**УДК 517**

# ЗАДАЧА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ПСЕВДОБУЛЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕПОЛНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ О КРИТЕРИЯХ

**Козлова М.Г., Романчук Л.М.**

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Факультет математики и информатики
пр. Вернадского, 4, г. Симферополь, Крым, Украина, 95007
e-mail: *art-inf@mail.ru*

**Abstract.**

The problem of multicriteria Pseudo-Boolean optimization for the case of partially given objective function is considered. The analysis of algorithms (branches and borders method, criterion linear fold, locals search) for solving bicriteria problems of Pseudo-Boolean linear optimization is carried out when criteria are represented by the information on the coefficient signs.

## Введение

*Целью данной работы* является исследование задач многокритериальной псевдобулевой оптимизации с неполной начальной информацией о целевых функциях, а также обобщение и применение существующих методов решения многокритериальных задач для случая частичного (неполного) задания целевых функций.

*Постановка задачи.* Рассмотрим задачу многокритериальной псевдобулевой оптимизации вида

$$\begin{cases} extr f_i \\ \widetilde{x} \in \Omega \subseteq B^n, f_i \in PS_2(n), i = \overline{1,m} \end{cases} \tag{1}$$

в которой целевые функции неизвестны, а начальная информация о них представлена знаниями, имеющими вид фактов – изначально истинных предикатов:

$$f_i = c_{i1}x_1 + \cdots + c_i n x_n + c_{i0}, \quad c_i < 0, \quad c_i = 0, \quad c_i > 0 \tag{2}$$

и т.д. Так как зачастую эксперт может оценить ситуацию в случае выполнения предиката $x_i$, то вполне естественно запросить у него информацию о линейности/нелинейности целевых функций и о знаках коэффициентов целевых функций [6], [8].

Рассмотрим следующие варианты:

1) функции $f_i \in LPS_2(n)$, $i \in I_1$, заданы полностью, а $f_k, k \in I_2$, $I_1 \cup I_2 = \{1, \ldots, m\}$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ – представлены достоверными знаниями (2);
2) все функции $f_i \in LPS_2(n)$, $i = \overline{1,m}$, представлены достоверными знаниями (2).

## 1. Задача многокритериальной псевдобулевой оптимизации с неполной начальной информацией об одном из критериев

Можно показать [5], что задача (1) эквивалентна задаче вида:

$$\begin{cases} extr f_i \\ D_{F_\Omega} = 1, \\ \widetilde{x} \in \ B^n, f_i \in PS_2(n), i = \overline{1,m} \end{cases} \tag{3}$$

которая называется задачей многокритериальной псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивным ограничением в канонической форме.

Рассмотрим задачу на поиск максимума функций $f_i$, где функции $f_i$ являются линейными:

$$\begin{cases} \max f_i = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \\ \bigvee\limits_{j=1}^{M} x_{j1}^{\sigma_{j1}} \ \& \ \ldots \ \& \ x_{jr}^{\sigma_{jr}} = 1, \widetilde{x} \in \ B^n, i = \overline{1,m} \end{cases} \tag{4}$$

Пусть $N_j = \{\widetilde{x} : x_{j_1} = \sigma_{j_1}, \ldots, x_{j_r} = \sigma_{j_r}\}$ – интервал, состоящий из всех булевых наборов, на которых $j$-ая конъюнкция ДНФ ограничения канонической модели обращается в единицу. Область допустимых решений $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{M} N_j$. Тогда задача (4) может быть представлена в эквивалентной форме [9]:

$$\begin{cases} \max f_i = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \\ \widetilde{x} \in \bigcup\limits_{j=1}^{M} N_j, i = \overline{1,m} \end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим бикритериальную задачу, когда одна из функций задана полностью, а другая представлена следующим достоверными знаниями: $f_i = c_{i1}x_1 + \cdots + c_{in}x_n + c_{io}$, и для каждого $j = \overline{1,n}$, является истинным только один из трех предикатов $c_{ij} < 0, c_{ij} = 0, c_{ij} > 0$

$$\begin{cases} max f_i = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \\ \mathrm{D}_\Omega(\tilde{x}) = \bigcup\limits_{j=1}^{M} N_j, i = \overline{1,2} \end{cases} \tag{6}$$

Если множество $\Pi(\Omega) \cap \Omega$ не пусто, то оно состоит только из парето-оптимальных решений задачи (6), где $\Pi(\Omega) \neq \oslash$ - множество Парето для задачи (6) без учета ограничения [8]. Используя необходимое условие [8], которому должны удовлетворять допустимые точки, получим:

$$\Big(\underset{i:(c_{1i}>0)\ \&\ (c_{2i}>0)}{\&} x_i\Big)\Big(\underset{j:(c_{1j}<0)\ \&\ (c_{2j}<0)}{\&} \overline{x}_j\Big) = 1 \qquad (7)$$

Остальные компоненты такие, что $c_{1k}c_{2k} < 0$ можно исследовать при помощи метода ветвей и границ.

Каждый из интервалов $N_j, j = \overline{1, M}$ должен быть исследован на наличие в нем паретовских точек, поэтому, в общем случае, отдельно строятся M деревьев ветвления с учетом уже зафиксированных соответствующим интервалом значений переменных.

Пусть $j$-ый интервал $N_j$ не противоречит необходимому условию (7) и совместно с ним определяется $p$ компонент вектора $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, тогда максимальное количество рекордов, которое мы можем получить, в результате будет $2^{n-p}$.

На каждом этапе ветвления, вычисляя верхние и нижние векторные оценки соответствующего допустимого множества, требуется запрашивать у лица, принимающего решения (ЛПР), ответ на запрос следующего вида:

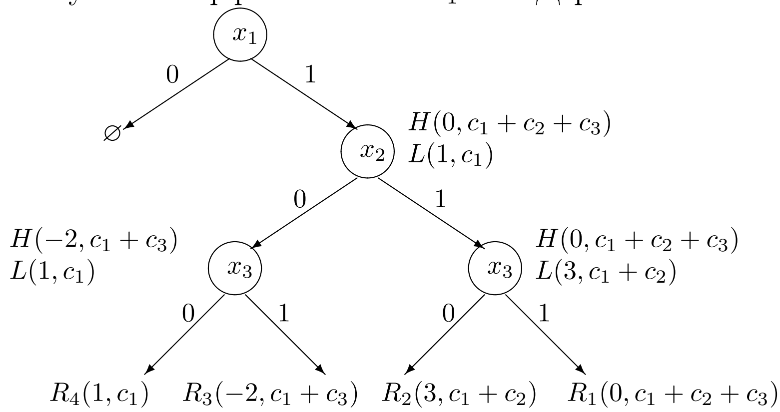
$$c_{i1} \pm c_{i2} \pm \cdots \pm c_{ik} < 0, \qquad (8)$$

где $i_k, 1 \leqslant k \leqslant n$ такие, что $\&_{i_k} x_{i_k}$ является подмножеством допустимого множества на данном этапе. Так как одна из функций известна, то можно сократить число запросов, рассматривая только случаи, когда значения полностью определенной функции в верхней векторной оценке данного интервала меньше, чем в некотором рекорде или меньше, чем в нижней векторной оценке другого интервала.

**Пример 1.** Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \max f_1 = x_1 + 2x_2 - 3x_3, \\ \max f_2 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ c_1 > 0, c_2 < 0, c_3 > 0 \\ \widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3) \in B^3 \end{cases}$$

Необходимое условие эффективности: $x_1 = 1$. Дерево ветвления имеет вид:




Здесь $H(y_1, y_2)$ — вектор верхних и $L(y_1, y_2)$ — вектор нижних достижимых оценок функций $f_1, f_2; R(\alpha, \beta)$ — рекорд.

Если нет дополнительной информации о коэффициентах $c_j, j = 1, 2, 3$, то выдается ответ в виде множества Парето: $\Pi(\Omega) = \{(111), (110), (101), (100)\}$.

Однако, если запросить у ЛПР ответ на вопрос: $c_2 + c_3 < 0$, тогда в случае положительного ответа, получаем, что $R_4$ мажорирует $R_1$ и точка (111) может быть удалена из множества $\Pi(\Omega)$. Таким образом, дополнительная информация о неизвестных коэффициентах позволила сузить множество парето-оптимальных решений. Можно убедиться, что множество $\Pi(\Omega)$ либо полностью совпадает, либо включает в себя множество парето-оптимальных решений полностью определенной задачи.

Из примера видно, что необходимо сравнивать выражения вида:

$$c_{i_1} + \cdots + c_{i_r} < c_{j_1} + \cdots + c_{j_l} \tag{9}$$

где $I_1 = \{i_1, \ldots, i_r\} \in \{1, \ldots, n\}$ и $I_2 = \{j_1, \ldots, j_l\} \in \{1, \ldots, n\}$. Если $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, то в случае, когда правая и левая части неравенства (9) отличаются на одно слагаемое и $l \neq r$, не надо привлекать дополнительной информации от ЛПР, так как уже известны знаки коэффициентов $c_i, i = \overline{1, n}$, и можно самостоятельно определить истинность или ложность выражения (9). Если же правая и левая части (9) отличаются более чем на одно слагаемое или $l = r$, и знаки этих слагаемых различны, тогда формируется запрос в виде:

$$c_{i_1} + \cdots + c_{i_{r'}} - c_{j_1} - \cdots - c_{j_{l'}} < 0,$$

где $I_1'\{i_1, \ldots, i_{r'}\} \in I_1$, но $I_1' \notin I_2$, а $I_2' = \{j_1, \ldots, j_{l'}\} \in I_2$, но $I_2' \notin I_1$ причем либо $\sum\limits_{k \in I_1} c_k$ и $\sum\limits_{p \in I_2} c_p$ одного знака, либо $c_k, k \in I_1$, как и $c_p, p \in I_2$ имеют разные знаки.

Данный подход получил название синтез сужающих запросов и описан в работах [9], [10].

Рассмотрим использование метода локального поиска [17] при решении задачи (6). В качестве начальной точки $\widetilde{x}^0$ можно выбрать точку, удовлетворяющую условию (7). На каждом шаге сравниваются соседние наборы, отличающиеся от текущего вектора $k$-ой компонентой, причем $c_{1k}c_{2k} < 0$. *Алгоритм локального поиска для решения задачи* (6) имеет вид:

$1^0$. Пусть $\widetilde{x}^0$ - произвольная точка из множества допустимых значений $\Omega$, $k = 0$.

$2^0$. Пока существует такая точка $y \in O_1(\widetilde{x}^k)$, что $H(y) \succ H(\widetilde{x}^k)$, принимаем $\widetilde{x}^{k+1} = y, k = k + 1$

$3^0$. В качестве ответа выдается точка $\widetilde{x}^k$.

В результате будет получена точка из множества парето-оптимальных решений.

Здесь под $O_k(\widetilde{x})$ понимается *уровень* точки $\widetilde{x} \in B^n$, т.е. множество точек, отличающихся от точки $\widetilde{x}$ значением $k$ координат. Множество всех точек пространства булевых переменных $B^n$ можно представить в виде последовательности уровней $O_k(\widetilde{x}), k = \overline{0, n}$ какой-либо точки $\widetilde{x} \in B^n$. Уровень $O_k(\widetilde{x})$ состоит из $C_n^k$ точек.

**Пример 2.** Рассмотрим задачу из примера 1. В качестве $\widetilde{x}^0$ возьмем точку (111). Тогда $H(111) = (0, c_1 + c_2 + c_3), O_1(\widetilde{x}^0) = \{(101), (110)\}$, $H(101) = (-2, c_1 + c_3)$, $H(110) = (3, c_1 + c_2)$.

На первом шаге получаем ответ $\widetilde{x}^* = (111)$, так как ни $H(101)$, ни $H(110)$ не мажорируют $H(111)$.

Но в общем случае можно получить точку, которая не будет являться эффективной.

Для поиска решения удобно использовать *алгоритм локального поиска по первому приближению*:

$1^0$. Вводятся два множества $T = \{\widetilde{x}^0\}$, $P = \emptyset$, точка $\widetilde{x}^0$ удовлетворяет условию (7), $k = 0$, $p$ — число компонент вектора $\widetilde{x}^0$, не вошедших в выражение (7).

$2^0$. Пока $T = \emptyset$, $T = T \setminus \widetilde{x}$, $\widetilde{x}^{k+1} = \widetilde{x}$, $k = k + 1$ вычисляется $H(\widetilde{x}^k)$ — вектор значений целевых функций в точке $\widetilde{x}^k$, $s = 0$.

$3^0$. Рассматриваются всевозможные наборы $\widetilde{y} \in O_1(\widetilde{x}^k)$, удовлетворяющие условию (7), для каждого из них выполняются шаги $4^0$ — $7^0$:

$4^0$. Вычисляется $H(\widetilde{y})$. Если $H(\widetilde{y}) \succ H(\widetilde{x}^k)$, то $T = T \cup \{\widetilde{y}\}$, переходим на шаг $8^0$, иначе на шаг $5^0$.

$5^0$. Если $H(\widetilde{y})$ и $H(\widetilde{x}^k)$ эквивалентны (т.е. $H(\widetilde{y}) \sim H(\widetilde{x}^k)$, то добавляем $T = T \cup \{\widetilde{y}\}$, $P = P \cup \{\widetilde{x}^k\}$, и переходим на шаг $8^0$, иначе — на шаг $6^0$.

$6^0$. Если $H(\widetilde{y}) \succ H(\widetilde{x}^k)$, то $s = s + 1$ и переходим на шаг $8^0$, иначе — на шаг $3^0$.

$7^0$. Если $s = p$ то $P = P \cup \{\widetilde{x}^k\}$ и переходим на птаг $9^0$, иначе - на шаг $2^0$.

$8^0$. Из множества T удаляются повторяющиеся точки, мажорируемые точки и $T = T \setminus P$, затем переходим на шаг $2^0$.

$9^0$. Из множества P удаляются мажорируемые векторы.

$10^0$. В качестве ответа выдается множество P, состоящее из эффективных точек.

Можно рассматривать не только первый несравнимый с $H(\widetilde{x}^k)$ вектор, а все $\widetilde{y} \in O_1(\widetilde{x}^k) : H(\widetilde{y}) \sim H(\widetilde{x}^k)$, выбирая из них те, которые не мажорируются другими векторами. В этом случае на шаге $5^0$, если $H(\widetilde{y}) \sim H(\widetilde{x}^k)$, то $T = T \cup \{\widetilde{y}\}, s = s + 1$, переходим на шаг $8^0$, иначе - на шаг $6^0$.

**Пример 3.** Рассмотрим задачу из примера 1. Пусть точка $\widetilde{x}^0 = (111)$ удовлетворяет необходимому условию (7) . Следуя шагам алгоритма, получим:

$$T = \{(111)\}, P = \emptyset, k = 0, p = 2.$$
$$\widetilde{x}^1 = (111), T = \emptyset, k = 1, H(\widetilde{x}^1) = (0, c_1 + c_2 + c_3), s = 0; \widetilde{y} = (101), H(\widetilde{y}) = (-2, c_1 + c_3),$$
$$H(\widetilde{y}) \sim H(\widetilde{x}^1), T = \{(101)\}, P = \{(\mathbf{111})\}.$$
$$\tilde{x}^2 = (101), T = \emptyset, k = 2, H(\tilde{x}^2) = (-2, c_1 + c_3), s = 0; \widetilde{y} = (100), H(\widetilde{y}) = (1, c_1),$$
$$H(\widetilde{y}) \sim H(\widetilde{x}^2), T = \{(100)\}, P = \{(\mathbf{111}), (\mathbf{101})\}.$$
$$\widetilde{x}^3 = (100), T = \emptyset, k = 3, H(\widetilde{x}^3) = (1, c_1), s = 0; \widetilde{y} = (110), H(\widetilde{y}) = (3, c_1 + c_2),$$
$$H(\widetilde{y}) \sim H(\widetilde{x}^3), T = \{(110)\}, P = \{(\mathbf{111}), (\mathbf{101}), (\mathbf{100})\}.$$
$$\widetilde{x}^4 = (100), T = \emptyset, k = 4, H(\widetilde{x}^4) = (3, c_1 + c_2), s = 0; \widetilde{y} = (111), H(\widetilde{y}) = (0, c_1 + c_2 + c_3),$$
$$H(\widetilde{y}) \sim H(\widetilde{x}^4), T = \{(111)\}, P = \{(\mathbf{111}), (\mathbf{101}), (\mathbf{100}), (\mathbf{110})\}, T = T \backslash P = \emptyset.$$

Таким образом, множество парето-оптимальных решений состоит из четырех точек: $P = \{(111), (101), (100), (110)\}$.

Пусть на некотором шаге p получен вектор значений целевых функций в точке $\widetilde{x}^p : H(\widetilde{x}^p) = (d, c_{i_1} + \cdots + c_{i_p})$. Так как рассматриваются только соседние наборы $\tilde{y}$, то допустим $\widetilde{y}$ отличается от $\widetilde{x}^p$ $j$-ой компонентой и рассмотрим следующие варианты:

а) если $x_j^p = 0$, то $y_j = 1$, тогда $H(\tilde{y}) = (d', c_{i_1} + \cdots + c_{i_p} + c_j)$. Из условия следует
$H(\widetilde{y}) \succ H(\widetilde{x}^p)$, если $[(d' \geqslant d) \;\&\; (c_j > 0)] \vee [(d' > d) \;\&\; (c_j = 0)]$,
$H(\widetilde{y}) \sim H(\widetilde{x}^p)$, если $[(d' < d) \;\&\; (c_j > 0)] \vee [(d' > d) \;\&\; (c_j < 0)]$ и
$H(\widetilde{y}) \prec H(\widetilde{x}^p)$, если $[(d' \leqslant d) \;\&\; (c_j < 0)] \vee [(d' < d) \;\&\; (c_j = 0)]$.

б) если $x_j^p = 1$, то $y_j = 0$, тогда $H(\widetilde{y}) = (d', c_{i_1} + \cdots + c_{i_p} - c_j)$, причем
$H(\widetilde{y}) \succ H(\widetilde{x}^p)$, если $[(d' \geqslant d) \;\&\; (c_j < 0)] \vee [(d' > d) \;\&\; (c_j = 0)]$,
$H(\widetilde{y}) \sim H(\widetilde{x}^p)$, если $[(d' < d) \;\&\; (c_j < 0)] \vee [(d' > d) \;\&\; (c_j > 0)]$ и
$H(\widetilde{y}) \prec H(\widetilde{x}^p)$, если $[(d' \leqslant d) \;\&\; (c_j > 0)] \vee [(d' < d) \;\&\; (c_j = 0)]$.

Аналогично можно сравнивать векторы значений целевых функций, когда в задаче больше, чем два критерия. И, как видно, для этого достаточно иметь информацию о знаках коэффициентов в целевых функциях.

Так как задача (5) является дискретной с конечным числом допустимых решений, то для решения можно использовать алгоритм полного перебора. Однако, при размерности задачи $n$ необходимо проверить $2^n$ наборов. Таким образом, если размерность задачи сравнительно не велика ($n \leqslant 10$), она может быть решена полным перебором. В этом случае надо найти всевозможные вектора значений целевых функций и удалить из них те, которые мажорируются хотя бы одним другим вектором.

## 2. Задача многокритериальной псевдобулевой оптимизации с неполной начальной информацией о критериях

Рассмотрим задачу (6), когда обе целевые функции представлены информацией о знаках коэффициентов. В этом случае потребуется дополнительная начальная информация от ЛПР. Можно использовать выше описанный подход, который основывается на формировании сужающих запросов и предоставлении ЛПР права определения их истинности. Однако, такая информация может отсутствовать. Необходимо, используя имеющиеся данные, найти множество парето-оптимальных решений, на основании которого ЛПР будет осуществлять свой дальнейший выбор.

Применение метода ветвей и границ, в данном случае, может свестись к полному перебору всех возможных решений. Алгоритм локального поиска позволяет определить множество эффективных решений при наличии информации лишь о знаках целевых функций. Однако, в общем случае, может оказаться, что некоторые эффективные точки во множество $P$ не вошли.

Наиболее распространенным приемом решения той или иной конкретной многокритериальной задачи является ее сведение к решению некоторой скалярной задачи, целевая функция которой представляет собой определенную комбинацию имеющихся критериев [11], [12], [13], [14], [16]. Такой прием носит название скаляризации многокритериальной задачи. В зависимости от способа комбинирования имеющихся критериев в единый скалярный получаем тот или иной тип скаляризации, выбираемый исходя из существа решаемой задачи и наличия дополнительной информации о предпочтениях.

Один из способов скаляризации основан на использовании так называемой линейной свертки критериев [12]

$$F(\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\widetilde{x}), \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

где $\lambda_i$, $i = \overline{1,m}$ трактуют как некие веса или коэффициенты важности соответствующих критериев: более важному из них назначают больший коэффициент в линейной свертке критериев, а менее важному — меньший.

Рассмотрим метод нахождения множества парето-оптимальных решений, используя информацию о важности критериев, так называемую линейную свертку. В этом случае задача (6) примет вид:

$$\begin{cases} max \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_j, \\ D_\Omega(\widetilde{x}) = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, 0 \leqslant \lambda_i, \\ (c_{ij} > 0) \vee (c_{ij} < 0) \vee (c_{ij} = 0), \ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{10}$$

Если множество возможных решений $\Omega$ задачи (10) есть непустое выпуклое подмножество векторного пространства $R^n$, тогда на основании леммы Карлина имеет место включение [16]:

$$\Pi(\Omega) \subset \bigcup_{\widetilde{\lambda}} arg \max_{\widetilde{x} \in \Omega} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\widetilde{x}), \tag{11}$$

где объединение осуществляется по множеству векторов $\widetilde{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, а $\Pi(\Omega)$ – множество решений, оптимальных по Парето.

Рассмотрим пример, когда этот же факт имеет место и в дискретном случае.

**Пример 4.** Пусть требуется решить следующую задачу безусловной оптимизации, содержащую два критерия:

$$\begin{cases} \max f_1 = x_1 + 2x_2 - 3x_3, \\ \max f_2 = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \\ \widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3) \in B^3 \end{cases}$$

Данная задача сводится к скалярной задаче вида:

$$\begin{cases} \max F = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = x_1(\lambda_1 + 2\lambda_2) + x_2(2\lambda_1 - 4\lambda_2) + x_3(-3\lambda_1 + 3\lambda_2) \\ \widetilde{x} \in B^3, \lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $x_1 = 1$, а значения $x_2$ и $x_3$ зависят от $\lambda_1$ и $\lambda_2$ следующим образом:

$$\lambda_1 < \lambda_2 \Longrightarrow x_2 = 0, x_3 = 1$$

$$\lambda_1 > \lambda_2 \Longrightarrow x_2 = 1, x_3 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Longrightarrow x_2 = 0, x_3 \in \{0, 1\}$$

Таким образом, получаем возможные ответы:

$\widetilde{x}^* = (101)$, когда более важным объявляется второй критерий;

$\widetilde{x}^* = (110)$, когда более важным объявляется первый критерий;

$\widetilde{x}^* \in (100), (101)$, когда критерии принимаются как равносильные.

Из таблицы значений видно, что множество парето-оптимальных решений состоит из трех точек $\Pi(\Omega) = \{(100), (101), (110)\}$, т.е. выполняется включение (11).

*Таблица 1. Значения целевых функций в примере 4*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\underline{\mathbf{1}}$ | $\underline{\mathbf{1}}$ | $\underline{\mathbf{1}}$ | 1 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | $\underline{\mathbf{0}}$ | $\underline{\mathbf{0}}$ | $\underline{\mathbf{1}}$ | 1 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 0 | 1 | $\underline{\mathbf{0}}$ | $\underline{\mathbf{1}}$ | $\underline{\mathbf{0}}$ | 1 |
| $f_1$ | 0 | −3 | 2 | −1 | $\underline{\mathbf{1}}$ | $\underline{\mathbf{-2}}$ | $\underline{\mathbf{3}}$ | 0 |
| $f_2$ | 0 | 3 | −4 | −1 | $\underline{\mathbf{2}}$ | $\underline{\mathbf{5}}$ | $\underline{\mathbf{-2}}$ | 1 |

Пример показывает, что $\lambda_i, i = \overline{1,m}$ не является непрерывными на интервале (0,1), а существует конечное число значений $\lambda_i, i = \overline{1,m}$, которые определяют набор всевозможных решений задачи (10).

**Пример 5.** Пусть требуется решить задачу из примера 4, когда ограничение имеет вид: $D(\widetilde{x}) = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_3 = 1$. Тогда
$\widetilde{x}^* \in \{(100), (001)\}$, когда более важным объявляется второй критерий;
$\widetilde{x}^* = \{(110)\}$, когда более важным объявляется первый критерий;
$\widetilde{x}^* \in \{(100), (001)\}$, когда критерии принимаются как равносильные.

*Таблица 2. Значения целевых функций в примере 5.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | $\underline{\mathbf{0}}$ | 0 | 0 | $\underline{\mathbf{1}}$ | $\underline{\mathbf{1}}$ |
| $x_2$ | 0 | $\underline{\mathbf{0}}$ | 1 | 1 | $\underline{\mathbf{0}}$ | $\underline{\mathbf{1}}$ |
| $x_3$ | 0 | $\mathbf{1}$ | 0 | 1 | $\underline{\mathbf{0}}$ | $\underline{\mathbf{0}}$ |
| $f_1$ | 0 | $\underline{\mathbf{-3}}$ | 2 | $-1$ | $\underline{\mathbf{1}}$ | $\underline{\mathbf{3}}$ |
| $f_2$ | 0 | $\underline{\mathbf{3}}$ | $-4$ | $-1$ | $\underline{\mathbf{2}}$ | $\underline{\mathbf{-2}}$ |

Множество парето-оптимальных решений состоит из трех точек

$$\Pi(\Omega) = \{(001), (100), (110)\}$$

и выполняется включение (11).

Решение задачи (10) заключается в опредлении знака суммы:

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\lambda_i \qquad (12)$$

Рассмотрим теперь задачу, когда коэффициенты целевых функций не известны, но имеется информация о знаках коэффициентов. Так как $\lambda_i, i = \overline{1,m}$ определяют значимость соответствующего критерия, то, заменив в (10) $c_{ij}$ на $\operatorname{sign} c_{ij}$, получаем определенную задачу, где

$$\operatorname{sign} c_{ij} = \begin{cases} -1, c_{ij} < 0; \\ 0, c_{ij} = 0; \\ 1, c_{ij} > 0. \end{cases} \qquad (13)$$

**Пример 6.** Допустим для задачи из примера 5 не удалось получить точные значения коэффициентов, а имеется лишь информация об их знаках:

$$\begin{cases} \max f_1 = \text{c}_1 x_1 + \text{c}_2 x_2 + \text{c}_3 x_3 \\ \max f_2 = d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 \\ \ c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 < 0 \\ \ d_1 > 0, d_2 < 0, c_3 > 0 \end{cases}$$

Скалярный критерий примет вид:

$$\max F = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = x_1(\lambda_1 + \lambda_2) + x_2(\lambda_1 - \lambda_2) + x_3(\text{-}\lambda_1 + \lambda_2).$$

Тогда в зависимости от $\lambda_i, i = \overline{1, m}$ получаем тот или иной результат:
$\widetilde{x}^* \in \{(100), (001)\}$, когда более важным объявляется второй критерий;
$\widetilde{x}^* = \{(110)\}$, когда более важным объявляется первый критерий;
$\widetilde{x}^* \in \{(100), (100)\}$, когда критерии принимаются как равносильные;
а $\Pi(\Omega) = \{(100), (001), (110), (011)\}$.

Однако, в общем случае включение (11), когда множество $\Omega$ - дискретно, не выполняется. Для доказательства этого факта рассмотрим пример.

**Пример 7.** Пусть требуется решить задачу:

$$\begin{cases} \max f_1 = -8x_1 + 8x_2 - x_3 + 2x_4 \\ \max f_2 = -9x_2 + 2x_3 + 7x_4 \\ \widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in B^4. \end{cases}$$

Из таблицы значений видно, что множество парето-оптимальных решений состоит из четырех точек: $\Pi(\Omega) = \{(0001), (0011), (0101), (0111)\}$.

*Таблица 3. Значения целевых функций в примере 7*

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $x_4$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f_1$ | 0 | 2 | $-1$ | 1 | 8 | 10 | 7 | 9 | $-8$ | $-6$ | $-9$ | $-7$ | 0 | 2 | $-1$ | 1 |
| $f_2$ | 0 | 7 | 2 | 9 | $-9$ | $-2$ | $-7$ | 0 | 0 | 7 | 2 | 9 | $-9$ | $-2$ | $-7$ | 0 |

Воспользуемся методом линейной свертки критериев. Задача примет вид:

$$\begin{cases} \max F = (-8\lambda_1 + 0\lambda_2)x_1 + (8\lambda_1 - 9\lambda_2)x_2 + (-\lambda_1 + 2\lambda_2)x_3 + (2\lambda_1 + 7\lambda_2)x_4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, \\ \widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in B^4. \end{cases}$$

Очевидно, что $x_1 = 0$, $x_4 = 1$, а значения $x_2$ и $x_3$ зависят от $\lambda_1$ и $\lambda_2$ следующим образом: $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$

$\widetilde{x}^* = (0011)$, если $\lambda_2 > \frac{8}{17}$;
$\widetilde{x}^* = (0101)$, если $\lambda_2 < \frac{1}{3}$;
$\widetilde{x}^* = (0111)$, если $\frac{1}{3} < \lambda_2 < \frac{8}{17}$;
$\widetilde{x}^* \in \{(0111), (0011)\}$, если$\lambda_2 = \frac{8}{17}$;
$\widetilde{x}^* \in \{(0101), (0111)\}$, если$\lambda_2 = \frac{1}{3}$.

Точку (0001) можно получить только в том случае, если выполняется условие:

$$(8\lambda_1 - 9\lambda_2 < 0)\&(-\lambda_1 + 2\lambda_2 < 0).$$

Но тогда получаем $(\lambda_2 > \frac{8}{17})\&(\lambda_2 < \frac{1}{3})$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что точка (0001) не будет получена ни при каких $\widetilde{\lambda}$.

Рассмотренный пример доказывает тот факт, что в задачах дискретной оптимизации в общем случае включение (11) может не выполнятся.

Пусть теперь в задаче из примера 7 целевые функции представлены сведениями о знаках своих коэффициентов. А для решения используем алгоритм локального поиска.

**Пример 8.**

$$\begin{cases} \max f_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4, \\ \max f_2 = d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4, \\ (c_1 < 0)\&(c_2 > 0)\&(c_3 < 0)\&(c_4 > 0), \\ (d_1 = 0)\&(d_2 < 0)\&(d_3 > 0)\&(d_4 > 0), \\ \widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in B^4. \end{cases}$$

Точка $\widetilde{x}^0 = (0111)$ удовлетворяет необходимому условию (7).

$$T = \{(0111)\},\ P = \emptyset, k = 0, p = 2.$$

$$\widetilde{x}^1 = (0111), T = \emptyset, k = 1, H(\widetilde{x}^1) = (c_2 + c_3 + c_4, d_2 + d_3 + d_4), s = 0; \widetilde{y} = (0011),$$
$$H(\widetilde{y}) = (c_3 + c_4, d_3 + d_4), H(\widetilde{y}) \sim H(\widetilde{x}^1), T = \{(0011)\}, P = \{(0111)\}.$$
$$\widetilde{x}^2 = (0011), T = \emptyset, k = 2, H(\widetilde{x}^2) = (c_3 + c_4, d_3 + d_4), s = 0; \widetilde{y} = (0001),$$
$$H(\widetilde{y}) = (c_4, d_4), H(\widetilde{y}) \sim H(\widetilde{x}^2), T = \{(0001)\}, P = \{(0111), (0011)\}.$$
$$\widetilde{x}^3 = (0001), T = \emptyset, k = 3, H(\widetilde{x}^3) = (c_4, d_4), s = 0; \widetilde{y} = (0101),$$
$$H(\widetilde{y}) = (c_2 + c_4, d_3 + d_4), H(\widetilde{y}) \sim H(\widetilde{x}^3), T = \{(0101)\}, P = \{(0111), (0011), (0001)\}.$$
$$\widetilde{x}^4 = (0101), T = \emptyset, k = 4, H(\widetilde{x}^4) = (c_2 + c_4, d_2 + d_4), s = 0; \widetilde{y} = (0001),$$
$$H(\widetilde{y}) = (c_4, d_4), H(\widetilde{y}) \sim H(\widetilde{x}^4), T = \{(0001)\}, P = \{(0111), (0011), (0001), (0101)\}.$$
$$T = T \backslash P = \emptyset.$$

Таким образом, множество парето-оптимальных решений состоит из четырех точек: $P = \{(0111), (0011), (0001), (0101)\}$.

## Заключение

В статье рассмотрены подходы к решению частично опредленных многокритериальных задач, в частности задач псевдобулевой линейной оптимизации с частично заданными целевыми функциями (а именно случай, когда начальная информация задана знаниями о коэффициентах целевых функций), предназначенных для использования в системах принятия решений, основаных на знаниях.

*Получены следующие результаты.*

1. Показан подход решения указанных задач с использованием метода ветвей и границ с формированием сужающих запросов и представлением ЛПР права опредления их истинности. Недостатком подхода является то, что применение метода ветвей и границ, в данном случае, может свестись к полному перебору всех возможных решений.
2. Показано,что для решения многокритериальных псевдобулевых задач линейной оптимизации с начальной информацией о знаках коэффициентов целевых функций может быть использован метод локального поиска, разработанный для полностью определенных задач многокритериальной оптимизации. Недостатком подхода является то, что в общем случае может оказаться, что в найденное множество $P$ не вошли некоторые эффективные точки.
3. Рассмотрено применение метода линейной свертки решения полностью определенных многокритериальных задач для решения задач указанного типа. Показано, что включение (11), когда множество $\Omega$ - дискретно, может не выполняться. Полученные результаты могут быть обобщены с бикритериального на многокритериальный случай.

*Практическое значение* результатов состоит в возможности использования разработанных алгоритмов выбора решений для построения информационных систем. Предложенные алгоритмы решениям ногокритериальных дискретных задач выбора решений, в которых информация о целевых функциях задана в виде достоверных знаний о линейности коэффициентов, применимы для широкого круга экологических и экономических задач; они востребованы разработчиками экспертных систем и систем поддержки принятия решений. На основе методов ветвей и границ, линейной свертки критериев и локального поиска решения бикритериальных задач псевдобулевой линейной оптимизации разработан программный комплекс MultiBool.

## Список литературы


1. *Антамошкин А.Н. Масич И.С.* Гриди алгоритмы и локальный поиск для условной псевдобулевой оптимизации. // Электронный журнал «Исследовано в России». – 2003. – №177 – С.2143-2149. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/177.pdf
2. *Антамошкин А.Н. Масич И.С.* Не улучшаемый алгоритм условной оптимизации монотонных псевдобулевых функций. // Электронный журнал «Исследовано в России». – 2004. – №64 – С.703-708. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2004/064.pdf

3. *Антамошкин А.Н. Масич И.С.* Идентификация свойств псевдобулевых функций. // Электронный журнал «Исследовано в России». – 2004. – №130 – С.1391-1396. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2004/130.pdf
4. *Донской В.И. Башта А.И.* Дискретные модели принятия решений при неполной информации.– Симферополь: Таврида, 1992. – 165 с.
5. *Донской В.И.* Задачи псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивным ограничением // Журнал вычислительной математики и мат. физики. – 1994 – Т.34, №3 – С.389-398.
6. *Донской В.И. Козлова М.Г.* Извлеченме знаний о свойствах целевой функции в логических системах поддержки принятия решений // Искусственный интеллект. – 2000. – №3. – С.230-234.
7. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.:Мир,1964.
8. *Козлова М.Г.* Многокритериальные модели принятия решений с линейными псевдобулевыми функциями и дизъюнктивным ограничением // Искусственный интеллект. – 2000. – №2. – С.67-73.
9. *Козлова М.Г.* Ориентированные модели принятия оптимальных решений // Ученые записки ТНУ. – 2002. –Вып.7(46).
10. *Козлова М.Г.* Синтез сужающих запросов // Динамические системы. – Симферополь:КФТ,2000. – Вып.16. – С.208-211.
11. *Меламед И.И. Сигал И.Х.* Вычислительное исследование линейной параметризации критериев в многокритериальном дискретном программировании. // Журнал вычислительной математики и мат. физики. – 1996. – Т.36, №10 – С.23-25.
12. *Меламед И.И. Сигал И.Х.* Исследование линейной свертки критериев в многокритериальном дискретном программировании. // Журнал вычислительной математики и мат. физики. – 1996. – Т.365, №8 – С.1260-1270.
13. *Ногин В.Д. Толстых И.В.* Использование набора количественной информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений // Журнал вычислительной математики и мат. физики. – 2000. – Т.40, №11 – С.1593-1601.
14. *Ногин В.Д.* Принцип решений и многокритериальной среде: количественной подход. – М.: Физматлит, 2002.
15. *Ногин В.Д.* Принцип Эджворта-Парето и относительная важность критериев в случае нечеткого отношения предпочтения // Журнал вычислительной математики и мат. физики. – 2003. – Т.43, №11 – С.1676-1686.
16. *Ногин В.Д.* Границы применимости распространенных методов скаляризации при решении задач многкритериального выбора // Журнал вычислительной математики и мат. физики. – 2003. – Т.43, №11 – С.1676-1686.
17. *Boros E., Hammer P.L.* Pseudo-Boolean Optimization // Discrete Applied Mathematics. – 2002. – №123(1-3). – P.155-225.