УДК 521.542

О ПРОИЗВОДНОЙ π-ДЛИНЕ КОНЕЧНОЙ π-РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

О.А. Шпырко

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Черноморский филиал
ул.Героев Севастополя, 7, г.Севастополь, Украина, 99001
e-mail: *shpyrko@mail.ru*

Abstract.
All groups concidered in this paper are finite. The main aim in this note is receipt bounds of derived π-length for a π-soluble group depending on nilpotent π-length and derived length of π-Hall subgroups.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют, принятым в [1].

Пусть $\mathfrak{E}_{\pi'}$ – формация всех π'-групп, а $\mathfrak{F}$ – одна из следующих формаций:

$\mathfrak{A}_\pi$ – формация всех абелевых π-групп;

$\mathfrak{N}_\pi$ – формация всех нильпотентных π-групп;

$\mathfrak{S}_\pi$ – формация всех разрешимых π-групп.

Произведение $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F}$ является формацией. Ясно, что формация $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F}$ состоит из π'-замкнутых групп с π-холловой подгруппой, принадлежащей $\mathfrak{F}$. Ясно также, что

$$\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{A}_\pi \subseteq \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{S}_\pi.$$

Если G – неединичная π-разрешимая группа, то $G \neq G^{\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F}}$. Поэтому $G \in (\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F})^{(t)}\mathfrak{E}_{\pi'}$, для некоторого натурального t. Если

$$G \in (\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F})^{(t)}\mathfrak{E}_{\pi'} \backslash (\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F})^{(t-1)}\mathfrak{E}_{\pi'},$$

то число t назовем $\mathfrak{F}$-длиной группы G и обозначим через $l_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$.

При $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_\pi$ вместо $l_\pi^{\mathfrak{A}_\pi}(G)$ будем писать $l_\pi^a(G)$ и говорить о производной π-длине группы G. При $\pi(G) \subseteq \pi$ получаем определение производной длины разрешимой группы G, которую будем обозначать через $d(G)$.

Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi$, то вместо $l_\pi^{\mathfrak{N}_\pi}(G)$ будем писать $l_\pi^n(G)$ и говорить о нильпотентной π-длине группы G. При $\pi(G) \subseteq \pi$ получаем определение нильпотентной длины разрешимой группы G, которую будем обозначать через $n(G)$.

Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$, то вместо $l_\pi^{\mathfrak{S}_\pi}(G)$ будем писать $l_\pi(G)$ и говорить о π-длине группы G. При $\pi(G) \subseteq \pi$ получаем, что $l_\pi(G) = 1$. При $\pi = \{p\}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ получаем определение p-длины p-разрешимой группы, предложенное Ф. Холлом и Г. Хигменом. Элементарная теория p-длины изложена в [2]. Обзор результатов по p-длине содержится в статье В.Д. Мазурова [3]. Отдельные результаты о p-длине легко переносились на π-длину π-разрешимых групп.

Для единичной группы E положим $l_\pi^a(E) = l_\pi^n(E) = l_\pi(E) = 0$. Ясно, что $l_\pi^a(G) \leqslant l_\pi^n(G) \leqslant l_\pi(G)$ для любой π-разрешимой группы G.

В работах [4]-[7] исследовалась зависимость $l_\pi^n(G)$ и $l_\pi(G)$ от производной длины π-холловой подгруппы π-разрешимой группы G. В частности, в [7] доказано, что $l_\pi^n(G) \leqslant d(G)$, если $2 \notin \pi$. Здесь G_π – π-холловая подгруппа группы G.

В настоящей заметке исследуется зависимость производной π-длины $l_\pi^a(G)$ π-разрешимой группы G с нильпотентной π-длиной $l_\pi^n(G)$ группы G и производной длиной $d(G_\pi)$ ее π-холловой подгруппы.

Вспомогательные утверждения

Пусть G – π-разрешимая группа. Введем $(\pi', \pi^a)^*$-ряд группы G:

$$G = A_0 \geqslant B_0 > A_1 > B_1 > \ldots > A_t \geqslant B_t = 1,$$

где $B_0 = G^{\mathfrak{E}_{\pi'}} = O^{\pi'}(G)$ – наименьшая нормальная подгруппа группы G, факторгруппа по которой G/B_0 – π'-группа; $A_0 = G^{\mathfrak{A}_\pi}$ – наименьшая нормальная подгруппа группы G, факторгруппа по которой G/A_0 – абелева π-группа; $\ldots$; $B_i = A_i^{\mathfrak{E}_{\pi'}} = O^{\pi'}(G)$ – наименьшая нормальная подгруппа группы A_i, факторгруппа по которой A_i/B_i – π'-группа; $A_{i+1} = B_i^{\mathfrak{A}_\pi}$ – наименьшая нормальная подгруппа группы B_i, факторгруппа по которой B_i/A_{i+1} – абелева π-группа. Наименьшее натуральное число t, для которого $B_t = 1$, назовем производной π-длиной группы G и обозначим через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что $l_\pi^a(G/B_i) = t - i$, $i \leqslant t = l_\pi^n(G)$, а $l_\pi^a(A_i) = t - i$.

Лемма 1. *$G^{\mathfrak{E}_{\pi'}} = (G^{\mathfrak{E}_{\pi'}})^{\mathfrak{E}_{\pi'}}$; $G^{\mathfrak{A}_\pi} = (G^{\mathfrak{A}_\pi})^{\mathfrak{A}_\pi}$.*

Доказательство. Пусть $K = (G^{\mathfrak{E}_{\pi'}})^{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ – наименьшая нормальная подгруппа группы $G^{\mathfrak{H}_{\pi'}}$, факторгруппа по которой $G^{\mathfrak{E}_{\pi'}}/K$ – π-группа. Так как K *char* $G^{\mathfrak{E}_{\pi'}} \lhd G$, то $K \lhd G$. Теперь $|G : K| = |G : G^{\mathfrak{E}_{\pi'}}| \cdot |G^{\mathfrak{E}_{\pi'}} : K|$ – π'-группа. Отсюда, $G^{\mathfrak{E}_{\pi'}} \leqslant K$, следовательно, $G^{\mathfrak{E}_{\pi'}} = K$. Аналогично доказывается и второе равенство. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $l_\pi^a(G) \leqslant 1$;
(2) $(G^{\mathfrak{E}_{\pi'}})^{\mathfrak{A}_\pi}$ – π'-*группа.*

Доказательство следует из определения производной π-длины и предыдущей леммы.

Лемма 3. *Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда в любом (π', π^a)-ряде группы G число неединичных абелевых π-факторов не меньше, чем $l_\pi^a(G)$.*

Доказательство. Так как $G^{\mathfrak{A}_\pi}$ – наименьшая нормальная подгруппа группы G, факторгруппа по которой $G/G^{\mathfrak{A}_\pi}$ – абелева π-группа, то если:

$$1 = G_k \leqslant G_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant G_i \leqslant G_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant G_1 \leqslant G_0 = G \ -$$

некоторый (π', π^a)-ряд группы G с абелевыми π-факторами, то в силу включения $G_{i+1} \geqslant G_i^{\mathfrak{A}_\pi}$, $i = 1, \ldots, k$, число абелевых π-факторов не меньше производной π-длины группы G. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда:*

(1) *если $H \leqslant G$, то $l_\pi^a(H) \leqslant l_\pi^a(G)$;*
(2) *если $N \lhd G$, то $l_\pi^a(G/N) \leqslant l_\pi^a(G)$;*
(3) $l_\pi^a(G/(N_1 \cap N_2)) \leqslant l_\pi^a(G/N_1 \times G/N_2)$.

Доказательство. (1): Пересекая $(\pi', \pi^a)^*$-ряд группы G с подгруппой H, получаем:

$$H = G \cap H = (A_0 \cap H) \geqslant (B_0 \cap H) > (A_1 \cap H) > (B_1 \cap H) > \ldots > (A_t \cap H) \geqslant (B_t \cap H) = 1 \cap H = H.$$

Так как $H \cap B_i \lhd H$, $H \cap A_i \lhd H$, и $(B_i \cap H)/(A_i \cap H)$ – π'-группа, то полученный ряд – (π', π^a)-ряд группы H. Согласно лемме 3 $l_\pi^a(H) \leqslant l_\pi^a(G)$.

(2): Так как $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N$, где $\mathfrak{F}$ – некоторая формация, то $(\pi', \pi^a)^*$-ряд группы G будет (π', π^a)-рядом группы G/N вида:

$$G/N = A_0N/N \geqslant B_0N/N > A_1N/N > B_1N/N > \ldots > A_tN/N \geqslant B_tN/N = 1,$$

так как его факторы являются либо абелевыми π-факторами, так как $|(A_iN/N)/(B_iN/N)| = |A_iN/B_iN| = \frac{|A_i:B_i|}{|(A_i \cap N):(B_i \cap N)|}$ – π-число, либо π'-факторами, так как $|(B_iN/N)/(A_{i+1}N/N)| = |B_iN/A_{i+1}N| = \frac{|B_i:A_{i+1}|}{|(B_i \cap N):(A_{i+1} \cap N)|}$ – π'-число. По лемме 3 $l_\pi^a(G/N) \leqslant l_\pi^a(G)$.

(3): Так как $G/(N_1 \cap N_2) \simeq G/N_1 \times G/N_2$ и $(G/(N_1 \cap N_2))^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}(N_1 \cap N_2)/(N_1 \cap N_2) \simeq G^{\mathfrak{F}}N_1/N_1 \times G^{\mathfrak{F}}N_2/N_2$, то $l_\pi^a(G/(N_1 \cap N_2) \leqslant l_\pi^a(G/N_1 \times G/N_2) = \max_{i=1,2} l_\pi^a(G/N_i)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Класс всех π-разрешимых групп с производной π-длиной не превышающей некоторого натурального числа k образует наследственную радикальную формацию. Обозначим этот класс через $\mathfrak{L}_\pi^a(k) = \{G \in \mathfrak{S}^\pi | l_\pi^a(G) \leqslant k\}$.*

Доказательство. (1) Пусть $G \in \mathfrak{L}_\pi^a(k)$, $N \lhd G$. Тогда N – π-разрешимая группа как подгруппа π-разрешимых групп и по лемме 4 $l_\pi^a(G/N) \leqslant l_\pi^a(G) \leqslant k$. Таким образом, $G/N \in \mathfrak{L}_\pi^a(k)$.

(2) Пусть $N_1, N_2 \in \mathfrak{L}_\pi^a(k)$. Тогда $N_1 \times N_2$ – π-разрешимая группа как прямое произведение π-разрешимых групп и по лемме 4 $l_\pi^a(N_1 \times N_2) = \max_{i=1,2} l_\pi^a(N_i) \leqslant k$. Таким образом, $N_1 \times N_2 \in \mathfrak{L}_\pi^a(k)$.

Таким образом, $\mathfrak{L}_\pi^a(k)$ – формация.

(3) Пусть $G \in \mathfrak{L}_\pi^a(k)$, $H \leqslant G$. Тогда N – π-разрешимая группа как подгруппа π-разрешимой группы по лемме 4 $l_\pi^a(H) \leqslant l_\pi^a(G) \leqslant k$. Таким образом, $H \in \mathfrak{L}_\pi^a(k)$ и формация $\mathfrak{L}_\pi^a(k)$ наследственная. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $G \neq\in \mathfrak{L}_\pi^a(k)$, но $N \lhd G$, $N \neq E$ и $G/N \in \mathfrak{L}_\pi^a(k)$. Тогда:*

(1) *в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N;*
(2) *$F(G)$ – p-группа, $p \in \pi$;*
(3) *в группе G существует такая минимальная подгруппа M, что $G = FM$ и $F \cap M = \Phi(G)$;*
(4) *$G^{\mathfrak{E}_{\pi'}} = 1$.*

Доказательство. (1) Пусть в группе G существуют две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2. Тогда $G \simeq G/(N_1 \cap N_2)$ и $l_\pi^a(G) = l_\pi^a(G/(N_1 \cap N_2) \leqslant \max_{i=1,2}\{l_\pi^a(G/N_i)\} \leqslant k$, противоречие.
(2) Так как $F(G)/\Phi(G)$ – p-группа, $p \in \pi$, то $F(G)$ – p-группа, $p \in \pi$.
(3) Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Так как $F(G) \nleqslant \Phi(G)$, то существует такая максимальная подгруппа M группы G, что $F(G) \nleqslant M$ и $G = F(G)M$. Пусть $K = F(G) \cap M$. Ясно, что $K \lhd F(G)$ и $\Phi(G) \leqslant K$. С другой стороны, $\Phi(G) = F(G) \cap \Phi(G) = F(G) \cap (\cap_{H<\cdot G} H) = \cap_{H<\cdot G}(F(G) \cap H) \geqslant K$. Таким образом, $\Phi(G) = F(G) \cap M$.
(4) Так как $l_\pi^a(G/G^{\mathfrak{E}_{\pi'}}) = l_\pi^a(G)$, то можно считать, что $G^{\mathfrak{E}_{\pi'}} = 1$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть G – p-разрешимая группа. Следующие два условия эквивалентны:*
(1) *силовские p-подгруппы группы G абелевы;*
(2) $l_p^a(G) = 1$.

Доказательство. Пусть G – p- разрешимая группа с абелевыми силовскими p-подгруппами. Тогда $l_p(G) \leqslant 1$, т.е. $(p', p)^*$-ряд группы G имеет вид:

$$1 \lhd G_p O_{p'}(G)/O_{p'}(G) \lhd G/O_{p'}(G)$$

или

$$1 \lhd O_{p'}(G) \lhd G_p O_{p'}(G) \lhd G.$$

Отсюда, $l_p^a(G) = 1$. Обратное утверждение очевидно. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть G – π-разрешимая группа. Следующие два условия эквивалентны:*
(1) *π-холловые подгруппы группы G абелевы;*
(2) $l_\pi^a(G) = 1$.

Доказательство. Пусть G – π-разрешимая группа с абелевыми π-холловыми подгруппами. Тогда $l_\pi(G) \leqslant 1$, т.е. $(\pi', \pi)^n$-ряд группы G имеет вид:

$$1 \lhd G_\pi O_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G) \lhd G/O_{\pi'}(G)$$

или

$$1 \lhd O_{\pi'}(G) \lhd G_\pi O_{\pi'}(G) \lhd G.$$

Отсюда, $l_\pi^a(G) = 1$. Обратное утверждение очевидно. Лемма доказана.

Оценки производной π-длины π-разрешимой группы

Теорема 1. *Пусть G – p-разрешимая группа. Тогда $d(G_p) \leqslant l_p^a(G) \leqslant l_p(G) \cdot d(G_p)$.*

Доказательство. Пусть G – разрешимая группа. Рассмотрим $(p', p^a)^*$-ряд группы G:

$$G = A_0 \geqslant B_0 \geqslant A_1 \geqslant B_1 \geqslant \ldots \geqslant A_t \geqslant B_t = 1.$$

Так как факторы A_i/B_i – абелевые p-группы, то по теореме Миллера $A_i \geqslant G_p^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Отсюда, $d(G_p) \geqslant l_p^a(G)$. Левая часть неравенства доказана.

Рассмотрим теперь $(p', p)^*$-ряд группы G:

$$1 = P_0 \leqslant N_0 < P_1 < N_1 < \ldots < P_k \leqslant N_k = G.$$

p'-факторы этого ряда оставляем без изменения, а p-факторы уплотним следующим образом:

$$\ldots < N_i < P_{i+1}^{(t)} < P_{i+1}^{(t-1)} < \ldots < P_{i+1}' < P_{i+1} < N_{i+1} < \ldots.$$

Таким образом, получим (p', p^a)-ряд группы G. Число добавленных абелевых p-подгрупп для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ не превышает производной длины $d(G_p)$ силовской p-подгруппы группы G. Следовательно, $l_p^a(G) \leqslant l_p(G) \cdot d(G_p)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда $d(G_\pi) \leqslant l_\pi^a(G) \leqslant l_\pi(G) \cdot d(G_\pi)$.*

Доказательство. Пусть G – разрешимая группа. Рассмотрим $(\pi', \pi^a)^*$-ряд группы G:

$$G = A_0 \geqslant B_0 \geqslant A_1 \geqslant B_1 \geqslant \ldots \geqslant A_t \geqslant B_t = 1.$$

Так как факторы A_i/B_i – абелевые π-группы, то по теореме Миллера $A_i \geqslant G_\pi^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Отсюда, $d(G_\pi) \geqslant l_\pi^a(G)$. Левая часть неравенства доказана.

Докажем правую часть. Рассмотрим $(\pi', \pi)^*$-ряд группы G:

$$1 = P_0 \leqslant N_0 < P_1 < N_1 < \ldots < P_k \leqslant N_k = G.$$

π'-факторы этого ряда оставляем без изменения, а π-факторы уплотним следующим образом:

$$\ldots < N_i < P_{i+1}^{(t)} < P_{i+1}^{(t-1)} < \ldots < P_{i+1}' < P_{i+1} < N_{i+1} < \ldots.$$

Таким образом, получим (π', π^a)-ряд группы G. Число добавленных абелевых π-подгрупп для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ не превышает производной длины $d(G_\pi)$ π-холловой подгруппы группы G. Следовательно, $l_\pi^a(G) \leqslant l_\pi(G) \cdot d(G_\pi)$. Теорема доказана.

Заключение

Полученные результаты являются первоначальными оценками, устанавливающими зависимость производной π-длины $l_\pi^a(G)$ π-разрешимой группы G с нильпотентной π-длиной $l_\pi^n(G)$ группы G и производной длиной $d(G_\pi)$ ее π-холловой подгруппы. В дальнейшем можно исследовать зависимость производной π-длины π-разрешимой группы G от строения π-холловой или силовских p-подгрупп, $p \in \pi$, или от строения центральных пересечений ее подгруппы.

Список литературы

1. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978, 267 с.
2. Hall P., Higman G. On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem. Proc. London Math. Sox., 1956, V.6(3), 1-40 p.
3. Мазуров В.Д. О p-длине разрешимых групп // В сб. VI Всесоюзный симпозиум по теории групп. – Киев. – 1980. – С. 50-60.
4. Черников Н.С., Петравчук А.П. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: Институт математики, 1993, с. 393-405: В кн. О π-длине конечных π-разрешимых групп.
5. Черников Н.С., Петравчук А.П. Характеризация переодических локально разрешимых групп с разрешимыми и с конечноэкспонентными силовскими π-подгруппами. Укр. мат. журнал., 1987, Т.39, №6, с.761-767.
6. Kazarin L.S. Soluble product of groups // Infinite groups 94:/ Berlin-New York: Walter de Gruyter. – 1995. – P. 111-123.
7. Монахов В.С., Шпырко О.А. О нильпотентной π-длине конечной π-разрешимой группы. Дискрет. матем., Т.13, вып.3, 2001, с.145-152.