УДК 517.94+517.5

УРАВНЕНИЕ ПЛАВНОГО ПЕРЕХОДА В СЕМЕЙСТВЕ ПРОСТРАНСТВ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Лукьяненко В.А.

Таврический национальный университет им В.И. Вернадского,
Факультет математики и информатики
пр.Вернадского, 4, г.Симферополь, Крым, Украина, 95007
e-mail: *art-inf@mail.ru*

Abstract. The solvability of the smooth transition equation in the Hilbert space double-index scale well adjusted for Fourier transform and convolution type equation solving in considered.

Введение

Уравнения типа свертки являются одним из важных классов интегральных уравнений, имеющих многочисленные приложения [1]- [3], [5], [7] . Ю.И. Черский ввел и рассмотрел [1] уравнения типа свертки — уравнение плавного перехода

$$\begin{gathered} u(t)+\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k_1(t-s)u(s)ds-g(t)+ \\ +e^{-t}\left\{u(t)+\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k_2(t-s)u(s)ds-g(t)\right\}=0, t\in\mathbb{R} \end{gathered} \tag{1}$$

в предположении, что $k_j(t)\in L_1(\mathbb{R})$, $j=1,2$; $g(t)\in L_2(\mathbb{R})$ – заданные функции. Уравнение (1) может быть записано в виде:

$$\mathbf{K}u\equiv u(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}n_1(t-s)u(s)ds+th\frac{t}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}n_2(t-s)u(s)ds=g(t) \tag{2}$$

А сопряженное (союзное [1]) — в виде:

$$\mathbf{K}^*\psi\equiv\psi(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}n_1(s-t)\psi(s)ds+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}n_2(s-t)\psi(s)th\frac{s}{2}ds=g(t) \tag{3}$$

Здесь $2n_1(t)=k_1(t)+k_2(t)$, $2n_2(t)=k_1(t)-k_2(t)$ и $n_j(t)\in L_1(\mathbb{R})$, $j=1,2$

Уравнение (1) эквивалентно задаче Карлемана для полосы [1], [5]. При выполнении условия разрешимости

$$1+K_j(x)\neq 0, K_j(x)=\mathbf{F}\{k_j(t)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k_j(t)e^{ixt}dt, j=1,2 \tag{4}$$

число решений l и условий разрешимости p (1) находятся по формулам $l=\max(0,\chi)$, $p=\max(0,-\chi)$, где $\chi=ind(1+K_2(x))(1+K_1(x))^{-1}$. Решение находится в квадратурах.

Актуальной задачей является изучение уравнения (1) в шкалах пространств обычных и обобщенных функций. В отличии от рассмотренных в таких шкалах уравнений типа свертки [1], [2], [4] , [9] уравнение (1) не имеет явно выраженной точки раздела двух условий, что приводит к некоторой специфике в исследовании (1) на разрешимость.

Для любых целых чисел $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ рассмотрим пространство W_m^n основных функций $\omega(t)$, которые не только n раз дифференцируемы, но и достаточно быстро убывают на бесконечности:

$$\|\omega\|_{W_m^n} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| (t+i)^m \left(\frac{d}{dt} + 1 \right)^n \omega(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} \tag{5}$$

Через W_{-m}^{-n} обозначим построенное на W_m^n пространство обобщенных функций. С помощью применения преобразования Фурье и изучения возникающей задачи Римана, в работе [1], исследовались уравнения типа свертки в пространствах обобщенных функций W_{-m}^{-n}. Там же приводятся исторические сведения. Зависимость разрешимости уравнений типа свертки в пространствах W_{-m}^{-n} от чисел m, n не обязательно целых, исследовал В.В.Шевчик [9].

Целью работы является изучение уравнения плавного перехода в пространствах основных W_β^α и обобщенных функций $W_{-\beta}^{-\alpha}$ для произвольных вещественных чисел α, β. Свойства таких шкал позволяет свести разрешимость уравнения (1) в классе обобщенных функций $W_{-\beta}^{-\alpha}$ к изучению сопряженного уравнения (3) в классе основных функций W_β^α для целых индексов. Так как исследование (1) в пространствах $W_{-\beta}^{-\alpha}$ при соответствующих ограничениях на ядра, может быть сведено к исследованию в пространстве $W_{-\beta}^0$, то отдельно рассматриваются уравнения (1) в $W_0^{-\alpha}$ и $W_{-\beta}^0$ (более сложный случай).

Будем использовать ряд сведений из теории шкал банаховых пространств [2], [4], [10] , схему В.С.Рогожина [8], классические результаты Ю.И.Черского [1] и результаты автора [6].

1. Пространства W_β^α, $W_{-\beta}^{-\alpha}$ и их свойства

Гильбертовы шкалы являются наиболее распространенным видом шкал банаховых пространств. Пусть H_0 — гильбертово пространство, J — неограниченный, положительно определенный, самосопряженный оператор, действующий в нем. Пусть M — множество элементов x, на котором определены все вести оператора J. В результате пополнения M по каждой из норм $\|x\|_\alpha = \|J^\alpha x\|_0$, $(x \in M, -\infty < \alpha < \infty)$ получим семейство гильбертовых пространств H_α, которое является аналитической шкалой.

Гильбертовой шкалой можно соединить семейство W_m^n, введенных выше.

Введем пространства W^{α}_{β}, $W^{-\alpha}_{-\beta}$ для произвольных вещественных α,β. Пусть $S(\mathbb{R})$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, заданных на вещественной оси, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$, а $S'(\mathbb{R})$ — сопряженное пространство обобщенных функций медленного роста, или, что то же, пространство Шварца медленно растущих распределений. Как и раннее, через F будем обозначать преобразование Фурье. На $S(\mathbb{R})$ определим операторы $X_{\pm}$, $K_{\pm}$:

$$(X_{\pm}f)(t) = (t \pm i)f(t), F\{K_{\pm}f\}(x) = (x \pm i)F\{f\}(x) \tag{6}$$

В терминах этих операторов определим нормы

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \|K^{\alpha}_{+}X^{\beta}_{+}f\|_2, \quad \|f\|'_{\alpha,\beta} = \|X^{\beta}_{+}K^{\alpha}_{+}f\|_2, \quad -\infty < \alpha, \beta < \infty \tag{7}$$

где $\|f\|_2$ — обычная в $L_2(\mathbb{R})$ норма функции f. Аналогично вводятся нормы с использованием операторов X_{-},K_{-}.

Пополнение $S(\mathbb{R})$ по норме $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ будем обозначать через W^{α}_{β}. При целых α, β полученные пространства совпадают с (5), раннее введенными. Семейство W^{α}_{β} является двухиндексной шкалой пространства $L_2(\mathbb{R})$ с весом, в которой, вообще говоря, нижний индекс описывает поведение функции $f(t)$ при $|t| \to \infty$, а верхней — поведение ее преобразования Фурье $F(x) = \boldsymbol{F}\{f(t)\}(x)$, когда $|x| \to \infty$. Если ввести на $S(\mathbb{R})$ операторы X и K формулами

$$(Xf)(t) = (t^2+1)^{\frac{1}{2}}f(t), \boldsymbol{F}\{Kf\}(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{F}\{f\}(x)$$

и рассмотреть пополнение $S(\mathbb{R})$ по норме

$$\begin{gathered} \|f\|_{\alpha,\beta} = \|K^{\alpha}_{+}X^{\beta}_{+}f\|_2, -\infty < \alpha, \beta < \infty \\ (\|f\|'_{\alpha,\beta} = \|X^{\beta}_{+}K^{\alpha}_{+}f\|_2, -\infty < \alpha, \beta < \infty) \end{gathered} \tag{8}$$

то получим двухиндексную шкалу $H(\alpha, \beta)$, свойства которой известны [10].

Теорема 1. *Нормы пространств W^{α}_{β}, $H(\alpha, \beta)$ эквивалентны.*

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при целых индексах норма в (7) в W^{n}_{m} эквивалентна норме (8) в $H(m, n)$. Обозначим через $g(t) = (t+i)^{\beta}f(t)$ функцию, принадлежащую пространству W^{α}_{0}, т.е. шкале С.Л.Соболева $W^{\alpha}_{2}(\mathbb{R})$, интерполяционные свойства которой известны [2], [4]. В силу эквивалентности норм при целых индексах имеем $c_2\|g(t)\|_{H(\alpha,0)} \leqslant \|g(t)\|_{W^{\alpha}_{0}} \leqslant c_1\|g(t)\|_{H(\alpha,0)}$, где α — целое. Рассматривая единичный оператор при целых индексах и пользуясь интерполяционностью шкалы С.Л. Соболева и шкалы $H(\alpha, \beta)$ при дробных β, получим

$$c_2\|g(t)\|_{H(\alpha,0)} \leqslant \|g(t)\|_{W^{\alpha}_{0}} = \|f(t)\|_{W^{\alpha}_{\beta}} \leqslant c_1\|g(t)\|_{H(\alpha,0)}$$

Откуда и следует доказательство теоремы 1, так как

$$\|g(t)\|_{H(\alpha,0)} \geqslant \tilde{c_2}\|f(t)\|_{H(\alpha,\beta)}, \|g(t)\|_{H(\alpha,0)} \leqslant \tilde{c_1}\|f(t)\|_{H(\alpha,\beta)}$$

Из теоремы 1 следует, что к пространствам W_β^α можно применить результаты, полученные в [10] для пространства $H(\alpha,\beta)$. Справедливы следующие свойства пространств W_β^α:

1. Для всех α,β нормы (7) $\|\cdot\|_{\alpha,\beta} = \|\cdot\|_{W_\beta^\alpha}$ и $\|\cdot\|'_{\alpha,\beta}$ эквивалентны.
2. Для всех α,β, $W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$ есть гильбертово пространство и $S \subset W_\beta^\alpha(\mathbb{R}) \subset S'$.
3. Если $\alpha \geqslant \gamma$, $\beta \geqslant \delta$, то $W_\beta^\alpha(\mathbb{R}) \subset W_\delta^\gamma(\mathbb{R})$ плотно.
4. Если $\alpha \geqslant \gamma$, $\beta \geqslant \delta$, то $W_\beta^\alpha(\mathbb{R}) \subset W_\delta^\gamma(\mathbb{R})$ компактно, т.е. ограниченное в $W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$ множество является компактным в $W_\delta^\gamma(\mathbb{R})$.
5. $\bigcap\{W_\beta^\alpha(\mathbb{R}), -\infty < \alpha,\beta < \infty\} = S$, $\bigcup\{W_\beta^\alpha(\mathbb{R}), -\infty < \alpha,\beta < \infty\} = S'$.
6. Для всех α,β пространство $W_{-\beta}^{-\alpha}(\mathbb{R})$ является сопряженным к $W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$.
7. Для всех α,β пространство $W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$ является преобразованием Фурье α,β пространство W_β^α.
8. Пусть P — оператор умножения на полином $p_n(t)$ степени n, а D — соответствующий дифференциальный оператор $p_n(\frac{d}{dt})$, тогда $P: W_\beta^\alpha(\mathbb{R}) \to W_{\beta-n}^\alpha(\mathbb{R})$, $D: W_\beta^\alpha(\mathbb{R}) \to W_\beta^{\alpha-n}(\mathbb{R})$ и операторы ограничены на указанных пространствах. Результат будет верен также и в более общем случае, когда умножение на $p_n(t)$ заменить умножением на бесконечно дифференцируемую функцию, которая ведет себя при $|t| \to \partial$, как $p_n(t)$ или если D является псевдодифференциальным оператором, символ которого мажорируется $p_n(t)$.
9. Пусть $f \in W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$, $g \in W_\delta^\gamma(\mathbb{R})$, $\alpha+\gamma > 0$, тогда произведение f_g определено и $f_g \in W_{\beta+\delta}^\varepsilon(\mathbb{R})$, где $\varepsilon = min\{\alpha,\gamma,\alpha+\gamma-1/2\}$.
10. Если $f \in W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$, $g \in W_\delta^\gamma(\mathbb{R})$, $\beta+\delta > 0$, то определена свертка $f * g \in W_\varepsilon^{\alpha+\gamma}(\mathbb{R})$, где $\varepsilon = min\{\beta,\delta,\delta+\beta-1/2\}$.

Имеет место теорема об интерполяционном свойстве шкалы $W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$

Теорема 2. *Если A линейный ограниченный оператор такой, что $A \in L(W_\beta^\alpha(\mathbb{R})) \bigcap L(W_\gamma^\delta(\mathbb{R}))$, то $A \in L(W_\sigma^\tau(\mathbb{R}))$, где $\sigma = \lambda\alpha + (1-\lambda)\gamma$, $\tau = \lambda\beta + (1-\lambda)\delta$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.*

Заметим, что для таких σ,τ,λ $W_\beta^\alpha(\mathbb{R}) \bigcap W_\delta^\gamma(\mathbb{R}) \subset W_\tau^\sigma(\mathbb{R})$, т.е. если функция f принадлежит одновременно $W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$ и $W_\delta^\gamma(\mathbb{R})$, тогда $f \in W_\tau^\sigma(\mathbb{R})$ для всех (σ,τ), лежащих на отрезке, соединяющем (α,β) и (γ,δ).

Построенную шкалу $W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$ естественно связать с классом обобщенных функций. Если в качестве основных взять пространство $W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$, то пространством обобщенных функций, построенных на этих основных функциях, является пространство $W_{-\beta}^{-\alpha}(\mathbb{R})$.

Рассмотрим некоторые операторы в пространствах $W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$. Главным достоинством пространств $W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$ является то, что они представляют непрерывную двойную шкалу гильбертовых пространств, компактно вложенных и хорошо приспособленных под преобразование Фурье. Шкалы $W_0^\alpha(\mathbb{R})$ и $W_\beta^0(\mathbb{R})$ являются аналитическими, поэтому в силу интерполяционной теоремы преобразование Фурье $\boldsymbol{F}$ осуществляет изоморфизм шкалы $W_0^\alpha(\mathbb{R})$ на $W_\alpha^0(\mathbb{R})$ и шкалы $W_\beta^0(\mathbb{R})$ на $W_0^\beta(\mathbb{R})$.

Пусть $f \in W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$, $\varphi(t)$ — функционал из $W_{-\beta}^{-\alpha}(\mathbb{R})$, принадлежащий $L_2(\mathbb{R})$, тогда в силу равенства Парсеваля

$$(f,\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}\{(t+i)^\beta f(t)\}\boldsymbol{F}\left\{\frac{\varphi(t)}{(t+i)^\beta}\right\}dt$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}^{-1}\{(x+i)^\alpha \boldsymbol{F}\{(t+i)^\beta f(t)\}\}\boldsymbol{F}^{-1}\{(x+i)^{-\alpha}\boldsymbol{F}\{(t+i)^\beta \varphi(t)\}\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\boldsymbol{F}^{-1}\{(x+i)^\alpha \boldsymbol{F}\{(t+i)^\beta f(t)\}\}\right|^2 dt\right)^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\boldsymbol{F}^{-1}\{(x+i)^{-\alpha} \boldsymbol{F}\{(t+i)^{-\beta} \varphi(t)\}\}\right|^2 dt\right)^{1/2}$$

Таким образом, сопряженное к $W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$ относительно скалярного произведения (f,φ) — это пополнение $L_2(\mathbb{R})$ по норме

$$\|\varphi\|_{W_{-\beta}^{-\alpha}} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\boldsymbol{F}^{-1}\{(x+i)^{-\alpha} \boldsymbol{F}\{(t+i)^{-\beta} \varphi(t)\}\}\right|^2 dt\right)^{1/2}$$

Определение 1. [1] Оператор преобразования Фурье обобщенной функции f из пространства $W_{-\beta}^{-\alpha}(\mathbb{R})$ определим формулой

$$(\boldsymbol{F}f, \Phi(x)) = (f, \varphi(-t)) \tag{9}$$

Здесь $\varphi(t) \in W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$, $f \in W_{-\beta}^{-\alpha}(\mathbb{R})$, $\Phi(x) \in W_\beta^\alpha(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{F}f \in W_{-\beta}^{-\alpha}(\mathbb{R})$

Таким образом, в силу определения 1 и свойства 7 преобразование Фурье $\boldsymbol{F}$ изоморфно действует из $W_{-\beta}^{-\alpha}(\mathbb{R})$ на $W_{-\alpha}^{-\beta}(\mathbb{R})$. Формулой (9) определяется и обратный оператор $\boldsymbol{F}^{-1}$:

$$(\boldsymbol{F}^{-1}F, \varphi(t)) = (F, \Phi(-x)).$$

Рассмотрим оператор свертки $\boldsymbol{A}$ и ему союзный $\boldsymbol{A}^*$ в смысле принятом в [1]. Пусть $k(t) \in L_1(\mathbb{R})$, а $\omega(t) \in W_0^\alpha(\mathbb{R})$, тогда свертка этих функций определена, причем оператор

$$(\boldsymbol{A}^*\omega)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(s-t)\omega(s)ds$$

(так же, как и $\boldsymbol{A}$) действует из $W_0^\alpha(\mathbb{R})$ в $W_0^\alpha(\mathbb{R})$ и ограничен. При этом справедлива формула свертки

$$\boldsymbol{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(s-t)\omega(s)ds\right\} = K(-x)\Omega(x) \tag{10}$$

В пространстве обобщенных функций оператор $\boldsymbol{A}$ определяется через сопряженный

$$(\boldsymbol{A}f, \omega(t)) = \left\{f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\omega(s)ds\right\} \tag{11}$$

для любой основной функции $\omega(t) \in W_0^\alpha(\mathbb{R})$. Причем $\boldsymbol{A} : W_0^{-\alpha}(\mathbb{R}) \to W_0^{-\alpha}(\mathbb{R})$ и ограничен.

Указанные свойства остаются справедливыми и для функции $f \in W_{-m}^{-\alpha}(\mathbb{R})$, если предположить, что $k(t)(t+i)^m \in \{0\}$, $m = 0, 1, \ldots, m$ или $L_1(\mathbb{R})$. Имеет место равенство(формула свертки):

$$(\boldsymbol{F}\{k * f\}, \Phi(x)) = (K(x)F, \Phi(x)) \tag{12}$$

которое должно соблюдаться для всех $\Phi(x) \in W_m^\alpha(\mathbb{R})$.

В силу характера уравнения типа плавного перехода (присутствует множителем функции e^{-t}) введем пространства $V^\alpha(\mathbb{R})$ функций $\zeta(t)$ (растущих экспоненциально на $-\infty$) представимых в виде $\zeta(t) \equiv (1+e^{-t})\omega(t)$, где $W_0^\alpha(\mathbb{R})$ с конечной нормой

$$\|\zeta\|_{V^\alpha} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\boldsymbol{F}^{-1}\left\{(x+i)^\alpha \boldsymbol{F}\left\{\frac{\zeta(t)}{1+e^{-t}}\right\}\right\}\right|^2 dt\right)^{1/2} \tag{13}$$

Пространство $V^\alpha(\mathbb{R})$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(\psi, \varphi)_{V^\alpha} = \left(\boldsymbol{F}^{-1}\left\{(x+i)^\alpha \boldsymbol{F}\left\{\frac{\psi(t)}{1+e^{-t}}\right\}\right\}, \boldsymbol{F}^{-1}\left\{(x+i)^\alpha \boldsymbol{F}\left\{\frac{\varphi(t)}{1+e^{-t}}\right\}\right\}\right)_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Через $V^{-\alpha}(\mathbb{R})$ обозначим пространство линейных ограниченных функционалов на $V^\alpha(\mathbb{R})$. Пользуясь теоремой Рисса, можно указать общий вид функционала из $V^{-\alpha}(\mathbb{R})$.

Для пространств $V^{\pm\alpha}(\mathbb{R})$, $W^{\pm\alpha}(\mathbb{R})$, имеют место вложения

$$W_0^\alpha(\mathbb{R}) \subset V^\alpha(\mathbb{R}), V^{-\alpha}(\mathbb{R}) \subset W_0^{-\alpha}(\mathbb{R}) \tag{14}$$

Действительно, если $\varphi \in V^{-\alpha}(\mathbb{R})$, то для любой функции $\zeta(t) \in V^\alpha(\mathbb{R})$ линейный функционал $\langle\varphi, \zeta\rangle$ ограничен $|\langle\varphi, \zeta\rangle| \leqslant c_1\|\zeta\|_{V^\alpha}$. Следовательно, для всех функций $\psi(t) \in W^{\alpha}(\mathbb{R})$ определено скалярное произведение $(\varphi, \psi)_{V^{\alpha}}$, причем $|\langle\varphi, \psi\rangle| \leqslant c_1\|\psi\|_{V^{\alpha}}$. Кроме того, имеет место оценка $\|\psi\|_{V^{\alpha}} \leqslant c\|\psi\|_{W^{\alpha}}$. Тем самым на $V^{-\alpha}(\mathbb{R})$ определен оператор преобразования Фурье как на подпространстве $W_0^{-\alpha}(\mathbb{R})$. Введем необходимый в дальнейшем оператор $(-D-1)^{-j}$, где $D = d/dt$.

Определение 2. Пусть $\varphi \in V^{-\alpha}(\mathbb{R})$ для любого $j \leqslant \alpha$, полагаем по определению $((-D-1)^{-j}\varphi, \zeta) = (\varphi, (D-1)^{-j}\zeta)$ для любой функции $\zeta(t) \in V^{\alpha-j}(\mathbb{R})$. Здесь

$$(D-1)^{-k}\omega(t) \equiv -\frac{e^t}{\Gamma(k)}\int\limits_t^{\infty}(t-\tau)^{k-1}e^{-\tau}\omega(\tau)d\tau.$$

Из определения следует, что оператор $(-D-1)^{-j}$ линейный, ограниченный и $(-D-1)^{-j} : V^{-\alpha}(\mathbb{R}) \to V^{-(\alpha-j)}(\mathbb{R})$, если линейный, ограниченный оператор $(D-1)^{-j}$ и $(D-1)^{-k} : V^k(\mathbb{R}) \to V^{j+k}(\mathbb{R})$, $0 \leqslant j \leqslant j+k \leqslant \alpha$. Это верно в силу того, что для любой функции $\zeta(t) \in V^j(\mathbb{R})$ $(D-1)^{-k}\zeta(t) \equiv \psi(t) \in V^{j+k}(\mathbb{R})$, $0 \leqslant j \leqslant j+k \leqslant \alpha$ и $\|\psi\|_{V^{j+k}} \leqslant const\|\psi\|_{V^j}$.

Воспользуемся введенным оператором $(-D-1)^{-j}$. Пусть $\varphi_1 \in V^{-n}(\mathbb{R})$, тогда функция

$$\varphi(t) = (-D-1)^{-n}\varphi_1 \in V^{-0}(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R}) \tag{15}$$

т.е. функция $\varphi(t) \in L_2(\mathbb{R})$, $e^{-t}\varphi(t) \in L_2(\mathbb{R})$ или $\varphi(t) \in \{0,1\} = V^{-0}(\mathbb{R})$ (см. [1], стр 138). В силу того, что $\varphi(t) \in V^{-0}(\mathbb{R}) = \{0,1\} \subset V^{-n}(\mathbb{R}) \subset W_0^{-n}(\mathbb{R})$, а $\varphi_1 \in V^{-n}(\mathbb{R}) \subset W_0^{-n}(\mathbb{R})$, равенство (15) определено в $W_0^{-n}(\mathbb{R})$, там же определено и преобразование Фурье, поэтому функция

$$\boldsymbol{F}\{\varphi(t)\}(x) = \Phi(x) = (ix-1)^{-n}\Phi_1(x) = \frac{i^n}{(x+i)^n}\Phi_1(x) \tag{16}$$

принадлежит пространству функций $\{\{0,1\}\} \equiv V_{-0}(\mathbb{R})$. Таким образом, пространство $V^{-\alpha}(\mathbb{R})$ – это пространство обобщенных функций $\varphi \in W_0^{-\alpha}(\mathbb{R})$, а интеграл Фурье $\Phi(x)$ этой функции обладает свойством аналитической продолжимости на полосу $\frac{\Phi(x)}{(x+i)^{\alpha}} \in \{\{0,1\}\}$ [1].

Определим оператор B умножения на e^{-t} $B : V^{-\alpha}(\mathbb{R}) \to W_0^{-\alpha}(\mathbb{R})$ следующим образом: $(e^{-t}\varphi, \omega(t)) = (\varphi, e^{-t}\omega(t))$, где $\varphi \in V^{-\alpha}(\mathbb{R})$, $\omega(t) \in W_0^{\alpha}(\mathbb{R})$, $e^{-t}\omega(t) \in V^{\alpha}(\mathbb{R})$ и $e^{-t}\varphi \in W_0^{-\alpha}(\mathbb{R})$.

Теперь будет иметь место соотношение $(\boldsymbol{F}e^{-t}\varphi, \Omega(x)) = (\Phi(x+i), \Omega(x))$, $\Omega(x) \in W_{\alpha}^0(\mathbb{R})$ для любой $\varphi \in V^{-\alpha}(\mathbb{R})$ и $\omega(t) \in W_0^{\alpha}(\mathbb{R})$.

2. Уравнение плавного перехода в пространстве $W_0^{-\alpha}(\mathbb{R})$

Рассмотрим уравнение плавного перехода (1) в предложении, что ядерные функции $k_1(t)$ и $k_2(t)$ заданы в пространстве $L_1(\mathbb{R})$ и выполнено условие нормальной разрешимости (4). Свободный член $g(t)$ зададим, а решение будем строить в пространстве обобщенных функций $W_0^{-n}(\mathbb{R})$. Запись (1) является условной, точный смысл следующий: требуется найти $W_0^{-n}(\mathbb{R})$ функцию u такую, что

$$\begin{gathered}(u,\omega(t))+\left(u,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k_1(s-t)\omega(s)ds\right)-(g,\omega(t))+(e^{-t}\varphi_1,\omega(t))=0\\(\varphi_1,\omega(t))=(u,\omega(t))+\left(u,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k_2(s-t)\omega(s)ds\right)-(g,\omega(t))\end{gathered}\qquad(17)$$

и которая обеспечивает обобщенной функции φ_1 принадлежность пространству $V^{-n}(\mathbb{R})\subset W_0^{-n}(\mathbb{R})$ (здесь определено произведение $e^{-t}\varphi_1$). Эти равенства выполняются для всех основных функций $\omega(t)\in W_0^n(\mathbb{R})$ и таких, что $e^{-t}\omega(t)\in V^n(\mathbb{R})$. Применим к (17) преобразование Фурье, получим

$$[1+K_1(t)]U(x)-G(x)+\Phi_1(x+i)=0$$

$$\Phi_1(x)=[1+K_2(t)]U(x)-G(x)$$

Исключив из этих условий функцию $U(x)$:

$$U(x)=\frac{G(x)+\Phi_1(x)}{1+K_2(x)}=\frac{G(x)-\Phi_1(x+i)}{1+K_1(x)}\qquad(18)$$

после введения новой неизвестной функции (см. (15), (16))

$$\Phi(x)=\frac{\Phi_1(x)}{(x+i)^n}\in\{\{0,1\}\}=V_{-0}(\mathbb{R})\qquad(19)$$

получим краевую задачу Карлемана:

$$\Phi(x)=-\left(\frac{x+2i}{x+i}\right)^n\frac{1+K_2(x)}{1+K_1(x)}\Phi(x+i)+H(x),x\in\mathbb{R}\qquad(20)$$

Здесь $H(x)$ — известная функция из $L_2(\mathbb{R})$:

$$H(x)=\frac{K_2(x)-K_1(x)}{1+K_1(x)}\frac{G(x)}{(x+i)^n}$$

Полученная задача Карлемана равносильна исходному уравнению (17), они одновременно разрешимы или нет; их решения взаимно-однозначно связаны формулами $u(t)=(\boldsymbol{F}^{-1}U)(t)$, (17), (19). Используя решение задачи Карлемана, получаем, что разрешимость уравнения плавного перехода (17) в $W_0^{-n}(\mathbb{R})$ определяется числом $\chi=ind(1+K_2(X))/(1+K_1(x))$ и, следовательно, не зависит от величины n, определяющей порядок обобщенных функций из пространства $W_0^{-n}(\mathbb{R})$.

Для полного исследования вопроса о применимости теории Нетера к уравнению плавного перехода (17) в пространстве обобщенных функций $W_0^{-\alpha}(\mathbb{R})$ рассмотрим сопряженное уравнение (3) в пространстве основных функций $W_0^{\alpha}(\mathbb{R})$.

Введением неизвестной функции $\varphi_1(t)=\psi(t)/(1+e^{-t})$ из пространства $W_0^{\alpha}(\mathbb{R})\bigcap\{0,1\}$ с последующим применением преобразования Фурье придем к равносильной задаче Карлемана

$$[1+K_1(-x)]\Phi_1(x)+[1+K_2(-x)]\Phi_1(x+i)=M(x),x\in\mathbb{R}\qquad(21)$$

Искомая функция $\Phi_1(x)$ обладает свойством $\Phi_1(x)(x+i)^\alpha \in \{\{0,1\}\} = V_{-0}(\mathbb{R})$, а свободный член $M(x)(x+i)^\alpha \in L_2(\mathbb{R})$. Следовательно, умножив обе части равенства (21) на $(x+i)^\alpha[1+K_1(-x)]^{-1}$, получим задачу Карлемана:

$$\Phi(x) = -\frac{1+K_2(-x)}{1+K_1(-x)}\left(\frac{x+i}{x+2i}\right)^\alpha \Phi(x+i) + H(x), x \in \mathbb{R}$$

.

Здесь новая неизвестная функция $\Phi(x) = \Phi_1(x)(x+i)^\alpha \in \{\{0,1\}\}$, а свободный член $H(x) = M(x)(x+i)^\alpha/(1+K_1(-x)) \in L_2(\mathbb{R})$. Таким образом, для сопряженного уравнения в $W_0^n(\mathbb{R})$ справедливы результаты, полученные для (3) в $L_2(\mathbb{R})$: разрешимость уравнения полностью определяется числом

$$\chi_* = ind\frac{1+K_2(x)}{1+K_1(x)}\left(\frac{x+i}{x+2i}\right)^\alpha = ind\frac{1+K_2(x)}{1+K_1(x)} = -\chi$$

. В случае $\chi < 0$ однородное уравнение имеет ровно $|\chi|$ линейно независимых решений, а неоднородное — безусловно разрешимо. Если $\chi = 0$, то решение уравнения (3) существует при любой правой части $m(t) \in W_0^n(\mathbb{R})$ и единственно. При $\chi > 0$ однородное уравнение имеет лишь нулевое решение, а для разрешимости неоднородного необходимы и достаточны χ условий разрешимости.

Во всех случаях, когда решение сопряженного уравнения (3) существует, его можно построить в квадратурах по формуле $\psi(t) = (1+e^{-t})\boldsymbol{F}^{-1}\left(\frac{\Phi(x)}{(x+i)^n}\right)$. Исходя из полученных уравнений $\boldsymbol{K}u = g$ в $W_0^{-\alpha}(\mathbb{R})$ и $\boldsymbol{K}^*\psi = m$ в $W_0^\alpha(\mathbb{R})$, можно сделать вывод, что для этих уравнений справедливы теоремы Нетера. Уравнения нормально разрешимы, причем разрешимость не зависит от показателя пространстваα; индекс оператора $\boldsymbol{K}$ в $W_0^\alpha(\mathbb{R})$ определяется формулой:

$$Ind\boldsymbol{K} = \chi = ind\frac{1+K_2(x)}{1+K_1(x)}$$

3. Уравнение плавного перехода в пространстве $W^0_{-\beta}(\mathbb{R})$

Предварительно рассмотрим задачу Риммана, эквивалентную соответствующей задаче Карлемана в специальном пространстве $W^m_{2,m}(\mathbb{R})$ (типа пространств С.Л. Соболева с весом):

$$W^m_{2,m}(\mathbb{R}) = \left\{\varphi(\xi) \;\middle|\; \left(\xi^k \frac{d^k}{d\xi^k}\right)\psi(\xi) \in L_2(\mathbb{R}), k = 1,2,\ldots,m\right\}$$

Пусть даны: функция $H_1(\xi) \in W^m_{2,m}(\mathbb{R})$ и функция $A_1(\xi) \neq 0, A_1(\pm \propto) = 1$ такая, что функции

$$\left(\xi^k \frac{d^k}{d\xi^k}\right)A_1(\xi) \in H_\mu(\mathbb{R}), k = 0,1,\ldots,m \qquad (22)$$

т.е. удовлетворяют условию Гельдера на всей вещественной оси. Пространство функций, удовлетворяющих условию (22), будем обозначать через$H_\mu^m(\mathbb{R})$. Требуется найти функции$F^{\pm}(\xi)$, представимые интегралом коши с плотностью из $W_{2,m}^m(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\propto}^{\propto}\frac{\Omega(\tau)}{\tau-\varsigma}d\tau=\begin{cases}F^+(\varsigma), & \operatorname{Im}\varsigma>0,\\ F^-(\varsigma), & \operatorname{Im}\varsigma<0\end{cases}$$

удовлетворяющие краевому условию $F^+(\xi)=A_1(\xi)F^-(\xi)+H_1(\xi),\xi\in\mathbb{R}$.

При $m=0$ решение этой задачи известно [1] и зависит от $\chi=indA_1(\xi)$. Эти же результаты будут справедливы и при $m\neq 0$.

Лемма 1. *Функция* $M(\xi)=ln\Big[\Big(\frac{\xi+i}{\xi-i}\Big)^{\chi}A_1(\xi)\Big]$ *удовлетворяет условиям* (22), *т.е.* $M(\xi)\in H_\mu^m(\mathbb{R})$, *кроме того*$M(\pm\propto)=0$.

Обозначим выражение в квадратных скобках через $y(\xi)$, т.е. $M(\xi)=\ln y(\xi)$ и воспользуемся формулой для производной сложной функции $\frac{d^k}{d\xi^k}M(\xi)=\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{c_j}{y^j}\frac{d^ky^j}{d\xi^k}$, здесь первый сомножитель $y^{-j}\in H_\mu(\mathbb{R})$. Так как

$$y^j=\Big[\Big(\frac{\xi+i}{\xi-i}\Big)^{\chi}A_1(\xi)\Big]^j=\Big(1+\frac{2i}{\xi-i}\Big)^{\chi j}A_1^j(\xi)=\sum_{p=0}^{\chi j}c_{\chi j}^p\Big(\frac{2i}{\xi-i}\Big)^pA_1^j(\xi),$$

то для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\xi^k\frac{d^k}{d\xi^k}\Big[\Big(\frac{2i}{\xi-i}\Big)^pA_1^j(\xi)\Big]=\xi^k\sum_{q=0}^{k}c_k^q\frac{d^q}{d\xi^q}\Big(\frac{2i}{\xi-i}\Big)^p\frac{d^{k-q}}{d\xi^{k-q}}A_1^j(\xi)\in H_\mu(\mathbb{R}),$$

$$k=0,1,\ldots,m;p=0,1,\ldots,\chi j.$$

или каждое слагаемое $\Big[\xi^q\frac{d^q}{d\xi^q}\Big(\frac{2i}{\xi-i}\Big)^p\Big]\Big[\xi^{k-q}\frac{d^{k-q}}{d\xi^{k-q}}A_1^j(\xi)\Big]\in H_\mu(\mathbb{R}),q=0,1,\ldots,k.$

Для функции $A_1^j(\xi),j=1,2,\ldots,m$ выполняются условия (22), поэтому второй сомножитель принадлежит$H_\mu(\mathbb{R})$. Первый сомножитель представим в виде

$$c(\xi)^q\Big(\frac{2i}{\xi-i}\Big)^{p+q}=c\Big(\frac{2i\xi}{\xi-i}\Big)^q\Big(\frac{2i}{\xi-i}\Big)^p,$$

откуда видна ограниченность его производной, поэтому он также удовлетворяет условию Гельдера

Лемма 2. *Для того чтобы функция* $M(\xi)$ *такая, что*$M(\pm\propto)=0$, *удовлетворяла условиям* $\xi^k\frac{d^k}{d\xi^k}M(\xi)\in H_\mu(\mathbb{R})(M(\xi)\in H_\mu^m(\mathbb{R}))$ *необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\xi^k\frac{d^k}{d\xi^k}(\mathbf{S}M)(\xi)\in H_\mu(\mathbb{R})$$

$$(\mathbf{S}M)(\xi) \equiv \frac{1}{1\pi i}\int\limits_{-\propto}^{\propto} \frac{M(\tau)}{\tau - \varsigma} d\tau((\mathbf{S}M)(\xi) \in H_\mu^m(\mathbb{R}))$$

Доказательство. Преобразуем правую часть формулы

$$\frac{d}{d\xi}(\boldsymbol{S}M)(\xi) = \boldsymbol{S}\Big(\frac{d}{d\tau}M\Big)(\tau) \tag{23}$$

к виду $\boldsymbol{S}\big[\tau\big(\frac{d}{d\tau}M\big)\frac{1}{\tau}\big](\xi) = \frac{1}{\xi}\boldsymbol{S}\big(\tau\frac{d}{d\tau}M\big)(\xi)$

Здесь учтено равенство $\frac{1}{\tau(\tau-\xi)} = \frac{1}{\xi(\tau-\xi)} - \frac{1}{\tau\xi}$ и то, что $M(\pm\propto) = 0$. Умножив обе части преобразованной таким образом формулы на ξ, придем к соотношению

$$\xi\frac{d}{d\xi}(\boldsymbol{S}M)(\xi) = \boldsymbol{S}\Big(\tau\frac{d}{d\tau}M\Big)(\xi)$$

в правой части которого стоит функция из $H_\mu(\mathbb{R})$, следовательно, и слева функция $\xi\frac{d}{d\xi}(SM)(\xi) \in H_\mu(\mathbb{R})$. Окончательный результат получаем по индукции. Предполагая справедливым соотношение

$$\xi^j\frac{d^j}{d\xi^j}(\boldsymbol{S}M)(\xi) = \boldsymbol{S}\Big(\tau^j\frac{d^j}{d\tau^j}M\Big)(\xi) \tag{24}$$

для $j(j+1 \leqslant m)$, в силу которого левая часть принадлежит$H_\mu(\mathbb{R})$, и, повторяя рассуждения, приведенные при выводе формулы (24) для $j = 1$ получим, что формула (24) справедлива для $j \leqslant m$.

Следствие 1. *Сингулярный оператор осуществляет изоморфизм пространства $W_{2,m}^m(\mathbb{R})$ на себя, и для любой функции $M(\xi) \in W_{2,m}^m(\mathbb{R})$ справедлива формула* (24).

Согласно лемме 2 и того, что $S^2 = I$, этот результат имеет место для функций $M(\xi) \in H_\mu^m(\mathbb{R}), M(\pm\propto) = 0$. Для доказательства следствия 1 достаточно заметить, что равенство (23) справедливо для функций $M(\xi) \in W_{2,1}^1(\mathbb{R})$ и повторить рассуждения, проведенные при выводе соотношения (24).

Следствие 2. *Из лемм 1, 2 следует, что факторизующие функции*

$$X^+(\xi) = \exp\Big\{\frac{1}{2}M(\xi) + \frac{1}{2}(\mathbf{S}M)(\xi)\Big\}$$

$$X^-(\xi) = \Big(\frac{\xi+i}{\xi-i}\Big)^\chi \exp\Big\{-\frac{1}{2}M(\xi) + \frac{1}{2}(\mathbf{S}M)(\xi)\Big\}$$

входящие в формулы для решения задачи Римана, таковы, что все величины $\Big(\xi^k\frac{d^k}{d\xi^k}\Big)X_\pm(\xi), k = 0, 1, \ldots, m$ ограничены. Так как функции $X^\pm(\xi)$ не обращаются в нуль, следствие верно и для функций $[X^\pm(\xi)]^{-1}$.

Теорема 3. *При $\chi \geqslant 0$ задача Римана разрешима при любой функции $H_1(\xi) \in W_{2,m}^m(\mathbb{R})$. Общее решение содержит ровно χ линейно независимых составляющих и определяется формулами*

$$F^{\pm}(\xi) = X^{\pm}(\xi)\Big[\Psi^{\pm}(\xi) + \frac{P_{k-1}(\xi)}{(\xi+i)^k}\Big]$$

В $\chi < 0$случае для разрешимости необходимыми и достаточными являются условия

$$\int\limits_{-\propto}^{\propto} \frac{H_1(\xi)d\xi}{X^+(\xi)(\xi+i)^k} = 0, k = 1, 2, \ldots, |\chi|.$$

При $\chi \leqslant 0$ решение задачи единственно и дается формулами

$$F^{\pm}(\xi) = X^{\pm}(\xi)\Big[\Psi^{\pm}(\xi) + \frac{P_{k-1}(\xi)}{(\xi+i)^k}\Big],$$

где $P_{\chi-1}(\xi) \equiv 0$. Решение $F^{\pm}(\xi) \in W_{2,m}^m(\mathbb{R})$, т.е.

$$\Big(\xi^k \frac{d^k}{d\xi^k}\Big)F^{\pm}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}), k = 0, 1, \ldots, m.$$

Доказательство. теоремы следует из решения задачи Римана в классе $L_2(\mathbb{R}) \supset W_{2,m}^m(\mathbb{R})$. Покажем, что решение $F^{\pm}(\xi) \in W_{2,m}^m(\mathbb{R})$. Для этого при дифференцировании в выражении $\Big(\xi^k \frac{d^k}{d\xi^k}\Big)F^{\pm}(\xi)$ применим правило Лейбница и получим, что в правой части будут слагаемые вида

$$\Big\{c\xi^k[X^{\pm}(\xi)]^{(j)}\Big\}\Bigg\{\Big[\pm\frac{H_1(\xi)}{2X^+(\xi)} + \frac{1}{2}\Big(S\frac{H_1}{X^+}\Big)(\xi) + \frac{P_{\chi-1}(\xi)}{(\xi+i)^{\chi}}\Big]^{(k-j)}\xi^{k-j}\Bigg\}$$

Первый сомножитель ограничен согласно следствию 2, выражение $\xi^j\left[\frac{P_{\chi-1}(\xi)}{(\xi+i)^{\chi}}\right]^{(j)}$ также из нужного пространства. Функция $H_1(\xi)/X^+(\xi) \in W_{2,m}^m(\mathbb{R})$, и согласно следствию 1 $S(H_1/X^+)(\xi) \in W_{2,m}^m(\mathbb{R})$, поэтому и второй сомножитель принадлежит $W_{2,m}^m(\mathbb{R})$.

Используя полученное решение задачи Римана в пространстве $W_{2,m}^m(\mathbb{R})$, исследуем уравнение плавного перехода (1) (или (2), (3)) в пространстве основных функций $W_m^0(\mathbb{R})$. Будем предполагать выполненными условия

$$\begin{gathered} k_j(t) \in W_m^0(\mathbb{R}), \frac{d^m}{dx^m}\{K_j(x)\} \in H_{\mu}(\mathbb{R}) \\ 1 + K_j(x) \neq 0, j = 1, 2; g(t) \in W_m^0(\mathbb{R}) \end{gathered} \tag{25}$$

Решение $u(t)$ ищется в $W_0^m(\mathbb{R})$. Тогда функция $\varphi(t)$ обладает свойствами:

$$\varphi(t), e^{-t}\varphi(t) \in W_m^0(\mathbb{R}) \tag{26}$$

и имеет место следующая теорема:

Теорема 4. *Для того чтобы функция $\varphi(t)$ удовлетворяла условиям (26), необходимо и достаточно, чтобы ее интеграл Фурье $\Phi(x)$ удовлетворял условиям:*

1. Функции $\frac{d^j}{dx^j}\Phi(x), j = 0,1,\ldots,m$ аналитически продолжим на полосу $0 < Im\, z < 1$;

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d^j}{dx^j}\Phi(x+iy)\right|^2 dx < c$ равномерно для всех $y : 0 \leqslant y \leqslant 1$;

С помощью преобразования Фурье и теоремы 4 получим краевую задачу Карлемана в пространстве $W_0^m(\mathbb{R})$. Введением неизвестной функции

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}}\Phi\left(\frac{\ln\zeta}{2\pi}\right), \tag{27}$$

приходим к задаче Римана для $\xi > 0$ или к задаче Римана в пространстве функций $W_{2,m}^m(\mathbb{R})$. относительно новой кусочно-аналитической функции

$$F(\zeta) = \begin{cases} F^+(\zeta), & Im\,\zeta > 0; \\ F^-(\zeta), & Im\,\zeta < 0. \end{cases}$$

такой, что

$$F(\xi) = \omega^{\pm}(\xi), \xi > 0, \quad F^+(\xi) = F^-(\xi), \xi < 0 \tag{28}$$

Убедимся , что функции $F^{\pm}(\xi), A_1(\xi), H_1(\xi)$ из нужных пространств. Коэффициент задачи Римана $A_1(\xi)$ определяется формулой:

$$A_1(\xi) = 1 + D_1(\xi),$$

где

$$D_1(\xi) = \begin{cases} \left[K_2\left(\frac{\ln\xi}{2\pi}\right) - K_1\left(\frac{\ln\xi}{2\pi}\right)\right]/\left[1 + K_1\left(\frac{\ln\xi}{2\pi}\right)\right], & \xi > 0; \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

Функция $A_1(\xi) \neq 0, A_1(\pm\propto) = 1$ $(D_1(\pm\propto) = 0)$ и удовлетворяет условиям (22), т.е. $A_1(\xi) \in H_\mu^m(\mathbb{R})$, в силу условий (25), налагаемых на ядерные функции. Свободный член $H_1(\xi)$:

$$H_1(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\xi}}G_1\left(\frac{\ln\xi}{2\pi}\right), & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases},$$

где

$$G_1(\xi) = G(x)\frac{K_2(x) - K_1(x)}{1 + K_1(x)} \in W_m^0(\mathbb{R})$$

Воспользуемся тем, что $H_1(\xi) \in W_{2,m}^m(\mathbb{R})$, точнее $W_{2,m}^m(0,\propto)$ и функции $F^{\pm}(\xi)$ представимы интегралом типа Коши с плотностью из $\in W_{2,m}^m(\mathbb{R})$. Приведем соответствующие результаты.

Лемма 3. *Для того чтобы функция* $H_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} G_1\left(\frac{\ln \xi}{2\pi}\right) \in W^m_{2,m}(0, \propto)$ *удовлетворяла условию* $\xi^j \frac{d^j}{d\xi^j} H_1(\xi) \in L_2(0, \propto), j = 0, 1, \ldots, m$, *необходимо и достаточно, чтобы* $G_1(\xi) \in W^m_0(\mathbb{R})$.

Теорема 5. *Для того чтобы функция* $\Phi(x)$ *удовлетворяла условиям 1,2 теоремы 4, необходимо и достаточно, чтобы функция* (27) *была представима интегралом типа Коши:*

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\propto}^{\propto} \frac{\Omega(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau, \quad \Omega(\tau) \in W^m_{2,m}(0, \propto).$$

Таким образом, функция $F(\zeta)$ связанная с $\omega(\zeta)$ формулами (28), представима интегралом типа Коши на всей вещественной оси с плотностью $\Omega(\tau) \equiv 0, \tau < 0$, т.е. $\Omega(\tau) \in W^m_{2,m}(\mathbb{R})$.

Полученная задача Римана эквивалентна задаче Карлемана в $W^m_0(\mathbb{R})$ и тем самым - исходному интегральному уравнению (1) в пространстве $W^m_0(\mathbb{R})$, что следует из теоремы 5. Согласно лемме 3 функция $\Phi(x) = F^+(e^{2\pi x})e^{\pi x} \in W^m_0(\mathbb{R})$, решение $u(t) \in W^0_m(\mathbb{R})$. Тем самым показано, что для уравнения плавного перехода (1) в пространстве функций $W^0_m(\mathbb{R})$ при выполнении условий (15) справедлива теорема Нетера. Разрешимость уравнения (1) или (2): $Ku = g$ в $W^0_m(\mathbb{R})$ определяется индексом χ и не зависит от показателя m пространства $W^0_m(\mathbb{R})$.

Полученные результаты применим к союзному уравнению (3): $\boldsymbol{K}^*\psi = m$ в пространстве $W^0_m(\mathbb{R})$. При этом новая неизвестная функция $\varphi(t) = \frac{\psi(t)}{1+e^{-t}} \in \{0, 1\} \cap W^0_m(\mathbb{R})$ удовлетворяет теореме 3.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (25), $-\chi = ind \frac{1+K_2(-x)}{1+K_1(-x)}$. *Тогда в случае* $\chi < 0$ *однородное уравнение* (3) *имеет* $|\chi|$ *линейно независимых решений, а неоднородное — безусловно разрешимо. Если* $\chi = 0$, *то решение уравнения* (3) *существует при любой правой части* $m(t) \in W^0_m(\mathbb{R})$ *и единственно. При* $\chi > 0$ *однородное уравнение имеет лишь нулевое решение, а для разрешимости неоднородного необходим и достаточны условия*

$$\int\limits_{-\propto}^{\propto} \frac{M(s)e^{\pi s} ds}{[1 + K_1(-s)]X^+(e^{2\pi s})(e^{2\pi s} + i)^k} = 0, k = 1, 2, \ldots, |\chi| \tag{29}$$

Во всех случаях, когда решение союзного уравнения существует, его можно построить в квадратурах по формуле

$$\psi(t) = (1 + e^{-t})\boldsymbol{F}^{-1}\{\Phi(x)\}(t) \tag{30}$$

где функция $\Phi(x)$, определяется формулами

$$\Phi(x) = F^+(e^{2\pi x})e^{\pi x}, \Phi(x + i) = F^-(e^{2\pi x})e^{\pi x},$$

$$e^{\pi x}F^{\pm}(e^{2\pi x}) = X^{\pm}(e^{2\pi x})\left[\Psi^{\pm}(e^{2\pi x}) + \frac{P_{-\chi-1}(e^{2\pi x})}{(e^{2\pi x}+i)^{-\chi}}\right]e^{\pi x},$$

$$e^{\pi x}\Psi^{\pm}(e^{2\pi x}) = \pm\frac{H(x)}{2X^{+}(e^{2\pi x})} + \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{H(s)ds}{X^{+}(e^{2\pi s})\operatorname{sh}\pi(s-x)},$$

$$\ln X^{\pm}(e^{2\pi x}) = \frac{1}{2}\ln\left[A(x)\Big(\frac{e^{2\pi x}}{e^{2\pi x}-i}\Big)^{-\chi}\right] + \frac{1}{i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\left[A(s)\Big(\frac{e^{2\pi s}}{e^{2\pi s}-i}\Big)^{-\chi}\right]}{1-e^{2\pi(x-s)}}ds-$$

$$-\frac{-\chi}{i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\Big(\frac{e^{2\pi s}-i}{e^{2\pi s}+i}\Big)}{1+e^{2\pi(x-s)}}ds,$$

в которых следует положить

$$A(x) = \frac{1+K_2(-x)}{1+K_1(-x)}$$

Теорема 6 позволяет получить решения уравнения плавного перехода $Ku = g$ в пространстве обобщенных функций $W^0_{-m}(\mathbb{R})$. Пусть дан элемент $g \in W^0_{-m}(\mathbb{R})$, требуется найти в пространстве $W^0_{-m}(\mathbb{R})$ элемент u по условию: для всех $\psi \in W^0_m(\mathbb{R})$ должно выполняться равенство

$$(u, \boldsymbol{K}^*\psi) = (g, \psi) \tag{31}$$

Прежде всего заметим, что условие разрешимости (29) уравнения $\boldsymbol{K}^*\psi = m$ в $W^0_m(\mathbb{R})$ можно записать в виде равенства нулю функционалов

$$(u_k(t), m(t)) = 0, k = 1, 2, \ldots, |\chi|, \tag{32}$$

где $u_k(t) = \boldsymbol{F}^{-1}\left\{\left[(e^{-2\pi s}+i)^k e^{\pi s}[1+K(s)]X^{+}(e^{-2\pi s})\right]^{-1}\right\}$, т.е. в виде условий ортогональности свободного члена $m(t) \in W^0_m(\mathbb{R})$ функциям $u_k(t)$.

Решение (30) союзного уравнения перепишем в виде

$$\psi(t) = Lm + \sum_{k=1}^{-\chi} c_k\psi_k(t) \tag{33}$$

Здесь обозначено

$$(Lm)(t) = (1+e^{-t})\boldsymbol{F}^{-1}\{X^{+}(e^{2\pi x})\Psi^{+}(e^{2\pi x})e^{\pi x}\}(t),$$

$$\psi_k(t) = (1+e^{-t})\boldsymbol{F}^{-1}\left\{X^{+}(e^{2\pi x})\frac{e^{\pi(2k-1)x}}{(e^{2\pi x}+i)^{-\chi}}\right\}(t), k = 1, 2, \ldots, |\chi|$$

Можно сделать вывод:

Теорема 7. *Если $\chi = 0$, то уравнение $\mathbf{K}u = g$ в пространстве обобщенных функций $W^0_{-m}(\mathbb{R})$ имеет при любой правой части g единственное решение $u = \mathbf{K}^{-1}g$, где $\mathbf{K}^{-1}g$ - обобщенная функция, определяемая равенством* (31) *или по другому* $(\mathbf{K}^{-1}g, m) = (g, Lm)$. *Если $-\chi > 0$, то решение существует и единственно лишь при выполнении $|\chi|$ условий*

$$(g, \psi_k(t)) = 0, k = 1, 2, \ldots, |\chi|,$$

где функции $\psi_k(t)$ определяются формулой (33). *Если $-\chi < 0$, то решение содержит $-\chi$ произвольных постоянных и имеет вид $u = \mathbf{K}^{-1}g + \sum\limits_{k=1}^{-\chi} b_k u_k(t)$, где $b_k = (u - \mathbf{K}^{-1}g, w_k(t)), w_k(t) \in W^0_m(\mathbb{R})$ — система основных функций, ортогональная системе функций $u_k(t)$.*

В силу применявшихся рассуждений, полученные выводы остаются верными при произвольном выборе параметра β в $W^0_{\pm\beta}(\mathbb{R})$. Заметим, что исследование уравнения плавного перехода в пространствах $W^{-\alpha}_{-\beta}(\mathbb{R})$, при соответствующих ограничениях на ядра, может быть сведено к исследованию в пространстве $W^0_{-\beta}(\mathbb{R})$.

Заключение

В работе получены необходимые для изучения уравнения плавного перехода свойства двухиндексных шкал (пространств основных и обобщенных функций) и некоторых вспомогательных пространств. Показано, что, в отличие от уравнения Винера-Хопфа, разрешимость исследуемого уравнения в таких шкалах не зависит от индексов шкал. Приведенные выкладки позволяют находить решения в квадратурах (как в классическом случае). Представляет интерес изучение такого типа интегральных уравнений в случае, когда в соответствующей задаче Карлемана возможна непосредственная факторизация без перехода к задаче Римана.

Список литературы

1. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
2. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. – М.: Физматлит, 1994. – 336 с.
3. Дуручаев Р.В. Интегральные уравнения свертки с разрывным предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. – Тбилиси :Мициереба, 1979.
4. Крейн С.Г., Петушин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
5. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М: Наука, 1977.
6. Лукьяненко В.А. Уравнения плавного перехода в одном классе обобщенных функций // Динамические системы, вып.2, 1983. – С.89-94.

7. Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином // ПММ, 1974, т.38, вып.2. – С.312-320.
8. Рогожин В.С. Общая схема решения краевых задач в пространствах обобщенных функций // ДАН СССР, 164, №2, 1965. – С. 277-280.
9. Шевчик В.В. Интегральные уравнения типа свертки в семействе пространств обобщенных функций, непрерывно зависящих от параметра // Диф. ур., 1978, т.14, №11, С.2060-2064.
10. Prosser R.T. A double scale of weighted L_2 spaces. – Bulletin of American mathematical society, Vol. 81, №3, 1975, P.615-618.