УДК 517.432

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНВОЛЮТИВНЫХ АЛГЕБР НАД КВАТЕРНИОННЫМИ ГИЛЬБЕРТОВЫМИ БИМОДУЛЯМИ

Карпенко И.И., Омельченко П.В.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики,
пр-т Вернадского, 4, г.Симферополь, Крым, Украина, 95007
e-mail: *i_karpenko@inbox.ru*

Abstract.
This paper is devoted to the description of all irreducible representations of some real involutive algebras on Hilbert quaternionic bimodules, naturally arising is resulting at consideration of nonequivalent involutions of graduated analogue of Lee algebra $o(2,\mathbb{H})$.

Введение

Идеи и методы кватернионного исчисления в последнее время находят все новые и новые сферы применения в различных областях теоретической физики и математики. Иногда эти задачи удается с помощью соответствующих преобразований свести к комплексному формализу, однако в этом случае всегда существует проблема обратного перехода и полноты полученного решения в рамках кватернионной теории. Ответы на эти вопросы иногда могут по уровню сложности превышать исходную задачу. Это свидетельствует о необходимости развития методов непосредственного построения неприводимых представлений вещественных алгебр над кватернионными модулями.

В данной работе приведено описание всех неприводимых конечномерных кватернионных представлений некоторых вещественных инволютивных алгебр, естественно возникающих при рассмотрении неэквивалентных инволюций градуированного аналога алгебры Ли $o(2,\,\mathbb{H})$, структура которой приведена в [1]. Аналогичная проблема в комплексных пространствах решалась в работе [2].

1. Градуированный аналог алгебры Ли $o(2,\mathbb{H})$

Пусть $\mathbb{H}$ — вещественная алгебра кватернионов с базисными единицами $1, i, j, k$, где наряду с общепринятой для кватерниона $q = q_0+q_1i+q_2j+q_3k$ операцией сопряжения $\bar{q} = q_0-q_1i-q_2j-q_3k$ рассматривается операция сопряжения $q^t = q_0+q_1i-q_2j+q_3k$.

Пусть $gl(n,\mathbb{H})$ — вещественная алгебра матриц над $\mathbb{H}$, в которой также можно задать две операции сопряжения: для произвольной матрицы $A = \|q^{pr}\| \in gl(n,\mathbb{H})$ полагаем $A^* := \|\overline{q^{rp}}\|$ и $A^t := \|(q^{rp})^t\|$. Скобочное умножение матриц $[A,B] = AB - BA$ замкнуто относительно таких операций, поэтому для них можно рассматривать аналоги классических алгебр Ли в $gl(n,\,\mathbb{C})$.

Алгебра $o(n,\mathbb{H}) = \{A \epsilon\ gl(n,\mathbb{H})|\ A + A^t = 0\}$ называется *ортогональной* алгеброй Ли.

Определение 1. $\mathbb{Z}_2^n$ - *градуированной алгеброй Ли* называется $\mathbb{Z}_2^n$ - градуированное линейное пространство

$$L = \oplus_{s\epsilon\mathbb{Z}_2^n} L_s, \quad \mathbb{Z}_2^n = \{0,1\}^n,$$

в котором определена билинейная операция $< \cdot,\cdot >$ такая, что для любых $a \ \epsilon\ L_{s_1}, b\ \epsilon\ L_{s_2}$ выполняются соотношения:

$$< a,b >= c\ \epsilon\ L_{s_3}, \quad \mathrm{grad}c = \mathrm{grad}a \cdot \mathrm{grad}b,$$

$$< a,b >= -(-1)^{\sum\limits_r g_r(a)\cdot g_r(b)} < b,a > .$$

Здесь $\mathrm{grad}u = (g_1(u),\ldots,g_n(u))$ — градуировка элемента u, а операция $g_r(a)\cdot g_r(b)$ выполняется по соответствующим правилам поля $\mathbb{Z}_2$. Причем для определенной таким образом операции умножения выполняется тождество Якоби.

Далее будем использовать следующие обозначения для операции $< \cdot,\cdot >$:

$$\{a,b\} - \text{антикоммутатор, если} < a,b >=< b,a >,$$

$$[a,b] - \text{коммутатор, если} < a,b >= - < b,a > .$$

Рассмотрим $\mathbb{Z}_2^3$ - градуированную алгебру Ли $L = L_{(1,1,0)} \oplus L_{(1,0,1)} \oplus L_{(0,1,1)}$ с базисом $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$, где

$$L_{(1,1,0)} = (\mathbb{R}) < b_1, c_1 >,\ L_{(1,0,1)} = (\mathbb{R}) < b_2, c_2 >,\ L_{(0,1,1)} = (\mathbb{R}) < b_3, c_3 > .$$

Тогда, используя определение градуированной алгебры Ли, получим соотношения:

$$[b_v, b_v] = 0,\ [c_v, c_v] = 0,\ [b_v, c_v] = 0,\ v = \overline{1,3},$$

$$\{b_p, b_r\} = \alpha_{pr} b_s + \beta_{pr} c_s,\ \{c_p, c_r\} = \varepsilon_{pr} b_s + \delta_{pr} c_s,\ \{b_p, c_r\} = \xi_{pr} b_s + \eta_{pr} c_s,$$

где $\{p,r,s\}\ \epsilon\ P_3$. Рассмотрим алгебру L при условии, что

$$\begin{array}{lll} \{b_1,b_2\} = b_3, & \{b_2,b_3\} = b_1, & \{b_3,b_1\} = b_2, \\ \{c_1,c_2\} = c_3, & \{c_2,c_3\} = c_1, & \{c_1,c_3\} = c_2, \\ \{b_p,c_r\} = 0, & (p,r = \overline{1,3}\ p \neq r). & \end{array} \tag{1}$$

Сравнивая $\mathbb{Z}_2^3$ - градуированную алгебру Ли L и алгебру Ли $o(2,\mathbb{H})$, легко видеть, что если в соотношениях (1) антикоммутаторы заменить коммутаторами, то L превратится в $o(2,\mathbb{H})$. Поэтому градуированную алгебру L назовем градуированным аналогом алгебры Ли $o(2,\mathbb{H})$.

Как показано в [4], в L существует семь неэквивалентных инволюций J_p $(p = \overline{1,7})$:

$$
\begin{array}{llllll}
1) & b_p^* = b_p, & c_p^* = c_p, & p = \overline{1,3}; & & \\
2) & b_1^* = b_1, & b_2^* = b_2, & b_3^* = b_3, & c_1^* = c_1, & c_2^* = -c_2, \quad c_3^* = -c_3; \\
3) & b_1^* = b_1, & b_2^* = b_2, & b_3^* = b_3, & c_1^* = c_1, & c_2^* = c_3; \\
4) & b_1^* = b_1, & b_2^* = -b_2, & b_3^* = -b_3, & c_1^* = c_1, & c_2^* = -c_2, \quad c_3^* = -c_3; \\
5) & b_1^* = b_1, & b_2^* = -b_2, & b_3^* = -b_3, & c_1^* = c_1, & c_2^* = c_3; \\
6) & b_1^* = b_1, & b_2^* = b_3, & c_1^* = c_1, & c_2^* = c_3; & \\
7) & b_1^* = c_1, & b_2^* = c_2, & b_3^* = c_3. & &
\end{array}
$$

Рассмотрим алгебру L вложенной в ее универсальную обертывающую алгебру *U(L)* — ассоциативную алгебру с образующими $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ и соотношениями:

$$
\begin{array}{lll}
b_1b_2 + b_2b_1 = b_3, & b_2b_3 + b_3b_2 = b_1, & b_3b_1 + b_1b_3 = b_2, \\
c_1c_2 + c_2c_1 = c_3, & c_2c_3 + c_3c_2 = c_1, & c_1c_3 + c_3c_1 = c_2, \\
b_pc_r + c_rb_p = 0, & b_rc_r - c_rb_r = 0, & (p, r = \overline{1,3}, p \neq r).
\end{array}
$$

Алгебру *U(L)* с инволюцией J_p будем обозначать $A_p, (p = \overline{1,7})$. В дальнейшем будем рассматривать отдельно алгебры $A_p, (p = \overline{1,6})$, и алгебру A_7.

2. Общие свойства конечномерных представлений инволютивных алгебр $A_p, (p = \overline{1,6})$.

В алгебрах $A_p, (p = \overline{1,6})$, перейдем к новому базису с помощью следующего невырожденного преобразования:

$$
\begin{array}{lll}
E_0 = b_1, & E_1 = b_2 + b_3, & E_2 = b_2 - b_3, \\
G_0 = c_1, & G_1 = c_2 + c_3, & G_2 = c_2 - c_3.
\end{array}
$$

При этом для новых образующих $E_r, G_s (r, s = \overline{1,3})$,выполняются следущие соотношения:

$$
\begin{array}{ccc}
\{E_0, E_1\} = E_1, & \{E_0, E_2\} = -E_2, & E_1^2 - E_2^2 = 2E_0, \\
\{G_0, G_1\} = G_1, & \{G_0, G_2\} = -G_2, & G_1^2 - G_2^2 = 2G_0, \\
\{E_0, G_1\} = 0, & \{E_0, G_2\} = 0, & [E_0, G_0] = 0, \\
\{G_0, E_1\} = 0, & \{G_0, E_2\} = 0, & E_1G_1 = G_2E_2, \\
G_1E_2 = E_1G_2, & G_1E_1 = E_2G_2, & E_2G_1 = G_2E_1,
\end{array}
\tag{2}
$$

где $\{E_r, G_s\} = E_rG_s + G_sE_r,\ [E_rG_s] = E_rG_s - G_sE_r$. Инволюции, соответственно, примут вид:

$$
\begin{array}{llllll}
A_1: & E_r^* = E_r, & r \in \{0,1,2\}, & G_r^* = G_r, & r \in \{0,1,2\}; & \\
A_2: & E_r^* = E_r, & r \in \{0,1,2\}, & G_0^* = G_0, & G_1^* = -G_1, & G_2^* = -G_2; \\
A_3: & E_r^* = E_r, & r \in \{0,1,2\}, & G_0^* = G_0, & G_1^* = G_1, & G_2^* = -G_2; \\
A_4: & E_0^* = E_0, & E_1^* = -E_1, & E_2^* = -E_2, & G_0^* = G_0, & G_1^* = -G_1, \quad G_2^* = -G_2; \\
A_5: & E_0^* = E_0, & E_1^* = -E_1, & E_2^* = -E_2, & G_0^* = G_0, & G_1^* = G_1, \quad G_2^* = -G_2; \\
A_6: & E_0^* = E_0, & E_1^* = E_1, & E_2^* = -E_2, & G_0^* = G_0, & G_1^* = G_1, \quad G_2^* = -G_2;
\end{array}
$$

Изучим неприводимые $*-$ представления алгебр $A_p, (p = \overline{1,6})$. Для этого дадим описание неприводимых шестерок линейных операторов, действующих в конечномерном гильбертовом кватернионом бимодуле H, и удовлетворяющих соотношениям (2).

Пусть $H_\lambda = \ker(E_0 - R_\lambda), H^\mu = \ker(G_0 - R_\mu)$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Обозначим $H(\lambda,\mu) = H_\lambda \cap H^\mu$, и назовем совместным собственным подпространством самосопряженных операторов E_0 и G_0, принадлежащим точке их совместного спектра (λ, μ).

Лемма 1. *(a) Если $e \in H_\lambda$, то $E_1 e \in H_{1-\lambda}$, $E_2 e \in H_{-1-\lambda}$, $G_0 e \in H_\lambda$, $G_1 e \in H_{-\lambda}$, $G_2 e \in H_{-\lambda}$.*

(b) Если $f \in H^\mu$, то $G_1 f \in H^{1-\mu}$, $G_2 f \in H^{-1-\mu}$, $E_0 f \in H^\mu$, $E_1 f \in H^{-\mu}$, $E_2 f \in H^{-\mu}$.

Доказательство. Утврeждение леммы непосредственно следует из соотношений в алгебрах $A_p, (p = \overline{1,6})$.

Лемма 2. *В неприводимом представлении алгебр $A_p, (p = \overline{1,6}) \dim H(\lambda,\mu) \leqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $H(\lambda,\mu) \neq \{0\}$. Из соотношений (2) и леммы 1 следует, что операторы $E_0, E_1^2, E_2^2, G_0, G_1^2, G_2^2$ образуют коммутативное семейство, переводящее $H(\lambda,\mu)$ в себя. Допустим, что $\dim H(\lambda,\mu) > 1$. Тогда в $H(\lambda,\mu)$ существует нетривиальное подпространство $H_1(\lambda,\mu)$, инвариантное относительно данного семейства. Обозначим через H' подпространство, полученное из $H_1(\lambda,\mu)$ действием на него полугруппы , порожденной операторами E_1, E_2, G_1, G_2. Очевидно, что H' инвариантно относительно представления и не совпадает с H.□

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — общий собственный ортонормированный базис коммутирующих самосопряженных операторов E_0 и G_0, соответствующий собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ оператора E_0 и собственным значениям $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ оператора G_0. Тогда на основании леммы 2 имеет место разложение

$$H = H(\lambda_1,\mu_1) + H(\lambda_2,\mu_2) + \ldots + H(\lambda_n,\mu_n), \tag{3}$$

где $(\lambda_r,\mu_r) \neq (\lambda_s,\mu_s), r \neq s, r, s = \overline{1,n}$; и $\dim H(\lambda_p,\mu_p) = 1, p = \overline{1,n}$.

Рассмотрим группу G образующими g_1, g_2, g_3, g_4, которые удовлетворят соотношениям $g_s^2 = e, (s = \overline{1,4})$, где e — единичный элемент группы, $g_1 g_3 = g_4 g_2$, $g_3 g_1 = g_2 g_4$. Определим действие этой группы на множестве $\mathbb{R}^2$ равенствами: $F_1(\lambda,\mu) = F_{g_1}(\lambda,\mu) = (1-\lambda, -\mu)$; $F_2(\lambda,\mu) = F_{g_2}(\lambda,\mu) = (-1-\lambda, -\mu)$;

$F_3(\lambda,\mu) = F_{g_3}(\lambda,\mu) = (-\lambda, 1-\mu)$; $F_4(\lambda,\mu) = F_{g_4}(\lambda,\mu) = (-\lambda,-1-\mu)$. Обозначим через $O(\lambda_0^0,\mu_0^0)$ орбиту точки (λ_0^0,μ_0^0). Если точка $(\lambda_k^s,\mu_k^s) \epsilon O(\lambda_0^0,\mu_0^0)$, то $\lambda_k^s = (-1)^{s+k}(\lambda_0^0 - k), \mu_k^s = (-1)^{s+k}(\mu_0^0 - s)$. В нашем случае орбита O полностью определяется точкой $(\lambda_0^0,\mu_0^0) \epsilon (0,\frac{1}{2}] \times (0,\frac{1}{2}] \bigcup 0 \times [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \bigcup [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \times 0$.

Лемма 3. *В неприводимом представлении алгебр $A_p, (p = \overline{1,6})$ совместный спектр операторов E_0 и G_0 лежит на некоторой орбите динамической системы, порожденной функциями F_1, F_2, F_3, F_4.*

Доказательство. Действительно, пусть $e\binom{\mu}{\lambda} \epsilon H(\lambda,\mu)$. Тогда на основании леммы 1 $E_1 e\binom{\mu}{\lambda} \in H(1-\lambda,-\mu), E_2 e\binom{\mu}{\lambda} \in H(-1-\lambda,-\mu), G_1 e\binom{\mu}{\lambda} \in H(-\lambda,1-\mu)$, $G_2 e\binom{\mu}{\lambda} \in H(-\lambda,-1-\mu)$. Следовательно, $\dot{+}_{(\lambda_k^s,\mu_k^s)\in O(\lambda_0^0,\mu_0^0)} H(\lambda_k^s,\mu_k^s)$ есть инвариантное подпространство относительно представления. Поэтому

$$H = \dot{+}_{(\lambda_k^s,\mu_k^s)\ \in\ O(\lambda_0^0,\mu_0^0)} H(\lambda_k^s,\mu_k^s).$$

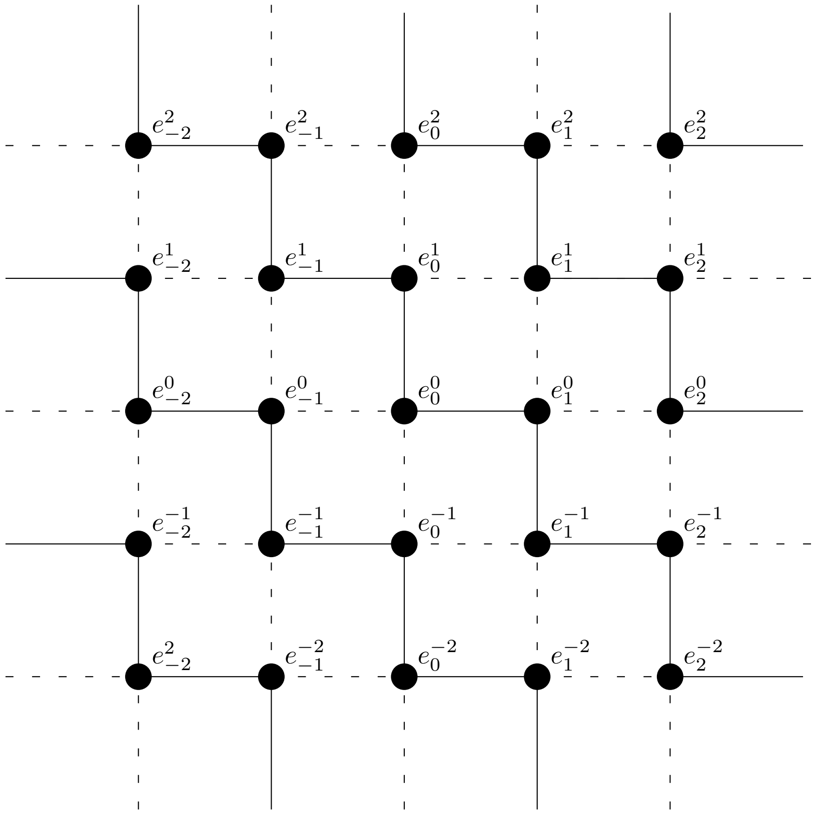
Непосредственно из приведенного выше доказательства следует утверждение.

Лемма 4. Пусть совместный спектр операторов E_0 и G_0 лежит на некоторой орбите $\mathrm{O}(\lambda_0^0,\mu_0^0)$. Тогда для любого $s \in \mathbb{Z}$ подпространство $\dot{+}_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{O}_1(\lambda_0^s,\mu_0^s)} \mathrm{H}(\lambda,\mu)$ инвариантно относительно операторов E_0, E_1, E_2, а подпространство $\dot{+}_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{O}_2(\lambda_k^0,\mu_k^0)} \mathrm{H}(\lambda,\mu), (\forall k \in \mathbb{Z})$ инвариантно относительно операторов G_0, G_1, G_2.

Следующий граф представляет действие операторов E_1, E_2, G_1, G_2 на совместные собственные подпространства $H(\lambda,\mu), (\lambda,\mu) \in O(\lambda_0^0,\mu_0^0)$. Здесь вершинами графа являются совместные собственные векторы операторов $E_0, G_0 \ :\ e_k^s \in H(\lambda_k^s,\mu_k^s)$. Горизонтальные сплошные ребра соответствуют действию оператора E_1, горизонтальные пунктирные — E_2, вертикальные сплошные — G_1, вертикальные пунктирные — G_2.

Легко показать, что граф, соответствующий собственному базису операторов E_0, G_0 и действию операторов E_1, E_2, G_1, G_2, в неприводимом представлении является связным плоским решетчатым графом, содержащим все вертикальные и горизонтальные ребра и все вершины.

Выпишем теперь условия, определяющие параметры данного графа. Так как размерность пространства представления H конечна, то существуют $e_l^0 \in H(\lambda_l^0,\mu_l^0), e_m^0 \in H(\lambda_m^0,\mu_m^0)$, причем $l \leqslant m$, такие, что выполняется одно из следующих условий, определяющих «ширину» графа:



$$1a\begin{cases} E_1(e_l^0)=0\\ E_1(e_m^0)=0.\end{cases}\quad 2a\begin{cases} E_2(e_l^0)=0\\ E_2(e_m^0)=0.\end{cases}\quad 3a\begin{cases} E_1(e_l^0)=0\\ E_2(e_m^0)=0.\end{cases}\quad 4a\begin{cases} E_2(e_l^0)=0\\ E_1(e_m^0)=0.\end{cases}$$

Аналогичные рассуждения позволяют утверждать, что существуют $e_0^s \in H(\lambda_0^s,\mu_0^s), e_0^t \in H(\lambda_0^t,\mu_0^t)$, причем $s \leqslant t$, такие, что выполняется одно из следующих условий, определяющих «высоту» графа:

$$1b\begin{cases} G_1(e_0^s)=0\\ G_1(e_0^t)=0.\end{cases}\quad 2b\begin{cases} G_2(e_0^s)=0\\ G_2(e_0^t)=0.\end{cases}\quad 3b\begin{cases} G_1(e_0^s)=0\\ G_2(e_0^t)=0.\end{cases}\quad 4b\begin{cases} G_2(e_0^s)=0\\ G_1(e_0^t)=0.\end{cases}$$

Пусть $e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right) \in H(\lambda,\mu)$ – собственный вектор операторов E_0, G_0. Тогда $E_1 e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right) = e\left(\begin{smallmatrix}-\mu\\ 1-\lambda\end{smallmatrix}\right) b_1(\lambda,\mu)$, $E_2 e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right) = e\left(\begin{smallmatrix}-\mu\\ -1-\lambda\end{smallmatrix}\right) b_2(\lambda,\mu)$, $G_1 e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right) = e\left(\begin{smallmatrix}1-\mu\\ -\lambda\end{smallmatrix}\right) c_1(\lambda,\mu)$, $G_2 e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right) = e\left(\begin{smallmatrix}-1-\mu\\ -\lambda\end{smallmatrix}\right) c_2(\lambda,\mu)$. При этом в силу самосопряженности (или кососамосопряженности) операторов E_p, G_p $(p=1,2)$ получим, соответственно, следующие соотношения:

$$\begin{gathered} b_1(\lambda,\mu)=\overline{b_1(1-\lambda,-\mu)},\ b_2(\lambda,\mu)=\overline{b_2(-1-\lambda,-\mu)},\\ c_1(\lambda,\mu)=\overline{c_1(-\lambda,1-\mu)},\ c_2(\lambda,\mu)=\overline{c_2(-\lambda,-1-\mu)},\\ \begin{pmatrix} b_1(\lambda,\mu)=\overline{-b_1(1-\lambda,-\mu)},\ b_2(\lambda,\mu)=\overline{-b_2(-1-\lambda,-\mu)},\\ c_1(\lambda,\mu)=\overline{-c_1(-\lambda,1-\mu)},\ c_2(\lambda,\mu)=\overline{-c_2(-\lambda,-1-\mu)}. \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{4}$$

и, соответственно,

$$\begin{gathered} E_p^2e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)|b_p(\lambda,\mu)|^2,\ G_p^2e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)|c_p(\lambda,\mu)|^2,\\ \left(E_p^2e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=-e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)|b_p(\lambda,\mu)|^2,\ G_p^2e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=-e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)|c_p(\lambda,\mu)|^2\right),\ p=1,2. \end{gathered} \tag{5}$$

Кроме того из равенств (2) получаются следующие соотношения для функций $b_s(\lambda,\mu)$, $c_s(\lambda,\mu)$.

Лемма 5. *С точностью до унитарной эквивалентности представления можно считать, что* $b_s(\lambda,\mu)\geqslant 0$, $c_s(\lambda,\mu)\geqslant 0$ *для самосопряженных операторов* E_s, G_s $(s=1,2)$ *и* $b_s(\lambda,\mu)=\widetilde{b}_s(\lambda,\mu)i$, *где* $\widetilde{b}_s(\lambda,\mu)\geqslant 0$, $c_s(\lambda,\mu)=\widetilde{c}_s(\lambda,\mu)i$, *где* $\widetilde{c}_s(\lambda,\mu)\geqslant 0$ *для кососамосопряженных операторов* E_s, G_s $(s=1,2)$.

Тогда на основании леммы 5 соотношения (4) для соответствующих самосопряженных (или кососамосопряженных) операторов примут вид:

$$\begin{gathered} b_1(\lambda,\mu)=b_1(1-\lambda,-\mu),b_2(\lambda,\mu)=b_2(-1-\lambda,-\mu),\\ c_1(\lambda,\mu)=c_1(-\lambda,1-\mu),c_2(\lambda,\mu)=c_2(-\lambda,-1-\mu),\\ \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1(\lambda,\mu)=\widetilde{b}_1(1-\lambda,-\mu),\widetilde{b}_2(\lambda,\mu)=\widetilde{b}_2(-1-\lambda,-\mu),\\ \widetilde{c}_1(\lambda,\mu)=\widetilde{c}_1(-\lambda,1-\mu),\widetilde{c}_2(\lambda,\mu)=\widetilde{c}_2(-\lambda,-1-\mu). \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{6}$$

Рассмотрим самосопряженные операторы $D_1=E_0^2+E_1^2-E_0=E_0^2+E_2^2+E_0$, $D_2=G_0^2+G_1^2-G_0=G_0^2+G_2^2+G_0$.

Очевидно, что операторы D_1, D_2 принадлежат центру алгебр A_p, $(p=\overline{1,6})$, и, следовательно, в неприводимом представлении они скалярные: $D_1=R_\alpha$, $D_2=R_\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

Тогда для неприводимого представления алгебр A_p $(p=\overline{1,6})$ получаем следующие соотношения:

$$A_1:\ \begin{aligned} e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)b_1^2(\lambda,\mu)&=E_1^2e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=(D_1-E_0^2+E_0)\,e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)(\alpha-\lambda^2+\lambda)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)\varphi_1(\lambda),\\ e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)b_2^2(\lambda,\mu)&=E_2^2e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=(D_1-E_0^2-E_0)\,e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)(\alpha-\lambda^2-\lambda)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)\varphi_2(\lambda),\\ e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)c_1^2(\lambda,\mu)&=G_1^2e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=(D_2-G_0^2+G_0)\,e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)(\beta-\mu^2+\mu)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)\psi_1(\mu),\\ e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)c_2^2(\lambda,\mu)&=G_2^2e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=(D_2-G_0^2-G_0)\,e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)(\beta-\mu^2-\mu)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)\psi_2(\mu). \end{aligned}$$

$$A_2:\ \begin{aligned} e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)b_1^2(\lambda,\mu)&=E_1^2e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=(D_1-E_0^2+E_0)\,e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)(\alpha-\lambda^2+\lambda)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)\varphi_1(\lambda),\\ e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)b_2^2(\lambda,\mu)&=E_2^2e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=(D_1-E_0^2-E_0)\,e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)(\alpha-\lambda^2-\lambda)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)\varphi_2(\lambda),\\ e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)\widetilde{c}_1^2(\lambda,\mu)&=-G_1^2e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=-\,(D_2-G_0^2+G_0)\,e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)(\mu^2-\mu-\beta)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)\psi_1(\mu),\\ e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)\widetilde{c}_2^2(\lambda,\mu)&=-G_2^2e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=-\,(D_2-G_0^2-G_0)\,e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)(\mu^2+\mu-\beta)=e\left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \lambda\end{smallmatrix}\right)\psi_2(\mu). \end{aligned}$$

$$A_3: \begin{array}{l} b_1^2(\lambda,\mu) = \alpha - \lambda^2 + \lambda = \varphi_1(\lambda), \\ b_2^2(\lambda,\mu) = \alpha - \lambda^2 - \lambda = \varphi_2(\lambda), \\ c_1^2(\lambda,\mu) = \beta - \mu^2 + \mu = \psi_1(\mu), \\ \tilde{c}_2^2(\lambda,\mu) = \mu^2 + \mu - \beta = \psi_2(\mu). \end{array}$$

$$A_4: \begin{array}{l} \tilde{b}_1^2(\lambda,\mu) = \lambda^2 - \lambda - \alpha = \varphi_1(\lambda), \\ \tilde{b}_2^2(\lambda,\mu) = \lambda^2 + \lambda - \alpha = \varphi_2(\lambda), \\ \tilde{c}_1^2(\lambda,\mu) = \mu^2 - \mu - \beta = \psi_1(\mu), \\ \tilde{c}_2^2(\lambda,\mu) = \mu^2 + \mu - \beta = \psi_2(\mu). \end{array}$$

$$A_5: \begin{array}{l} \tilde{b}_1^2(\lambda,\mu) = \lambda^2 - \lambda - \alpha = \varphi_1(\lambda), \\ \tilde{b}_2^2(\lambda,\mu) = \lambda^2 + \lambda - \alpha = \varphi_2(\lambda), \\ c_1^2(\lambda,\mu) = \beta - \mu^2 + \mu = \psi_1(\mu), \\ \tilde{c}_2^2(\lambda,\mu) = \mu^2 + \mu - \beta = \psi_2(\mu). \end{array}$$

$$A_6: \begin{array}{l} b_1^2(\lambda,\mu) = \alpha - \lambda^2 + \lambda = \varphi_1(\lambda), \\ \tilde{b}_2^2(\lambda,\mu) = \lambda^2 + \lambda - \alpha = \varphi_2(\lambda), \\ c_1^2(\lambda,\mu) = \beta - \mu^2 + \mu = \psi_1(\mu), \\ \tilde{c}_2^2(\lambda,\mu) = \mu^2 + \mu - \beta = \psi_2(\mu). \end{array}$$

Лемма 6. *Представления, соответствующие различным наборам* $(\lambda_0^0, \mu_0^0, \alpha, \beta)$, $(\lambda_0^0, \mu_0^0) \in (0, \frac{1}{2}] \times (0, \frac{1}{2}] \bigcup 0 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \bigcup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *не являются унитарно эквивалентными.*

Доказательство. Действительно, параметр (λ_0^0, μ_0^0) задает орбиту динамической системы, на которой расположен спектр операторов E_0, G_0, а параметры α и β – действие операторов D_1 и D_2 соответственно.

Замечание 1. Значению параметров $\lambda_0^0 = \frac{1}{2}$, $\mu_0^0 = 0$ ($\lambda_0^0 = -\frac{1}{2}$, $\mu_0^0 = 0$) соответствует случай, когда отображение $F_1(F_2)$ имеет неподвижную точку $\lambda_0^0 = \frac{1}{2}$ ($\lambda_0^0 = -\frac{1}{2}$). Следовательно $b_1(\frac{1}{2}, 0)$ $(b_2(-\frac{1}{2}, 0))$ определяется с точностью до знака, и наборам $(\pm\frac{1}{2}, 0, \alpha, \beta)$ может соответствовать два не унитарно эквивалентных представления.

Замечание 2. Значению параметров $\lambda_0^0 = 0$, $\mu_0^0 = \frac{1}{2}$ ($\lambda_0^0 = 0$, $\mu_0^0 = -\frac{1}{2}$) соответствует случай, когда отображение $F_3(F_4)$ имеет неподвижную точку $\mu_0^0 = \frac{1}{2}$ ($\mu_0^0 = -\frac{1}{2}$). Следовательно $c_1(0, \frac{1}{2})$ $(c_2(0, -\frac{1}{2}))$ определяется с точностью до знака, и наборам $(0, \pm\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$ может соответствовать два не унитарно эквивалентных представления.

Замечание 3. Если четверке $(\lambda_0^0, \mu_0^0, \alpha, \beta)$ соответствует неприводимое представление, то для любых $(\lambda, \mu) \in O(\lambda_0^0, \mu_0^0)$ выполняются неравенства $\varphi_p(\lambda) \geqslant 0$, $\psi_r(\mu) \geqslant 0$, $p, r \in \{1, 2\}$.

Доказательство. Действительно, $b_p(\lambda, \mu)$, $c_r(\lambda, \mu)$, $\tilde{b}_p(\lambda, \mu)$, $\tilde{c}_r(\lambda, \mu)$ вещественны, а это возможно только в условиях данного замечания.

Замечание 4. Если в неприводимом представлении алгебр $A_p(p=\overline{1,6})$:

1) $\lambda_0^0=\pm\frac{1}{2},\mu_0^0=0,$ то $G_0=G_1=G_2=0.$
2) $\lambda_0^0=0,\mu_0^0=\pm\frac{1}{2},$ то $E_0=E_1=E_2=0.$

3. Конечномерные представления алгебр $A_p,(p=\overline{1,6})$.

Анализ условий $1a-4a$, $1b-4b$, которые определяют «ширину» и «высоту» графа, соответствующего совместному собственному базису операторов E_0,G_0 и действию операторов E_1,E_2,G_1,G_2 алгебры $A_p,(p=\overline{1,6})$, приводит к следующим результатам.

Теорема 1. *Алгебра A_1 имеет неприводимые конечномерные представления любой размерности. В совместном собственном базисе самосопряженных операторов* E_0 и G_0 *они реализуются по формулам:*

$$\begin{array}{lll} E_0e_p^r=e_p^r\lambda_p^r\ , & E_1e_p^r=e^r_{p+(-1)^{p+r}}(\varphi_1(\lambda_p^r))^{\frac{1}{2}}\ , & E_2e_p^r=e^r_{p-(-1)^{p+r}}(\varphi_2(\lambda_p^r))^{\frac{1}{2}}\ , \\ G_0e_p^r=e_p^r\mu_p^r\ , & G_1e_p^r=e_p^{r+(-1)^{r+p}}(\psi_1(\mu_p^r))^{\frac{1}{2}}\ , & G_2e_p^r=e_p^{r-(-1)^{r+p}}(\psi_2(\mu_p^r))^{\frac{1}{2}}\ , \end{array}$$

где

$$\begin{array}{ll} \varphi_1(\lambda_p^r)=\alpha-(\lambda_p^r)^2+\lambda_p^r\ , & \varphi_2(\lambda_p^r)=\alpha-(\lambda_p^r)^2-\lambda_p^r\ , \\ \psi_1(\mu_p^r)=\beta-(\mu_p^r)^2+\mu_p^r\ , & \psi_2(\mu_p^r)=\beta-(\mu_p^r)^2-\mu_p^r\ , \end{array}$$

причем возможны случаи:

1) $\dim H=(2m)(2t),\ m,t\in\mathbb{N},\ \alpha=m^2-1/4,\ \beta=t^2-1/4,$
$\lambda_p^r=(-1)^{p+r}(1/2-p),\ \mu_p^r=(-1)^{p+r}(1/2-r),$
$p=\overline{-m+1,m},\ r=\overline{-t+1,t};$
2) $\dim H=(2m+1)(2t+1),\ m,t\in\mathbb{N}_0,\ \alpha=m^2+m,\ \beta=t^2+t,$
$\lambda_p^r=(-1)^{p+r+1}p,\ \mu_p^r=(-1)^{p+r+1}r,$
$r=\overline{-m,m},\ p=\overline{-t,t};$
3) $\dim H=m+1,\ m\in\mathbb{N}_0,\ \alpha=m^2+2m+3/4,$
$G_0=G_1=G_2=0,\ \lambda_p^0=(-1)^p(-1/2-p),\ p=\overline{0,m},$
при $p=0$ $E_2e_0^0=\pm e_0^0(\varphi_2(-\frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}};$
4) $\dim H=m,\ m\in\mathbb{N},\ \alpha=m^2-1/4,$
$G_0=G_1=G_2=0,\ \lambda_p^0=(-1)^p(1/2-p),\ p=\overline{1,m},$
при $p=1$ $E_1e_1^0=\pm e_1^0(\varphi_1(\frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}};$
5) $\dim H=t+1,\ t\in\mathbb{N}_0,\ \beta=t^2+2t+3/4,$
$E_0=E_1=E_2=0,\ \mu_0^r=(-1)^r(-1/2-r),\ r=\overline{0,t},$
при $r=0$ $G_2e_0^0=\pm e_0^0(\psi_2(-\frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}};$
6) $\dim H=t,\ t\in\mathbb{N},\ \beta=t^2-1/4,$
$E_0=E_1=E_2=0,\ \mu_0^r=(-1)^r(1/2-r),\ r=\overline{1,t},$
при $r=1$ $G_1e_0^1=\pm e_0^1(\psi_1(\frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}}.$

Теорема 2. *Алгебра A_2 имеет неприводимые представления любой размерности, при этом для любого неприводимого представления $G_0 = G_1 = G_2 = 0$. В собственном базисе самосопряженного оператора E_0 неприводимые представления реализуются по формулам:*

$$E_0 e_p^0 = e_p^0 \lambda_p^0,\ E_1 e_p^0 = e_{p+(-1)^p}^0 (\varphi_1(\lambda_p^0))^{\frac{1}{2}},\ E_2 e_p^0 = e_{p-(-1)^p}^0 (\varphi_2(\lambda_p^0))^{\frac{1}{2}},$$

где $\varphi_1(\lambda_p^0) = \alpha - (\lambda_p^0)^2 + \lambda_p^0,\ \varphi_2(\lambda_p^0) = \alpha - (\lambda_p^0)^2 - \lambda_p^0$, причем возможны случаи:

1) $\dim H = 2m+1,\ m \in \mathbb{N}_0,\ \alpha = m^2 + m,\ \lambda_p^0 = (-1)^{p+1} p,\ p = \overline{-m, m}$;
2) $\dim H = m+1,\ m \in \mathbb{N}_0,\ \alpha = m^2 + 2m + 3/4,\ \lambda_p^0 = (-1)^p(-1/2 - p)$, $p = \overline{0, m}$, *при* $p = 0$ $E_2 e_0^0 = \pm e_0^0 (\varphi_2(-\frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}}$;
3) $\dim H = m,\ m \in \mathbb{N},\ \alpha = m^2 - 1/4,\ \lambda_p^0 = (-1)^p(1/2 - p)$, $p = \overline{1, m}$, *при* $p = 1$ $E_1 e_1^0 = \pm e_1^0 (\varphi_1(\frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 3. *Алгебра A_3 имеет неприводимые представления любой размерности. Возможны следующие варианты:*

I. $G_0 = G_1 = G_2 = 0$, *в собственном базисе самосопряженного оператора E_0 неприводимые представления реализуются по формулам:*

$$E_0 e_p^0 = e_p^0 \lambda_p^0,\ E_1 e_p^0 = e_{p+(-1)^p}^0 (\varphi_1(\lambda_p^0))^{\frac{1}{2}},\ E_2 e_p^0 = e_{p-(-1)^p}^0 (\varphi_2(\lambda_p^0))^{\frac{1}{2}},$$

где $\varphi_1(\lambda_p^0) = \alpha - (\lambda_p^0)^2 + \lambda_p^0,\ \varphi_2(\lambda_p^0) = \alpha - (\lambda_p^0)^2 - \lambda_p^0$, причем возможны случаи:

I.1. $\dim H = 2m+1,\ m \in \mathbb{N}_0,\ \alpha = m^2 + m,\ \lambda_p^0 = (-1)^{p+1} p,\ p = \overline{-m, m}$;
I.2. $\dim H = m+1,\ m \in \mathbb{N}_0,\ \alpha = m^2 + 2m + 3/4,\ \lambda_p^0 = (-1)^p(-1/2 - p), p = \overline{0, m}$, *при* $p = 0$ $E_2 e_0^0 = \pm e_0^0 (\varphi_2(-\frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}}$;
I.3. $\dim H = m,\ m \in \mathbb{N},\ \alpha = m^2 - 1/4,\ \lambda_p^0 = (-1)^p(1/2 - p), p = \overline{1, m}$, *при* $p = 1$ $E_1 e_1^0 = \pm e_1^0 (\varphi_1(\frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}}$.

II. $E_0 = E_1 = E_2 = 0,\ G_0 = \frac{1}{2},\ G_1 = \pm 1,\ G_2 = 0$.

Теорема 4. *Алгебра A_4 имеет только тривиальное неприводимое представление.*

Теорема 5. *Неприводимые представления алгебры A_5 одномерны и имеют вид:*

1) $E_0 = E_1 = E_2 = G_0 = G_1 = G_2 = 0$.
2) $E_0 = E_1 = E_2 = 0,\ G_0 = \frac{1}{2}, G_1 = \pm 1, G_2 = 0$.

Теорема 6. *Неприводимые представления алгебры A_6 одномерны и имеют вид:*

1) $E_0 = E_1 = E_2 = G_0 = G_1 = G_2 = 0$.
2) $E_0 = E_1 = E_2 = 0,\ G_0 = \frac{1}{2}, G_1 = \pm 1, G_2 = 0$.
3) $E_0 = \frac{1}{2}, E_1 = \pm 1, E_2 = 0,\ G_0 = G_1 = G_2 = 0$.

4. Конечномерные представления алгебры A_7

Принципиальное отличие инволюции в алгебре A_7 от инволюций в алгебрах $A_p, (p = \overline{1, 6})$, приводит к необходимости строить ее неприводимые представления другим способом. В алгебре A_7 перейдем к новому базису с помощью следующего невырожденного преобразования:

$$E_0 = b_1 + c_1, \quad E_1 = b_2 + b_3, \quad E_2 = b_2 - b_3,$$
$$G_0 = b_1 - c_1, \quad G_1 = c_2 + c_3, \quad G_2 = c_2 - c_3.$$

Для образующих E_r, G_s $(r, s = \overline{1,3})$ алгебры A_7 можно получить следующие соотношения:

$$\begin{array}{ccc} \{E_0, E_1\} = E_1, & \{E_0, E_2\} = -E_2, & E_1^2 - E_2^2 = E_0 + G_0, \\ \{G_0, G_1\} = -G_1, & \{G_0, G_2\} = G_2, & G_1^2 - G_2^2 = E_0 - G_0, \\ \{E_0, G_1\} = G_1, & \{E_0, G_2\} = -G_2, & [E_0, G_0] = 0, \\ \{G_0, E_1\} = E_1, & \{G_0, E_2\} = -E_2, & E_1 G_1 = G_2 E_2, \\ G_1 E_2 = E_1 G_2. & & \end{array} \tag{7}$$

Инволюция на базисных элементах задается следующим образом: $E_0^* = E_0,\ E_1^* = G_1,\ E_2^* = G_2,\ G_0^* = -G_0$.

Пусть $H_\lambda = \ker(E_0 - R_\lambda),\ H^\mu = \ker(G_0 - R_\mu)$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда $H(\lambda, \mu) = H_\lambda \cap H^\mu$ является совместным собственным подпространством нормальных операторов E_0 и G_0, принадлежащим точке их совместного спектра (λ, μ).

Предложение 1. (a) Если $e \in H_\lambda$, то $E_1 e \in H_{1-\lambda},\ E_2 e \in H_{-1-\lambda}$, $G_0 e \in H_\lambda$, $G_1 e \in H_{1-\lambda}$, $G_2 e \in H_{-1-\lambda}$.

(b) Если $f \in H^\mu$, то $G_1 f \in H^{-1-\mu}$, $G_2 f \in H^{1-\mu}$, $E_0 f \in H^\mu$, $E_1 f \in H^{1-\mu}$, $E_2 f \in H^{-1-\mu}$.

(c) Если представление алгебры A_7 неприводимо, то имеет место неравенство $\dim H(\lambda, \mu) \leqslant 1$.

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству лемм 1, 2.

Теорема 7. *Всякое неприводимое представление алгебры A_7 тривиально.*

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – общий собственный ортонормированный базис коммутирующих нормальных операторов E_0 и G_0, соответствующий собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ оператора E_0 и собственным значениям $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ оператора G_0. Тогда имеет место разложение

$$H = H(\lambda_1, \mu_1) \dotplus H(\lambda_2, \mu_2) \dotplus \ldots \dotplus H(\lambda_n, \mu_n), \tag{8}$$

где $(\lambda_r, \mu_r) \neq (\lambda_s, \mu_s)$ при $r \neq s,\ r, s = \overline{1, n}$; и $\dim H(\lambda_p, \mu_p) = 1,\ p = \overline{1, n}$.

Пусть $e\binom{\mu}{\lambda} \in H(\lambda, \mu)$ – собственный вектор операторов E_0, G_0. Тогда $E_1 e\binom{\mu}{\lambda} = e\binom{1-\mu}{1-\lambda} b_1(\lambda, \mu)$, $E_2 e\binom{\mu}{\lambda} = e\binom{-1-\mu}{-1-\lambda} b_2(\lambda, \mu)$, $G_1 e\binom{\mu}{\lambda} = e\binom{-1-\mu}{1-\lambda} c_1(\lambda, \mu)$, $G_2 e\binom{\mu}{\lambda} = e\binom{1-\mu}{-1-\lambda} c_2(\lambda, \mu)$. Из равенства $\langle E_1 e\binom{\mu}{\lambda}, e\binom{1-\mu}{1-\lambda}\rangle = \langle e\binom{\mu}{\lambda}, E_1^* e\binom{1-\mu}{1-\lambda}\rangle = \langle e\binom{\mu}{\lambda}, G_1 e\binom{1-\mu}{1-\lambda}\rangle$ следует, что

$\langle e\binom{1-\mu}{1-\lambda}, e\binom{1-\mu}{1-\lambda}\rangle b_1(\lambda,\mu) = \overline{c(1-\lambda,1-\mu)}\langle e\binom{\mu}{\lambda}, e\binom{-2+\mu}{\lambda}\rangle$. Поскольку базис был выбран ортонормированным, можно сделать вывод, что $b_1(\lambda,\mu)=0$. Следовательно, $E_1=0$ и $G_1=E_1^*=0$. Аналогично можно показать, что $E_2=G_2=0$. Тогда с учетом соотношений (7) получаем, что $E_0=G_0=0$.

Заключение

Таким образом, используя технику работы в вещественных алгебрах матриц над телом кватернионов, в статье получено полное описание неприводимых конечномерных представлений над гильбертовыми кватернионными бимодулями вещественных инволютивных алгебр A_p, $(p=\overline{1,7})$, являющихся градуированным аналогом алгебры Ли $o(2,\mathbb{H})$.

Список литературы

1. *S. De Leo.* Hypercomplex Group Theory // arXiv:physics/9703033 v1 31 Mar.1997. – P.1-18.
2. *Островский В.Л., Сильвестров С.Д.* Представления вещественных форм градуированного аналога алгебры Ли // Укр. мат. журнал. — 1992, т.44, №11 — С.1518-1524.
3. *Ostrovskyi V.L., Samoilenko Y.S.* Introduction to the Theory of representation of finited presented *-algebras. I. Representations by bounded operators // Rev.Math.Math.Phys. —1999. – 11. –P.1-261.
4. *Омельченко П.В.* Инволюция градуированного аналога алгебры Ли $o(2,\mathbb{H})$// Таврическая научная конференция студентов и молодых специалистов по информатике и математике, 20-21 Апр.2005, вып II. – С.82-85.