УДК 519.962.22

МІНІМАКСНІ ЗАДАЧІ СПОСТЕРЕЖЕННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДЕСКРИПТОРНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

С. М. Жук

Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка,
факультет кібернетики
пр-т академіка Глушкова-2, корпус 6, м.Київ 03680, Україна
e-mail: *beetle@unicyb.kiev.ua*

Abstract

The sufficient condition for existence of linear function's $\sum_{k=0}^{N+1}(l_k|x_k)_{R^n}$ minimax estimations is obtained on the basis of observations $\mathrm{y}_k = H_k x_k + \eta_k$ up to N moment assuming that $l_k \in \mathbb{R}^n,\ x_k$ is a solution of the linear descriptor difference equation $F_{k+1}x_{k+1} - C_k x_k = f_k$, $F_0\mathrm{x}_0 = \mathrm{g}_0$, $k = \overline{0, N}$, g_0, f_k — are some unknown vectors from the set G, η_k — is random vector with unknown correlation matrix R_k which belongs to set G_2. It is shown that in case of quadric sets G, G_2 the unique minimax estimation exists and can be represented in terms of solutions of some linear descriptor equations systems.

Вступ та постановка задачі

Проблемам розв'язності, керованості та спостережуваності лінійних дескрипторних рівнянь з неперервним та дискретним часом, а також задачам спостереження та керування для систем, що описуються такими рівняннями, присвячено дослідження науковців з різних країн світу. Так, зокрема, питання існування розв'язків задачі Коші для лінійного стаціонарного дескрипторного рівняння вивчалася у монографії [1], задачам лінійно-квадратичного керування для дискретних дескрипторних систем у гільбертовому просторі присвячено публікацію [2], питания керованості, спостережуваності для регулярних дескрипторних систем розглянуто у [3], деякі аспекти теорії оцінювання параметрів для регулярних дескрипторних систем описано у [4].

У цій роботі викладено низку нових результатів у галузі теорії мінімаксного оцінювання [5, 6] лінійних функцій від розв'язків лінійних дескрипторних різницевих рівнянь, які є продовженням дослідження, розпочатого у [7]. Вивчення споріднених задач мінімаксного апріорного та апостеріорного спостереження для лінійних алгебраїчних рівнянь з прямокутними матрицями проведено у [8, 9]. Нижче буде наведено узагальнені постановка задачі мінімаксного спостереження [6], поняття мінімаксних середньоквадратичних оцінки та похибки [6, 7].

Припустимо, що для кожного натурального індексу $k \in [0,\ N]$ вектор $x_k \in \mathbb{R}^n$ задовольняє лінійне різницеве рівняння вигляду

$$F_{k+1}x_{k+1} - C_k x_k = f_k,\ F_0\mathrm{x}_0 = \mathrm{g}_0, \tag{1}$$

де F_k, C_k — $m \times n$-матриці, $f_k \in \mathbb{R}^m, \mathrm{g}_0 \in \mathbb{R}^m$ — початкова умова.

Будемо вважати, що конкретна реалізація вектору f_k та початкова умова g_0 заздалегідь невідомі. В умовах відсутності точної інформації вектор f_k можна інтерпретувати [5] як невизначене збурення системи (1), початковий стан якої g_0 може бути довільним елементом деякої множини. Припустимо, що сукупність усіх можливих реалізацій збурень f_k та множина допустимих початкових станів g_0 системи (1) задаються за допомогою включення $\mathrm{f} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathrm{g}_0, \mathrm{f}_0, ..., \mathrm{f}_N] \in \mathrm{G}$, де G — обмежена підмножина евклідового простору $\mathbb{E}^m_{N+2} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^m \overbrace{\times ... \times}^{N+2} \mathbb{R}^m$. Кожній можливій реалізації f в силу системи (1) можна зіставити множину (випадок порожньої множини не виключено) X_f розв'язків (1), яка складається з усіх таких векторів $\mathrm{x} = [\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_{N+1}]$, компоненти x_k та x_{k+1} яких для довільного $k \in [0,\ N]$ пов'язані співвідношеннями (1). Покладемо $\mathrm{G}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathrm{f} \in \mathrm{G} : \mathrm{X}_f \neq \varnothing\}$. Символом $\mathcal{D}^{-1}(\mathrm{G})$ позначимо сукупність усіх векторів x таких, що $x \in \mathrm{X}_f$ для деякого $f \in G_1$.

Припустимо, що для кожного $k \in [0,\ N]$ при деякому $\mathrm{x} \in \mathrm{X}_f$ спостерігається реалізація вектора $\mathrm{y}_k \in \mathbb{R}^l$ вигляду

$$\mathrm{y}_k = H_k x_k + \eta_k, \tag{2}$$

де H_k — $l \times n$-матриця, $\eta_k \in \mathbb{R}^l$ — реалізація випадкового вектора, $M\eta_k = 0,\ x_k$ — k-та компонента вектора $\mathrm{x} \in \mathrm{X}_f$ для деякого $\mathrm{f} \in \mathrm{G}_1$.

Будемо вважати, що реальний вигляд матриці $R_{k,s} = \mathrm{M}\eta_k\eta_s$ невідомий, натомість у вигляді деякої обмеженої підмножини G_2 евклідового простору $\mathbb{R}^{l*l*N}$ задано сукупність усіх можливих реалізацій $R = \{R_{k,s}\}_1^N$.

Припустимо, що у (1) реалізувався вектор $\mathrm{f} \in G_1$ нехай у (2) спостерігається деяка реалізація випадкового вектору η, причому $R = M\eta\eta' \in G_2$. Поставимо собі за мету наблизити значення лінійної функції

$$\ell(\mathrm{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{N+1} (l_k | x_k)_{R^n},\ l_k \in \mathbb{R}^n$$

на множині X_f за допомогою значень афінної функції

$$\mathrm{u}_c(\mathrm{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{N} (\mathrm{u}_k | \mathrm{y}_k)_{R^l} + c,\ \mathrm{u}_k \in \mathbb{R}^l,\ c \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Функцію u_c вигляду (3) будемо називати оцінкою. Введемо поняття мінімаксних середньоквадратичних оцінки та похибки оцінювання.

Означення 1. Оцінку $\hat{\mathrm{u}}_{\hat{c}}(\mathrm{y})$ назвемо мінімаксною середньоквадратичною оцінкою, якщо для всіх оцінок $\mathrm{u}_c(\mathrm{y})$ має місце співвідношення

$$\sup_{x \in \mathcal{D}^{-1}(\mathrm{G}), R_\eta \in \mathrm{G}_2} \mathrm{M}[\ell(\mathrm{x}) - \hat{\mathrm{u}}_{\hat{c}}(\mathrm{y})]^2 \leqslant \sup_{x \in \mathcal{D}^{-1}(\mathrm{G}), R_\eta \in \mathrm{G}_2} \mathrm{M}[\ell(\mathrm{x}) - \mathrm{u}_c(\mathrm{y})]^2. \tag{4}$$

Вираз $\sigma(\hat{u},\hat{c}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in\mathcal{D}^{-1}(\mathrm{G}),R_\eta\in \mathrm{G}_2} \mathrm{M}[\ell(\mathrm{x})-\hat{\mathrm{u}}_{\hat{c}}(\mathrm{y})]^2$ назвемо мінімаксною середньоквадратичною похибкою оцінювання.

Будемо шукати мінімаксну середньоквадратичну оцінку виразу $\ell(\mathrm{x})$ за допомогою операторного підходу. Для цього введемо евклідовий простір $\mathbb{E}^n_{N+2}$ помітимо, що у $\mathbb{E}^n_{N+2}$ система (1) запишеться у вигляді лінійного операторного рівняння[1]

$$\mathcal{D}\mathrm{x} = \mathrm{f}, \tag{5}$$

де оператор $\mathrm{x} \mapsto \mathcal{D}\mathrm{x}$ діє з евклідового простору $\mathbb{E}^n_{N+2}$ у евклідовий простір $\mathbb{E}^m_{N+2}$ і у парі базисів $\mathbb{E}^n_{N+2}$, $\mathbb{E}^m_{N+2}$ визначається матрицею

$$\begin{matrix} F_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -C_0 & F_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -C_1 & F_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -C_N & F_{N+1} \end{matrix} \tag{6}$$

Подамо (2) у вигляді лінійного операторного рівняння

$$\mathrm{y} = \mathcal{H}\mathrm{x} + \eta, \tag{7}$$

де оператор $\mathrm{x} \mapsto \mathcal{H}\mathrm{x}$ діє з евклідового простору $\mathbb{E}^n_{N+2}$ у евклідовий простір $\mathbb{E}^l_{N+1}$ і у парі базисів цих просторів визначається матрицею

$$\begin{matrix} H_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_N & 0 \end{matrix} \tag{8}$$

Мінімаксні середньоквадратичні оцінки для випадку загальних обмежень

Сформулюємо необхідні та достатні умови скінченності мінімаксної похибки.

Теорема 1. Припустимо, що G, G_2 — опуклі компактні підмножини відповідних евклідових просторів. Тоді

$$\sigma(\mathrm{u},c) = \begin{cases} (\frac{1}{2}[s(z|\mathrm{G}_1)+s(-z|\mathrm{G}_1)]+|\beta_z-c|)^2+\gamma^2(\mathrm{u}), & (\ell,\mathrm{u})\in L\times U_l, \\ +\infty, & (\ell,\mathrm{u})\notin L\times U_l, \end{cases} \tag{9}$$

[1]Тепер зрозуміло зміст символу $\mathcal{D}^{-1}(\mathrm{G})$ — це повний прообраз G при операторі $\mathcal{D}$.

де $\beta_z \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}[s(z|\mathrm{G}_1) - s(-z|\mathrm{G}_1)]$, $\gamma^2(\mathrm{u}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{R_\eta \in \mathrm{G}_2}(R\mathrm{u}|\mathrm{u})_{E^l}$, а L, U_l мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} L &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\ell : \exists \mathrm{u}, \mathrm{z}\ \ell - \mathcal{H}^*\mathrm{u} = \mathcal{D}^*\mathrm{z}\}, \\ U_l &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\mathrm{u} : \ell - \mathcal{H}^*\mathrm{u} \in \mathrm{Im}(\mathcal{D}^*)\} \end{aligned} \tag{10}$$

Доведення. Беручи до уваги (5), (7), легко одержати, що

$$(\ell|\mathrm{x})_{E^n} - (\mathrm{u}|\mathrm{y})_{E^l_{N+1}} - c = (\ell - \mathcal{H}^*\mathrm{u}|\mathrm{x})_{E^n} - (\mathrm{u}|\eta)_{E^l} - c := \alpha. \tag{11}$$

Враховуючи відоме співвідношення $\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2$ між дисперсією $\mathrm{D}\xi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{M}[\xi - \mathrm{M}\xi]^2$ випадкової величини ξ та її середнім $\mathrm{M}\xi$, а також той факт, що $\mathrm{M}\eta_k = 0$, одержимо:

$$\mathrm{M}[\ell(\mathrm{x}) - \mathrm{u}_c(\mathrm{y})]^2 = (\mathrm{M}\alpha)^2 + \mathrm{D}\alpha = [(\ell - \mathcal{H}\mathrm{u}|\mathrm{x})_{E^n} - c]^2 + \mathrm{M}(\mathrm{u}|\eta)^2_{E^l}.$$

Беручи до уваги властивості математичного сподівання, легко одержати, що

$$\mathrm{M}(\mathrm{u}|\eta)^2_{E^l} = \sum_{k,s}(R_{k,s}\mathrm{u}_k|\mathrm{u}_s)_{R^l} = (R\mathrm{u}|\mathrm{u})_{E^l}$$

тому

$$\sigma(u, c) = \sup_{x \in \mathcal{D}^{-1}(\mathrm{G})}[(\ell - \mathcal{H}\mathrm{u}|\mathrm{x})_{E^n} - c]^2 + \gamma^2(\mathrm{u})$$

Очевидно, $0 \leqslant \gamma^2(\mathrm{u}) < +\infty$ і γ^2 — опукла напівнеперервна знизу функція.

Легко збагнути, що образ множини $X \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{D}^{-1}(\mathrm{G})$ при відображенні $\mathrm{x} \mapsto |(\ell - \mathcal{H}\mathrm{u}|\mathrm{x})_{\mathrm{E}^n} - \mathrm{c}|$ обмеженою підмножиною розширеної дійсної прямої одночасно з образом X при відображенні $\mathrm{x} \mapsto |(\ell - \mathcal{H}\mathrm{u}|\mathrm{x})_{\mathrm{E}^n}|$. Останній, в свою чергу, обмежений лише тоді, коли числа $\inf_{x \in X}(\ell - \mathcal{H}\mathrm{u}|\mathrm{x})_{E^n} = -s(\mathcal{H}^*\mathrm{u} - \ell|X)$, $s(\ell - \mathcal{H}^*\mathrm{u}|X)$ скінченні.

Обчислимо $s(\ell - \mathcal{H}\mathrm{u}|X)$. Для довільного $x \in X$ справедливе представлення $x = x^* + x_0$, де $x_0 \in N(\mathcal{D})$, $x^* \in \mathrm{Im}(\mathcal{D}^*)$ і $\mathcal{D}x^* = \mathcal{D}x \in \mathrm{G}$, тому легко збагнути, що $s(\ell - \mathcal{H}\mathrm{u}|X) = +\infty$ при $\ell - \mathcal{H}\mathrm{u} \notin N(\mathcal{D})^\perp$, що можливо для $(\ell, \mathrm{u}) \in L \times U_l$ і лише для них.

Нехай тепер $(\ell, \mathrm{u}) \in L \times U_l$. Тоді

$$s(\ell - \mathcal{H}\mathrm{u}|X) = \sup_x\{(z, \mathcal{D}x)_{E^m}|\mathcal{D}x \in \mathrm{G}\} = \sup_{\mathrm{f}}\{(z, \mathrm{f})_{E^m}|\mathrm{f} \in \mathrm{G}_1\} = s(z|\mathrm{G}_1),$$

звідки

$$\left|(\ell - \mathcal{H}\mathrm{u}|\mathrm{x})_{E^n} - \frac{1}{2}[s(z|\mathrm{G}_1) - s(-z|\mathrm{G}_1)]\right| \leqslant \frac{1}{2}[s(z|\mathrm{G}_1) + s(-z|\mathrm{G}_1)].$$

Пригадавши означення β_z, із попереднього співвідношення з урахуванням очевидної рівності $\sup_{k:|k|\leqslant v}|k-m| = v+|m|$, знаходимо

$$\sup_{x\in X}[(\ell-\mathcal{H}\mathrm{u}|\mathrm{x})_{E^n}-c]^2 = \left(\frac{1}{2}[s(z|\mathrm{G}_1)+s(-z|\mathrm{G}_1)]+|\beta_z-c|\right)^2.$$

□

Зауваження 1. Помітимо, що у теоремі встановлено скінченність похибки лише для векторів з деякого класу L, а саме для $L=\mathcal{P}(\mathbb{E}^n_{N+2})$, де символом $\mathcal{P}$ позначено оператор ортогонального проектування на підпростір $\mathrm{Im}(\mathcal{D}^*)+\mathrm{Im}(\mathcal{H}^*)$. Ми можемо розширити клас L до всього простору, якщо точну верхню грань у (4) будемо обчислювати лише по $x\in\mathcal{P}(X)$, бо тоді для довільного $\ell\in L$ буде $(\mathcal{P}\ell-\mathcal{H}^*\mathrm{u},x)_{E^n}=(\ell-\mathcal{H}^*\mathrm{u},\mathcal{P}x)_{E^n}$.

Символом $\mathcal{T}$ позначимо оператор $\mathrm{w}\mapsto\mathcal{T}\mathrm{w}=\mathcal{D}^*z+\mathcal{H}^*\mathrm{u}$. Покладемо

$$\mathcal{W}_h \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{Arginf}_{\mathrm{w}}\|\mathcal{T}\mathrm{w}-\ell\|^2_{E^n}=\{\mathrm{w}=(z,\mathrm{u}):\mathcal{D}^*z=\mathcal{P}h-\mathcal{H}^*\mathrm{u}\}.$$

Очевидно, $\mathcal{W}_h$ — непорожня опукла замкнена множина для довільного $h\in\mathbb{E}^n_{N+2}$.

Теорема 2. Припустимо, що $\ell=\mathcal{P}h,\ h\in\mathbb{E}^n_{N+2}$ і

$$\mathcal{W}^*_h \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{Arginf}_{\mathrm{w}=(z,u)\in\mathcal{W}_h}\left\{\left(\frac{1}{2}[s(z|\mathrm{G}_1)+s(-z|\mathrm{G}_1)]\right)^2+\gamma^2(\mathrm{u})\right\}\neq\varnothing.$$

Тоді мінімаксну середньоквадратичну оцінку $\hat{\mathrm{u}}_{\hat{c}}(\mathrm{y})$ лінійної функції $(\ell|\cdot)_{E^n}$ від розв'язку різницевого рівняння (1) можна подати у вигляді

$$\hat{\mathrm{u}}_{\hat{c}}(\mathrm{y}) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{k=0}^{N}(\hat{\mathrm{u}}_k|\mathrm{y}_k)_{R^l}+\hat{c},\ \ \hat{c}\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{2}[s(\hat{z}|\mathrm{G}_1)-s(-\hat{z}|\mathrm{G}_1)],\ \ \hat{\mathrm{w}}\in\mathcal{W}^*_h,\ \ \hat{\mathrm{w}}=[\hat{z},\hat{\mathrm{u}}]. \tag{12}$$

Мінімаксна середньоквадратична похибка оцінювання має вигляд

$$\sigma(\hat{u},c)=\frac{1}{4}[s(\hat{z}|\mathrm{G}_1)+s(-\hat{z}|\mathrm{G}_1)]^2+\gamma^2(\hat{\mathrm{u}}). \tag{13}$$

Доведення. Нехай $\mathcal{W}^*_h\neq\varnothing$. Це означає, що множина розв'язків задачі умовної оптимізації

$$\frac{1}{4}[s(z|\mathrm{G}_1)+s(-z|\mathrm{G}_1)]^2+\gamma^2(\mathrm{u})\to\inf_{\mathrm{w}=[z,\mathrm{u}]\in\mathcal{W}_h} \tag{14}$$

непорожня. Підкреслимо, що у (14) оптимізація ведеться по z,u, які розглядаються як незалежні змінні.

Виберемо довільне $\hat{\mathrm{w}}=[\hat{z},\hat{\mathrm{u}}]\in\mathcal{W}^*_h$ і покажемо, що оцінка $\hat{\mathrm{u}}_{\hat{c}}(\mathrm{y})$ (див. формулу (12)) задовольняє означення мінімаксної середньоквадратичної оцінки, тобто для довільної оцінки $\mathrm{u}_c(\mathrm{y})$ (див. теорему 1), породженої $\mathrm{u}\in\mathcal{U}_l$ і дійсними c, виконується (4). Зафіксуємо довільне $\mathrm{u}\in\mathcal{U}_l$ та дійсне c і покажемо, що похибка оцінки $\mathrm{u}_c(\mathrm{y})$

не менше (13). Для цього помітимо, що для всіх z, u, які лежать на афінній множині $\mathcal{D}^*z + \mathcal{H}^*\mathrm{u} = \mathcal{P}h$, виконується нерівність

$$\frac{1}{4}[s(\hat{z}|\mathrm{G}_1) + s(-\hat{z}|\mathrm{G}_1)]^2 + \gamma^2(\hat{\mathrm{u}}) \leqslant [s(z|\mathrm{G}_1) + s(-z|\mathrm{G}_1)]^2 + \gamma^2(\mathrm{u}), \tag{15}$$

бо $\hat{\mathrm{w}} \in \mathcal{W}_h^* \subset \mathcal{W}_h$. Помітимо, що похибка оцінювання оцінки u_{β_z} пов'язана з похибкою оцінювання оцінки u_c наступним співвідношенням

$$\sigma(\mathrm{u}, \beta_z) \leqslant \sigma(\mathrm{u}, \mathrm{c}). \tag{16}$$

Дійсно, справедливість (16) випливає з нерівності

$$\left[\frac{1}{2}(s(z|\mathrm{G}_1) + s(-z|\mathrm{G}_1))\right]^2 + \gamma^2(\mathrm{u}) \leqslant \left[\frac{1}{2}(s(z|\mathrm{G}_1) + s(-z|\mathrm{G}_1)) + |\beta_z - c|\right]^2 + \gamma^2(\mathrm{u})$$

та формули (9) теореми 1.

Нехай $\hat{c}$ означено так, як у (12). Тоді згідно теореми 1 похибку оцінювання оцінки $\hat{\mathrm{u}}_{\hat{c}}(\mathrm{y})$ можна подати у вигляді

$$\sigma(\hat{u}, \hat{c}) = \frac{1}{4}[s(\hat{z}|\mathrm{G}_1) + s(-\hat{z}|\mathrm{G}_1)]^2 + \gamma^2(\hat{\mathrm{u}})$$

звідки, взявши до уваги (15), знаходимо

$$\sigma(\hat{u}, \hat{c}) \leqslant [s(z|\mathrm{G}_1) + s(-z|\mathrm{G}_1)]^2 + \gamma^2(\mathrm{u}) = \sigma(\mathrm{u}, \beta_z),$$

що разом із (16) дає (4). □

Наслідок 1. Припустимо, що множина G центрально симетрична відносно нуля. Тоді задача мінімаксного спостереження еквівалентна задачі оптимізації

$$[s(z|\mathrm{G}_1)]^2 + \gamma^2(\mathrm{u}) \to \inf_{\mathrm{w}=[z,\mathrm{u}]\in\mathcal{W}_h} \tag{17}$$

Мінімаксні середньоквадратичні оцінки для випадку квадратичних обмежень

Припустимо, що $\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_{1,k}, \mathrm{Q}_{2,k}$ — додатно означені симетричні матриці. Введемо блочні матриці вигляду $\mathcal{Q}_1 = \mathrm{diag}\{\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_{1,0}, \ldots, \mathrm{Q}_{1,N}\}$, $\mathcal{Q}_2 = \mathrm{diag}\{\mathrm{Q}_{2,0}, \ldots, \mathrm{Q}_{2,N}\}$. Означимо множини G, G_2 наступним способом

$$\begin{aligned} \mathrm{G} &= \left\{\mathrm{f} : (\mathrm{Q}_0\mathrm{g}_0|\mathrm{g}_0)_{R^m} + \sum_{k=0}^{N}(\mathrm{Q}_{1,k}f_k|f_k)_{R^m} = (\mathcal{Q}_1\mathrm{f}, \mathrm{f})_{\mathbb{E}^m_{N+2}} \leqslant 1\right\}, \\ \mathrm{G}_2 &= \left\{R : \sum_{k=0}^{N}\mathrm{tr}\mathrm{Q}_{2,k}R_{k,k} = \mathrm{tr}\mathcal{Q}_2R \leqslant 1\right\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Теорема 3. Припустимо, що множини G, G_2 мають вигляд (18), $\mathcal{P}\ell = \ell$. Тоді

1) Задача мінімаксного середньоквадратичного оцінювання еквівалентна задачі оптимізації

$$(\mathcal{Q}_1^{-1}z|z)_{\mathbb{E}^m} + (\mathcal{Q}_2^{-1}\mathrm{u}|\mathrm{u})_{\mathbb{E}^l} \to \inf_{\mathcal{D}^*z+\mathcal{H}^*\mathrm{u}=\ell}, \tag{19}$$

2) Задача (19) має єдиний розв'язок $[\hat{\mathrm{u}}, \hat{z}]$, де $\hat{\mathrm{u}} = \mathcal{Q}_2\mathcal{H}\mathrm{p}$, а $\hat{z}, \mathrm{p}$ знаходяться з системи

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}^*\hat{z} + \mathcal{H}^*\mathcal{Q}_2\mathcal{H}\mathrm{p} = \ell, \\ &\mathcal{Q}_1^{-1}\hat{z} - \mathcal{D}\mathrm{p} = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Навпаки, якщо $\hat{z}, \mathrm{p}$ задовольняють (20), то $[\hat{z}, \mathcal{Q}_2\mathcal{H}\mathrm{p}]$ є розв'язком (19).

Доведення. Покажемо спочатку справедливість 2). Беручи до уваги додатну означеність матриць $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, введемо у просторах $\mathbb{E}^m_{N+2}$, $\mathbb{E}^l_{N+1}$ нові скалярні добутки: $(z|z)_{Q_1} = (\mathcal{Q}_1^{-1}z|z)_{\mathbb{E}^m}$, $(\mathrm{u}|\mathrm{u})_{Q_2} = (\mathcal{Q}_2^{-1}\mathrm{u}|\mathrm{u})_{\mathbb{E}^m}$ і подамо (19) у вигляді

$$\mathscr{Q}(\mathrm{w}) \overset{\mathrm{def}}{=} (z|z)_{Q_1} + (\mathrm{u}|\mathrm{u})_{Q_2} \to \inf_{\mathrm{w}=[z,\mathrm{u}]\in\mathcal{W}_h} \tag{21}$$

Оскільки $\mathcal{W}_h$ є непорожнім афінним многовидом, то в силу строгої опуклості, слабкої напівнеперервності знизу та коерцитивності функціоналу $\mathscr{Q}$ задача оптимізації (21) має єдиний розв'язок $\hat{\mathrm{w}} = [\hat{z}, \hat{\mathrm{u}}]$, який (див. [11], с. 18, т.1.4.2) задовольняє варіаційну нерівність

$$(\hat{z}|z - \hat{z})_{Q_1} + (\hat{\mathrm{u}}|\mathrm{u} - \hat{\mathrm{u}})_{Q_2} \geqslant 0, \ \forall \mathrm{w} = [z, \mathrm{u}] \in \mathcal{W}_h$$

звідки випливає обмеженість знизу лінійної функції $(\hat{z}|\cdot)_{Q_1} + (\hat{\mathrm{u}}|\cdot)_{Q_2}$ на $\mathcal{W}_h$. Це означає, що $[\mathcal{Q}_1^{-1}\hat{z}, \mathcal{Q}_2^{-1}\hat{\mathrm{u}}] \perp M$, де M — лінійний підпростір, паралельний до афінного многовиду $\mathcal{W}_h$. Пригадавши означення оператора $\mathcal{T}$, одержимо, що $M = \mathrm{N}(\mathcal{T})$. Тому $[\mathcal{Q}_1^{-1}\hat{z}, \mathcal{Q}_2^{-1}\hat{\mathrm{u}}] \in \mathrm{Im}(\mathcal{T}^*)$ тобто існує $\mathrm{p} \in \mathbb{E}^n_{N+2}$ таке, що $[\mathcal{Q}_1^{-1}\hat{z}, \mathcal{Q}_2^{-1}\hat{\mathrm{u}}] = \mathcal{T}^*\mathrm{p}$ $(*)$, де $\mathcal{T}^*\mathrm{p} = [\mathcal{D}\mathrm{p}, \mathcal{H}\mathrm{p}]$. З іншого боку $\hat{\mathrm{w}} \in \mathcal{W}_h^*$, тому $\mathcal{T}\hat{\mathrm{w}} = \ell$ $(**)$. Об'єднуючи $(*)$, $(**)$, помічаємо, що $\mathrm{p}, \hat{z}$ задовольняють (20).

Навпаки, нехай $\mathrm{p}, \hat{z}$ задовольняють (20) і $\hat{\mathrm{u}} = \mathcal{Q}_2\mathcal{H}\mathrm{p}$. Легко збагнути, беручи до уваги (20) та властивості функції $\mathscr{Q}$, що $\mathscr{Q}(\mathrm{w}) - \mathscr{Q}(\hat{\mathrm{w}}) \geqslant 0 \, \forall \mathrm{w} \in \mathcal{W}_h$.

Покажемо еквівалентність задачі мінімаксного спостереження і задачі оптимізації (21). Для цього обчислимо $s(\cdot|\mathrm{G}), \gamma$. Беручи до уваги узагальнену нерівність Коші-Буняковського, знаходимо

$$[s(z|\mathrm{G})]^2 = (\mathcal{Q}_1^{-1}z|z)_{\mathbb{E}^m}, \gamma^2(\mathrm{u}) = \sup_{R\in\mathrm{G}_2} M(\mathrm{u}|\eta)^2_{\mathbb{E}^l} = (\mathcal{Q}_2^{-1}\mathrm{u}|\mathrm{u})_{\mathbb{E}^l} M(\mathcal{Q}_2\eta|\eta)_{\mathbb{E}^l}. \tag{22}$$

Очевидно, G — опуклий центрально симетричний компакт простору $\mathbb{E}^m_{N+2}$. Ми бачимо, що умови теореми 1 виконано, тому згідно наслідку 1 задача мінімаксного середньоквадратичного оцінювання еквівалентна задачі оптимізації (17). Обчислимо $s(\cdot|\mathrm{G}_1) = (\delta(\cdot|\mathrm{G}_1))^* = (\delta(\cdot|\mathrm{G}) + \delta(\cdot|\mathrm{Im}(\mathcal{D})))^*$. Очевидно, функції $\delta(\cdot|\mathrm{G})$, $\delta(\cdot|\mathrm{Im}(\mathcal{D}))$ є опуклими і власними, причому їхні ефективні множини перетинаються у нулі і

$\delta(\cdot|\mathrm{G})$ обмежена у деякому околі нуля. Тоді (див. [12] стор. 188, теорема 1), взявши до уваги (22), знаходимо

$$s(z|\mathrm{G}_1) = \inf_{\mathrm{p}}\{s(\mathrm{p}-z|\mathrm{G}) + s(\mathrm{p}|\mathrm{Im}(\mathcal{D}))\} = \inf_{\mathrm{p}}\{s(\mathrm{p}-z|\mathrm{G}) + \delta(\mathrm{p}|\mathrm{N}(\mathcal{D}^*))\} =$$

$$\inf_{\mathrm{p}\in\mathrm{N}(\mathcal{D}^*)}\{(\mathcal{Q}_1^{-1}(\mathrm{p}-z)|\mathrm{p}-z)_{\mathbb{E}^m}\}^{\frac{1}{2}} = \{\inf_{\mathrm{p}\in\mathrm{N}(\mathcal{D}^*)}(\mathcal{Q}_1^{-1}(\mathrm{p}-z)|\mathrm{p}-z)_{\mathbb{E}^m}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отже, (17) еквівалентна задачі оптимізації

$$\mathscr{L}(\mathrm{w}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf_{\mathrm{p}\in\mathrm{N}(\mathcal{D}^*)}(z-\mathrm{p}|z-\mathrm{p})_{Q_1} + (\mathrm{u}|\mathrm{u})_{Q_2} \to \inf_{\mathrm{w}=(z,\mathrm{u})\in\mathcal{W}_h}. \tag{23}$$

Покажемо еквівалентність (23) і (21). Для цього введемо множину

$$\tilde{\mathcal{W}} = \{\mathrm{w}=[z,\mathrm{u}]\in\mathcal{W}_h : (z|z)_{Q_1} = \inf_{\mathrm{p}\in\mathrm{N}(\mathcal{D}^*)}(z-\mathrm{p}|z-\mathrm{p})_{Q_1}\}.$$

Зрозуміло, що $\tilde{\mathcal{W}}$ є непорожньою підмножиною $\mathcal{W}_h$, причому[2] $\mathscr{L}(\mathcal{W}_h) = \mathscr{L}(\tilde{\mathcal{W}})$, тому $\inf_{\mathcal{W}_h}\mathscr{L} = \inf(\mathscr{L}(\mathcal{W}_h)) = \inf(\mathscr{L}(\tilde{\mathcal{W}})) = \inf_{\tilde{\mathcal{W}}}\mathscr{L}$. Помітимо, що для довільного $\mathrm{w}\in\tilde{\mathcal{W}}$ має місце рівність

$$\mathscr{L}(\mathrm{w}) = \inf_{\mathrm{p}\in\mathrm{N}(\mathcal{D}^*)}(z-\mathrm{p}|z-\mathrm{p})_{Q_1} + (\mathrm{u}|\mathrm{u})_{Q_2} = (z|z)_{Q_1} + (\mathrm{u}|\mathrm{u})_{Q_2} = \mathscr{Q}(\mathrm{w}) \tag{24}$$

тому

$$\inf_{\mathcal{W}_h}\mathscr{L} = \inf_{\tilde{\mathcal{W}}}\mathscr{L} = \inf_{\tilde{\mathcal{W}}}\mathscr{Q} \geqslant \inf_{\mathcal{W}_h}\mathscr{Q}. \tag{25}$$

З іншого боку, очевидно, $\delta(\cdot|\mathrm{G}_1) \leqslant \delta(\cdot|\mathrm{G})$, звідки

$$\mathscr{L}(\mathrm{w}) = [\delta(z|\mathrm{G}_1)]^2 + \gamma^2(\mathrm{u}) \leqslant [\delta(z|\mathrm{G})]^2 + \gamma^2(\mathrm{u}) = \mathscr{Q}(\mathrm{w}),\ \forall\mathrm{w}\in\mathcal{W}_h. \tag{26}$$

Порівнюючи (26) з (25), одержимо рівність

$$\inf_{\mathcal{W}_h}\mathscr{L} = \inf_{\mathcal{W}_h}\mathscr{Q}. \tag{27}$$

Для завершення доведення нам залишилось показати, що $\hat{\mathrm{w}}\in\tilde{\mathcal{W}}$. Дійсно, тоді згідно (24), (27) вектор $\hat{\mathrm{w}} = [\hat{z},\hat{\mathrm{u}}]$ буде розв'язком задачі оптимізації (23), відтак

$$\hat{\mathrm{u}} \text{ буде мінімаксною середньоквадратичною оцінкою.} \tag{28}$$

Покажемо, що $\hat{\mathrm{w}}\in\tilde{\mathcal{W}}$. Для цього потрібно показати, що проекція $\hat{z}$ на підпростір $\mathrm{N}(\mathcal{D}^*)$ є нульовим вектором. Нехай p_z — розв'язок задачі оптимізації

$$(\hat{z}-\mathrm{p}|\hat{z}-\mathrm{p})_{Q_1} \to \inf_{\mathrm{p}\in\mathrm{N}(\mathcal{D}^*)} \tag{29}$$

Відомо (див. [11], с.23, насл. 1.4.3), що p_z задовольняє тотожність Ейлера

$$(\mathcal{Q}_1^{-1}(\hat{z}-\mathrm{p}_z)|z)_{\mathbb{E}^m} = 0,\ \forall z\in\mathrm{N}(\mathcal{D}^*). \tag{30}$$

Помітимо, що згідно (20) $\mathcal{Q}_1^{-1}\hat{z} = \mathcal{D}\mathrm{p}$. Підставляючи до (30) $\mathrm{p}_z\in\mathrm{N}(\mathcal{D}^*)$ замість z, знаходимо $(\mathcal{Q}_1^{-1}\mathrm{p}_z|\mathrm{p}_z)_{\mathbb{E}^m} = (\mathcal{Q}_1^{-1}\hat{z}|\mathrm{p}_z)_{\mathbb{E}^m} = (\mathcal{D}\mathrm{p}|\mathrm{p}_z)_{\mathbb{E}^m} = 0$, тому $\mathrm{p}_z = 0$. □

[2]Символом $\mathscr{L}(\mathcal{W}_h)$ позначено образ множини $\mathcal{W}_h$ при функції $\mathscr{L}$.

Наслідок 2. $\hat{\mathrm{u}}_{\hat{c}}(\mathrm{y}) = \sum_{k=1}^{N}(\hat{\mathrm{u}}_k, \mathrm{y}_k)_{R^l}, \hat{\mathrm{u}}_k = \mathrm{Q}_{2,k} H_k \mathrm{p}_k$. Мінімаксна похибка середньоквадратичного оцінювання має вигляд

$$\sup_{x\in X, y\in Y} \mathrm{M}\left[\sum_{k=0}^{N+1}(l_k|x_k)_{R^n} - \sum_{k=0}^{N}(\hat{\mathrm{u}}_k|\mathrm{y}_k)_{R^l}\right]^2 = \sum_{k=0}^{N+1}(l_k|\mathrm{p}_k)_{R^n},$$

де $\mathrm{p}_k, \hat{z}_k$ задовольняють систему різницевих рівнянь

$$\begin{aligned} &F_k^{'}\hat{z}_k = \mathrm{C}_k^{'}\hat{z}_{k+1} - H_k^{'}\mathrm{Q}_{2,k}H_k\mathrm{p}_k + l_k,\ F_{N+1}^{'}\hat{z}_{N+1} = l_{N+1}, \\ &F_{k+1}\mathrm{p}_{k+1} = \mathrm{C}_k\mathrm{p}_k + \mathrm{Q}_{1,k}^{-1}\hat{z}_k,\ F_0\mathrm{p}_0 = \mathrm{Q}_0\hat{z}_0,\ k = \overline{0,N}. \end{aligned} \tag{31}$$

Доведення. Покажемо спочатку, що компоненти $\hat{z}_k$, p_k векторів $\hat{z} = [\hat{z}_0, ..., \hat{z}_{N+1}]$, $\mathrm{p} = [\mathrm{p}_0, ..., \mathrm{p}_{N+1}]$ задовольняють (31), якщо $\hat{z}$, p задовольняють (20). Для цього обчислимо матриці операторів $\mathcal{D}^*$, $\mathcal{H}^*\mathcal{Q}_2\mathcal{H}$ у базисах відповідних просторів. Прямим підрахунком знаходимо, що операторові $\mathcal{D}^*$ відповідає матриця

$$\begin{matrix} F_0^{'} & -C_0^{'} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & F_1^{'} & -C_1^{'} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & F_N^{'} & -C_N^{'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & F_{N+1}^{'} \end{matrix} \tag{32}$$

а матриця оператора $\mathcal{H}^*\mathcal{Q}_2\mathcal{H}$ має вигляд

$$\begin{matrix} H_0^{'}Q_{2,0}H_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & H_1^{'}Q_{2,1}H_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & H_N^{'}Q_{2,N}H_N & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix} \tag{33}$$

Тоді виконання $\mathcal{D}^*\hat{z} = \mathcal{P}\ell - \mathcal{H}^*\mathcal{Q}_2\mathcal{H}\mathrm{p}$ еквівалентно тому, що

$$F_k^{'}\hat{z}_k = \mathrm{C}_k^{'}\hat{z}_{k+1} - H_k\mathrm{Q}_{2,k}H_k\mathrm{p}_k + l_k,\ F_{N+1}^{'}\hat{z}_{N+1} = l_{N+1}, k = \overline{0,N}. \tag{34}$$

Якщо у (5) замінити символ x символом p і покласти $\mathrm{f} = \mathcal{Q}_1^{-1}\hat{z}$, то еквівалентність останнього рівняння (20) та другого рівняння (31) випливатиме з еквівалентності (5) та (1).

Під час доведення теореми 3 було встановлено (див. (28)), що $\hat{\mathrm{u}} = \mathcal{Q}_2\mathcal{H}\mathrm{p}$ є мінімаксною середньоквадратичною оцінкою, тому $\hat{\mathrm{u}}_k = \mathrm{Q}_{2,k}H_k\mathrm{p}_k$, $k = \overline{1,N}$. Обчислимо мінімаксну похибку. Для цього згідно теореми 3 (див. (17), (23), (27)) потрібно обчислити $\mathscr{Q}(\hat{\mathrm{w}})$. Беручи до уваги (20) — (21), легко переконатись, що $\mathscr{Q}(\hat{\mathrm{w}}) = (\ell|\mathrm{p})_{\mathbb{E}^n} = \sum_{k=0}^{N+1}(l_k|\mathrm{p}_k)_{R^n}$. Наслідок доведено. □

Теорема 4. (про альтернативне представлення). Нехай виконано умови теореми 3. Тоді $\mathrm{\hat{u}}_{\hat{c}}(\mathrm{y}) = \sum_{k=0}^{N+1}(l_k|\mathrm{\hat{x}}_k)_{R^n}$, де $\mathrm{\hat{x}}_k$, v_k знаходяться з системи

$$\begin{aligned} &F_k^{'}\mathrm{v}_k = \mathrm{C}_k^{'}\mathrm{v}_{k+1} + H_k\mathrm{Q}_{2,k}(\mathrm{y}_k - H_k\mathrm{\hat{x}}_k),\ F_{N+1}^{'}\mathrm{v}_{N+1} = 0, \\ &F_{k+1}\mathrm{\hat{x}}_{k+1} = \mathrm{C}_k\mathrm{\hat{x}}_k + \mathrm{Q}_{1,k}^{-1}\mathrm{v}_k,\ F_0\mathrm{\hat{x}}_0 = \mathrm{Q}_0\mathrm{v}_0,\ k = \overline{0,N}. \end{aligned} \tag{35}$$

Доведення. Покажемо спочатку, що множина розв'язків системи (35) непорожня. З цією метою розглянемо задачу оптимізації

$$\begin{aligned} &J(\mathrm{f}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (Q_0\mathrm{g}_0|\mathrm{g}_0)_{R^n} + \sum_{k=0}^{N}(\mathrm{Q}_{1,k}f_k|f_k)_{R^n} + (\mathrm{Q}_{2,k}(\mathrm{y}_k - H_kx_k)|\mathrm{y}_k - H_kx_k)_{R^l} \to \inf_{\mathrm{f}} \\ &F_{k+1}x_k = \mathrm{C}_kx_k + f_k,\ F_0\mathrm{x}_0 = \mathrm{g}_0,\ \mathrm{f} = [\mathrm{g}_0,\ \mathrm{f}_0, ...,\ \mathrm{f}_N] \end{aligned} \tag{36}$$

Задача (36) має єдиний розв'язок $\hat{f} = [\hat{\mathrm{g}}_0, \hat{\mathrm{f}}_0, ..., \hat{\mathrm{f}}_N]$. Щоб довести це, введемо допоміжну задачу оптимізації

$$\|\mathcal{T}^*\mathrm{x} - \tilde{\mathrm{y}}\|_1^2 \to \inf_{\mathrm{x}}, \tag{37}$$

де покладено $\tilde{\mathrm{y}} = [0, \mathrm{y}]$, $\|[z, \mathrm{u}]\|_1^2 = (\mathcal{Q}_1 z|z)_{\mathbb{E}^m} + (\mathcal{Q}_2\mathrm{u}|\mathrm{u})_{\mathbb{E}^l}$, а оператор $\mathcal{T}^*$ діє згідно правила $\mathcal{T}^*\mathrm{x} = [\mathcal{D}\mathrm{x}, \mathcal{H}\mathrm{x}]$. Задача проектування (37) має щонайменше один розв'язок $\mathrm{\hat{x}}$. Покладемо $\hat{\mathrm{f}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{D}\mathrm{\hat{x}}$ і покажемо, що $\hat{\mathrm{f}}$ є розв'язком (36). Виберемо довільне $\mathrm{f} \in \mathrm{Im}(\mathcal{D})$ і x таке, що $\mathcal{D}\mathrm{x} = \mathrm{f}$. Тоді

$$J(\mathrm{f}) = (\mathcal{Q}_1\mathcal{D}\mathrm{x}|\mathcal{D}\mathrm{x})_{\mathbb{E}^m} + (\mathcal{Q}_2(\mathrm{y} - \mathcal{H}\mathrm{x})|\mathrm{y} - \mathcal{H}\mathrm{x})_{\mathbb{E}^l} \geqslant \|\mathcal{T}^*\mathrm{\hat{x}} - \tilde{\mathrm{y}}\|_1^2 = J(\hat{\mathrm{f}})$$

в силу мінімальності $\mathrm{\hat{x}}$, тому $\hat{\mathrm{f}}$ є розв'язком (36). З іншого боку задача (36) має не більше одного розв'язку в силу строгої опуклості J.

Запишемо умови оптимальності для $\mathrm{\hat{x}}$

$$(\mathcal{Q}_2\mathcal{D}\mathrm{\hat{x}}|\mathcal{D}\mathrm{x})_{\mathbb{E}^n} = (\mathcal{H}^*\mathcal{Q}_2(\mathrm{y} - \mathcal{H}\mathrm{\hat{x}})|\mathrm{x})_{\mathbb{E}^l},\ \forall \mathrm{x} \in \mathbb{E}_{N+2}^n \tag{38}$$

(38) свідчить про те, що для $\mathrm{v} = \mathcal{Q}_1\mathcal{D}\mathrm{\hat{x}}$ виконується $\mathcal{D}^*\mathrm{v} = \mathcal{H}^*\mathcal{Q}_2(\mathrm{y} - \mathcal{H}\mathrm{\hat{x}})$. Це означає, що підставляючи $(\mathrm{\hat{x}}, \mathrm{v})$ до системи

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}^*\mathrm{v} = \mathcal{H}^*\mathcal{Q}_2(\mathrm{y} - \mathcal{H}\mathrm{\hat{x}}), \\ &\mathcal{D}\mathrm{\hat{x}} = \mathcal{Q}_1^{-1}\mathrm{v}. \end{aligned} \tag{39}$$

ми одержимо тотожність, тому (35) має непорожню множину розв'язків. Легко збагнути, беручи до уваги (6), (32) — (33), що компоненти $\mathrm{\hat{x}}_k$, v_{k+1} векторів $\mathrm{\hat{x}}$, v задовольняють (35), як тільки пара $(\mathrm{\hat{x}}, \mathrm{v})$ задовольняє (39).

Згідно теореми 3 (див. (28))

$$\mathrm{\hat{u}}_{\hat{c}}(\mathrm{y}) = (\mathcal{Q}_2\mathcal{H}\mathrm{p}|\mathrm{y})_{\mathbb{E}^l} = (\mathrm{p}|\mathcal{D}^*\mathrm{v} + \mathcal{H}^*\mathcal{Q}_2\mathcal{H}\mathrm{\hat{x}})_{\mathbb{E}^n} = (\mathcal{Q}_1^{-1}\hat{z}|\mathrm{v})_{\mathbb{E}^m} + (\mathcal{H}^*\mathrm{\hat{u}}|\mathrm{\hat{x}})_{\mathbb{E}^n} = (\ell|\mathrm{\hat{x}})_{\mathbb{E}^n}.$$

□

Висновки

Одержано необхідні та достатні умови (теорема 1) скінченності мінімаксної середньоквадратичної похибки оцінювання, описано клас оцінок $\mathcal{U}_l$, що характеризуються скінченною похибкою оцінювання, запропоновано достатні умови (теорема 2) існування множини мінімаксних середньоквадратичних оцінок лінійних функцій $(\ell|\cdot)_{\mathbb{E}^n}$ від розв'язків лінійного дескрипторного рівняння (1) для того випадку, коли обмеження на невідомі збурення f_k, η_k та початкове значення g_0 задаються у вигляді опуклих замкнених обмежених множин G, G_2. Наведено (зауваження 1) спосіб розширення множини оцінюваних функцій L до всього простору.

Для випадку квадратичних обмежень доведено теореми існування та єдиності мінімаксної середньоквадратичної оцінки (теорема 3), наведено деякі представлення оцінки (наслідок 2, теорема 4) за допомогою розв'язків системи лінійних дескрипторних рівнянь.

Література

1. *Бояринцев Ю.И.* Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы/РАН. СО; Инстут динам. с-м и теор. упр. Новосибирск: Наука, 2000. — 222 с.
2. *Kurina G.A.* Linear-quadratic discrete optimal control problems for descriptor systems in Hilbert space//Journal of Dynamical and Control Systems. — July 2004. Vol. 10, N 3. — P. 365 — 375
3. *Zhang Q.L., Liu W.Q., Hill D.A.* Lyapunov approach to analysis of discrete singular systems//Systems and Control Letters. — March 2002. Vol. 45, N 3, — P. 237 — 247
4. *Gerdin M.* Parameter Estimation in Linear Descriptor Systems//PhD Thesises, Linkoping 2004
5. *Наконечний О.Г.* Оцінювання параметрів в умовах невизначеності//Наукові записки КНУ ім. Т.Г. Шевченка. — 2004. — Том 7: факультет кібернетики. — С. 102 — 112
6. *Бублик Б.Н., Данилов В.Я., Наконечный А.Г.* Некоторые задачи управления и наблюдения в линейных системах: Учебное пособие. — К.:УМК ВО, 1988. — 191 с.
7. *Жук С.М.* Мінімаксні задачі спостереження для сингулярних лінійних різницевих рівнянь//Таврический вестник информатики и математики. — 2005. N 1. — С. 16 — 24
8. *Жук С.М.* Минимаксное оценивание решений линейных алгебраических уравнений с сингулярными матрицами//Проблемы управления и инфоматики. — 2004. — N 3. — С. 121 — 130
9. *Жук С.М.* Апостеріорні мінімаксні оцінки розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь з сингулярними матрицями//Вісник Київського унівep-ту. — 2004. — N 3. — С. 211 — 215
10. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности, М., 1977, 392 с.
11. Прикладной функциональный анализ / Балакришнан А.В. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
12. Теория экстремальных задач / Иоффе А.Д., Тихомиров. — М.: Наука, 1974. — 477 с.
13. Выпуклый анализ / Рокафеллар Р. — М.: Мир, 1973. — 468 с.
14. Конечномерный линейный анализ / Глазман И.М., Любич Ю.И., М.: Наука, 1969. — 476 с.