пусть $\lambda_3, \dots, \lambda_n$ принадлежит F и $\lambda_3\psi_3 + \dots + \lambda_n\psi_n = 0$. Тогда

$$N \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{bmatrix} [\psi_3, \dots, \psi_n] \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{bmatrix} [0] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В частности,

$$\sum_{j=3}^{n} \lambda_j M_{3,j} = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & z_1 \\ x_{2,1} & x_{2,2} & z_2 \\ x_{3,1} & x_{3,2} & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$z_l = \sum_{j>2} \lambda_j x_{l,j} \quad (l = 1, \dots, m).$$

Из (17), (18) и леммы 7 следует, что $x_{1,1}, x_{1,2}, z_1$ линейно зависимы, а тогда $\lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$. Значит, $\psi_3, \dots, \psi_n$ линейно независимы.

В силу (20),

$$\psi_3 M_{i,j} = \psi_j M_{i,3} \quad (i = 3, \ldots, m; j = 4, \ldots, n),$$

или

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \psi_3 x_{1,j} - \psi_i x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \psi_3 x_{2,j} - \psi_i x_{2,3} \\ x_{i,1} & x_{i,2} & \psi_3 x_{i,j} - \psi_i x_{i,3} \end{vmatrix} = 0 \quad (i = 3, \ldots, m; j = 4, \ldots, n).$$

Отсюда (по детерминантному тождеству Сильвестра)

$$T_{2,2} \begin{vmatrix} x_{1,1} & \psi_3\ x_{1,j} - \psi_i\ x_{1,3} \\ x_{i,1} & \psi_3\ x_{i,j} - \psi_i\ x_{i,3} \end{vmatrix} = T_{i,2} \begin{vmatrix} x_{1,1} & \psi_3\ x_{1,j} - \psi_i\ x_{1,3} \\ x_{2,1} & \psi_3\ x_{2,j} - \psi_i\ x_{2,3} \end{vmatrix} \tag{35}$$

$$(i = 3, \ldots, m; j = 4, \ldots, n).$$

Из (18), (35) и леммы 1 получаем: для каждого $j = 4, \ldots, n$ найдется $\xi_j \in V^*$ такая, что

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & \psi_3 x_{1,j} - \psi_j x_{1,3} \\ x_{i,1} & \psi_3 x_{i,j} - \psi_j x_{i,3} \end{vmatrix} = \xi_j T_{i,2} \qquad (i = 2, \ldots, m; j = 4, \ldots, n),$$

или

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & \psi_3 x_{1,j} - \psi_j x_{1,3} - \xi_j x_{1,2} \\ x_{i,1} & \psi_3 x_{i,j} - \psi_j x_{i,3} - \xi_j x_{i,2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 2, \ldots, m; j = 4, \ldots, n).$$

Из неколлинеарности $x_{1,1}$ и $x_{2,1}$ следует, что найдется $\eta_j \in V^*$, для которой

$$\eta_j x_{i,1} + \xi_j x_{i,2} + \psi_j x_{i,3} - \psi_3 x_{i,j} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 4, \ldots, n). \tag{36}$$

Для каждого $j > 3$ функции $x_{1,1}$,$x_{1,2}$,$x_{1,3}$,$x_{1,j}$ линейно независимы, и из (36) получаем, что найдется кососимметричная матрица

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & -a_{1,j} & -a_{2,j} & -a_{4,j} \\ a_{1,j} & 0 & -a_{3,j} & -a_{5,j} \\ a_{2,j} & a_{3,j} & 0 & -a_{6,j} \\ a_{4,j} & a_{5,j} & a_{6,j} & 0 \end{bmatrix}, \tag{37}$$

элементы которой принадлежат F и при этом

$$[\eta_j, \xi_j, \psi_j, -\psi_3] = [x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,j}] A_j \quad (j > 3). \tag{38}$$

Отсюда

$$\psi_3 = a_{4,j} x_{1,1} + a_{5,j} x_{1,2} + a_{6,j} x_{1,3} \qquad (j = 4, \ldots, n).$$

Значит, $a_{4,j}, a_{5,j}, a_{6,j}$ не зависят от j, и полагая

$$a_{4,j} = -a_{2,3}, \qquad a_{5,j} = -a_{3,3}, \qquad a_{6,j} = b \qquad (j > 3), \tag{39}$$

из (38) имеем

$$\psi_j = -a_{2,j} x_{1,1} - a_{3,j} x_{1,2} + b x_{1,j} \qquad (j > 3).$$

Поэтому если $b \neq 0$, то $x_{1,1}, x_{1,2}, \psi_3, \ldots, \psi_n$ линейно независимы. Если же $b = 0$, то $\langle \psi_3, \ldots, \psi_n \rangle = \langle x_{1,1}, x_{1,2} \rangle$, а из линейной независимости ψ_s и ψ_k следует, что $a_{2,s} a_{3,k} \neq a_{2,k} a_{3,s}$.

Из (37) и (39) получаем, что

$$\det A_j = (a_{1,j}b - a_{3,j}a_{2,3} + a_{2,j}a_{3,3})^2 \qquad (j \geqslant 4).$$

4.1. $\det A_k = 0$ для некоторого $k \in \{4, \dots, n\}$.

Тогда из (38) и неколлинеарности ψ_3 и ψ_k следует, что $\mathrm{rank}_F(\eta_k, \xi_k, \psi_k, \psi_3) = 2$, $b \neq 0$ (т.к. иначе $a_{2,k}a_{3,3} - a_{3,k}a_{2,3} = 0$, что противоречит неколлинеарности ψ_3 и ψ_k), и, значит, $x_{1,1}, x_{1,2}, \psi_3, \dots, \psi_n$ линейно независимы. При этом найдутся r_k, q_k, t_k и s_k, принадлежащие F, для которых

$$\eta_k = -r_k\psi_3 + q_k\psi_k, \qquad \xi_k = -t_k\psi_3 + s_k\psi_k.$$

Отсюда и из (36) при $j = k$ и всех $i \geqslant 1$

$$(r_k x_{i,1} + t_k x_{i,2} + x_{i,k})\psi_3 = (q_k x_{i,1} + s_k x_{i,2} + x_{i,3})\psi_k.$$

Следовательно, найдутся $\beta_1, \dots, \beta_m$, принадлежащие F, для которых, полагая $q_k = r_3$ и $s_k = t_3$, имеем:

$$x_{i,l} = -r_l x_{i,1} - t_l x_{i,2} + \beta_i\psi_l \qquad (i \geqslant 1; l \in \{3; k\}). \tag{40}$$

Из (36) и (40) при $i = 1, j \in \{4, \dots, n\}\backslash\{k\}$ и $l = 3$ получаем

$$\begin{gathered}(\beta_1\psi_j - x_{1,j})\psi_3 + (\eta_j - r_3\psi_j)x_{1,1} + (\xi_j - t_3\psi_j)x_{1,2} = 0 \\ (j \in \{4, \dots, n\}\backslash\{k\}).\end{gathered} \tag{41}$$

Но $\psi_3, x_{1,1}, x_{1,2}$ линейно независимы. Поэтому из (41) следует, что

$$\begin{bmatrix} x_{1,j} \\ \eta_j \\ \xi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w_{1,j} & w_{2,j} \\ -w_{1,j} & 0 & w_{3,j} \\ -w_{2,j} & -w_{3,j} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\psi_3 \\ x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ r_3 \\ t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_j \end{bmatrix} \qquad (j \in \{4, \dots, n\}\backslash\{k\}), \tag{42}$$

где $w_{i,j} \in F$ для каждых $i \in \{1; 2; 3\}$ и $j \in \{4, \dots, n\}\backslash\{k\}$.

Используя полученные равенства для η_j и ξ_j, из (36) и (40) при $l = 3$ имеем:

$$(w_{1,j}x_{i,1} + w_{2,j}x_{i,2} + \beta_i\psi_j - x_{i,j})\psi_3 = w_{3,j}T_{i,2} \qquad (i > 1; j \in \{4, \dots, n\}\backslash\{k\}) \tag{43}$$

Из (43) и (17) следует, что $w_{j,3} = 0$ для каждого $j \in \{4, \dots, n\}\backslash\{k\}$. Но тогда из (42) и (43)

$$x_{i,j} = w_{1,j}x_{i,1} + w_{2,j}x_{i,2} + \beta_i\psi_j \qquad (i \geqslant 1; j \in \{4, \dots, n\}\backslash\{k\}). \tag{44}$$

В силу (44) и (40), M эквивалентна стандартной матрице

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \beta_1\psi_3 & \dots & \beta_1\psi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \beta_m\psi_3 & \dots & \beta_m\psi_n \end{bmatrix}.$$

4.2. $\det A_j \neq 0$ для каждого $j \in \{4, \dots, n\}$.

Тогда из (38) следует, что для каждого $j > 4$ функции $\psi_3, \psi_j, \xi_j, \eta_j$ линейно независимы, а из (36)— что для каждых $j > 4$ и $i \geqslant 2$ найдется матрица $C_{i,j}$, элементы которой принадлежат F, и при этом

$$[x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}, x_{i,j}] = [x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,j}]A_j C_{i,j} \qquad (i > 1; j > 3), \tag{45}$$

Полагая $C_{1,j} = A_j^{-1}$, из (45) и (38) получаем:

$$[x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}, x_{i,j}] = [\eta_j, \xi_j, \psi_j, -\psi_3]C_{i,j} \qquad (i \geqslant 1; j \geqslant 4).$$

Покажем, что $n = 4$.

Пусть $n > 4$,

$$C_{2,j} = \begin{bmatrix} 0 & -c_{1,j} & -c_{2,j} & -c_{4,j} \\ c_{1,j} & 0 & -c_{3,j} & -c_{5,j} \\ c_{2,j} & c_{3,j} & 0 & -c_{6,j} \\ c_{4,j} & c_{5,j} & c_{6,j} & 0 \end{bmatrix} \qquad (j > 3).$$

Из (45) при $j = 4$

$$\frac{\partial x_{2,1}}{\partial x_{1,4}} = c_{2,4}b - c_{1,4}a_{3,3}, \qquad \frac{\partial x_{2,2}}{\partial x_{1,4}} = c_{3,4}b + c_{1,4}a_{2,3}, \qquad \frac{\partial x_{2,3}}{\partial x_{1,4}} = c_{2,4}a_{2,3} + c_{3,4}a_{3,3}.$$

Но из (45) при $j = 5$

$$\frac{\partial x_{2,1}}{\partial x_{1,4}} = \frac{\partial x_{2,2}}{\partial x_{1,4}} = \frac{\partial x_{2,3}}{\partial x_{1,4}} = 0$$

Следовательно,

$$c_{2,4}b - c_{1,4}a_{3,3} = c_{3,4}b + c_{1,4}a_{2,3} = c_{2,4}a_{2,3} + c_{3,4}a_{3,3} = 0.$$

Хотя бы один из трех элементов $a_{2,3}, a_{3,3}, b$ матрицы A_4 не равен 0, т.к. $detA_4 \neq 0$. Поэтому найдется $t \in F$, для которого

$$c_{1,4} = tb, \qquad c_{2,4} = ta_{3,3}, \qquad c_{3,4} = -ta_{2,3},$$

а тогда из (45) при $j = 4$ получаем:

$$T_{2,2} = ((ta_{2,4} + c_{5,4})x_{1,1} + (ta_{3,4} - c_{4,4})x_{1,2})(a_{2,3}x_{1,1} + a_{3,3}x_{1,2} - bx_{1,3}),$$

что противоречит неприводимости $T_{2,2}$.

Заключение

Пусть M—$m \times n$*-матрица, элементы которой - линейные функции, определенные на линейном пространстве V над бесконечным полем F, характеристика которого не равна* 2.

Доказывается, что если $rank(M) \leqslant 3$, строки $X_1, \ldots, X_m$ матрицы M *линейно независимы над F, а первая ее строка X_1 состоит из линейно независимых функций, то либо $n = 4$, $m \leqslant 6$ и для каждого $i > 1$*

$$X_i = X_1 S_1 S_i,$$

где $S_1, \ldots, S_n$ *—кососимметричные матрицы, элементы которых принадлежат* F *и* $det(S_1) \neq 0$*, либо найдется квадратная невырожденная матрица* С*, элементы которой принадлежат* F *и для, которой выполняется одно из следующих условий:*
1)

$$MC = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \ldots & x_n \\ \alpha_2 x_1 & \alpha_2 x_2 - y_1 & \alpha_2 x_3 - y_2 & \alpha_2 x_4 & \ldots & \alpha_2 x_n \\ \alpha_3 x_1 + y_1 & \alpha_3 x_2 & \alpha_3 x_3 - y_3 & \alpha_3 x_4 & \ldots & \alpha_3 x_n \\ \alpha_4 x_1 + y_2 & \alpha_4 x_2 + y_3 & \alpha_4 x_3 & \alpha_4 x_4 & \ldots & \alpha_4 x_n \end{bmatrix},$$

где y_1, y_2, y_3 *принадлежат* V^* *и линейно независимы,* $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *принадлежат* F*;*

2) *для некоторого целого положительного* $k \leqslant rank(M)$ *ранг над* F *множества строк матрицы, полученной вычеркиванием первых* k *столбцов матрицы* МС*, равен* $rank(M) - k$.

Эти результаты естественным образом связаны с задачей линейной классификации n-ок линейных отображений конечномерного линейного прост.ранства в линейное пространство V^**, линейно зависимых над полем* $F(V^*)$ *рациональных функций, и могут использоваться при изучении строения некоторых бесконечных групп отражений и их алгебр полиномиальных инвариантов.*

Список литературы

1. *Криворучко А.И.* О полиномиальных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями // Динамические системы. - 2000. - Вып. 16. - С. 124-129.
2. *Комиссаренко Е.В., Криворучко А.И.* Об инвариантах бесконечных групп отражений с четырьмя линейными оболочками орбит направлений симметрии // Учебные записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского, Серия «Матем. Мех. Инф. и Киберн.». - 2005. - №1. - С. 10-18.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц - М.: Наука, 1988. - 552 с.