УДК 517.977

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕПОЛНЫМИ ДАННЫМИ

А.Г. Наконечный, Ю.К. Подлипенко, О.Л. Левошич

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
факультет кибернетики
пр-т академика Глушкова, 2, корп. 6, Киев, Украина

Abstract

We consider systems described by initial-boundary value problems for parabolic equations with discontinuous coefficients. From observations of the state of systems, we find minimax prediction estimates of functionals from solutions of these initial-boundary value problems at an arbitrary moment of time in the future. It is assumed here that the right hand sides of equations boundary, transmission conditions and also errors of measurements are not determined exactly but only the sets to which they belong are known and that the information concerning initial conditions is missing. It is established that the determination of the aforementioned estimates is reduced to solving some systems of integro-differential equations.

Введение

Постановка проблемы в общем виде. В системном анализе значительное место занимают проблемы оценивания в условиях неопределенности для уравнений с частными производными.

Такие задачи возникают в часто встречающейся на практике ситуации, когда некоторые детерминированные данные краевых задач неизвестны точно, а известны лишь ограничения, которым они удовлетворяют. Для решения подобных задач наиболее эффективным оказался минимаксный подход, позволяющий находить оптимальные оценки параметров краевых задач, рассчитанные на наихудшие реализации возмущений (см., например, [1] и указанную там библиографию).

Однако, несмотря на значительное количество работ в этом направлении, задачи минимаксного прогнозного оценивания параметров уравнений с разрывными коэффициентами до настоящего времени не были изучены достаточно полно (упомянем лишь работы [5] и [2]). Актуальность исследования таких вопросов состоит в том, что краевые задачи для уравнений с частными производными с разрывными коэффициентами применяются при моделировании физических процессов в кусочно-неоднородных средах.

Анализ последних достижений и публикаций. В связи со сказанным выше отметим, что в [5] исследованы задачи минимаксного прогнозного оценивания решений параболических начально-краевых задач трансмиссии в предположении, что на неизвестные правые части уравнений, а также на правые части граничных и начальных условий, условий сопряжения на общих частях границ областей заданы квадратичные ограничения.

Неразрешенной в рамках этой проблематики оставалась задача прогнозирования функционалов от решений в случае, когда ограничения на некоторые детерминированные данные задачи (например, на начальные условия или на условия сопряжения) не задаются, а на остальные данные начально-краевой задачи наложены ограничения, такие же, как в [5]. Данная работа является естественным продолжением [5].

Ее целью является разработка конструктивных методов минимаксного прогнозного оценивания при полном отсутствии информации о начальных условиях.

Предварительные сведения. Далее используются следующие обозначения: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — пространственная переменная, изменяющаяся в ограниченном открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей Γ; $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$; t — временная переменная; $Q_{t_0,T} = \Omega \times (t_0, T)$ — открытый цилиндр; $\Sigma_{t_0,T} = \Gamma \times (t_0, T)$ — боковая поверхность цилиндра; $\mathcal{D}((t_0, T))$ — пространство бесконечно дифференцированных функций с компактным носителем на интервале (t_0, T); $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева порядка 1 в области Ω; $(H^1(\Omega))'$ — пространство, сопряженное (двойственное) к $H^1(\Omega)$; $d\gamma$ мера на $(n-1)$-мерной поверхности γ, порожденная мерой dx; $H^s(\gamma)$ — пространство Соболева нецелого порядка s на $(n-1)$-мерном сечении области Ω липшицевой поверхностью γ; скалярное произведение $\langle u, v\rangle$ элементов $u \in H^{1/2}(\gamma)$ на элементы $v \in H^{-1/2}(\gamma)$, согласованное со скалярным произведением в $L^2(\gamma)$, обозначается через $\int_\gamma u(y)v(y)\,d\gamma$; $L^\infty(Q_{t_0,T)})$ – пространство измеримых и почти всюду ограниченных в цилиндре $Q_{t_0,T}$ функций; $L^2(t_0, T; H^1(\Omega))$ — пространство функций, определенных и измеримых (по отношению к мере Лебега dt) на интервале (t_0, T) со значениями в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega)$ и таких, что

$$\int_{t_0}^{T} \|f(\cdot, t)\|^2_{H^1(\Omega)} dt < \infty;$$

аналогично определяется пространство $L^2(t_0, T; (H^1(\Omega))')$.

Если $f \in L^2(t_0, T; H^1(\Omega))$, то можно определить обобщенную частную производную $\partial f/\partial t$ как единственный элемент пространства $\mathcal{D}'((t_0, T); H^1(\Omega)) = \mathcal{L}(\mathcal{D}((t_0, T)); H^1(\Omega))$ обобщенных функций со значениями в $H^1(\Omega)$, который удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial f(\cdot, t)}{\partial t}(\varphi) = -\int_{t_0}^{T} f(\cdot, t)\frac{d\varphi(t)}{dt}dt, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}((t_0, T)).$$

Обозначим через Ω_1 и Ω_2 ограниченные открытые области в $\mathbb{R}^n$ такие, что $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, через Γ_1 и Γ_2 — границы областей Ω_1 и Ω_2 соответственно, которые предполагаются липшицевыми, и пусть $\gamma = \mathrm{int}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \neq \emptyset$, $Q^{(k)}_{t_0,T} = \Omega_k \times (t_0, T)$, $\Sigma^{(k)}_{t_0,T} = \Gamma_k \times (t_0, T)$, $k = 1, 2$, $\Sigma_{t_0,T}\gamma \diagup (t_0, T) =$.

Если в области Ω_1 задана функция f_1, а в области Ω_2 задана функция f_2, то этой же, но прописной буквой F без индекса будем обозначать функцию, определенную в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ равенствами $F(x, t) = f_k(x, t)$ в Ω_k, $k = 1, 2$.

Введем далее пространства $W_k(t_0, T)$, $k = 1, 2$, функций $f_k \in L^2(t_0, T; H^1(\Omega_k))$ таких, что $\partial f_k / \partial t \in L^2(t_0, T; (H^1(\Omega_k))')$. Эти пространства, имеющие нормы

$$\|f_k\|_{W_k(t_0,T)} = \left(\int\limits_{t_0}^{T} \|f_k\|^2_{H^1(\Omega_k)} dt + \int\limits_{t_0}^{T} \left\| \frac{\partial f_k}{\partial t} \right\|^2_{(H^1(\Omega_k))'} dt \right)^{1/2},$$

являются гильбертовыми.

Пусть состояние $\varphi_1(x, t)$, $\varphi_2(x, t)$ системы определяется как обобщенное решение начально-краевой задачи трансмиссии

$$\varphi_1 \in W_1(t_0, T_1), \quad \varphi_2 \in W_2(t_0, T_1), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial t} + A_1(t)\varphi_1(x, t) = f_1(x, t) \quad \text{в} \quad Q^{(1)}_{t_0,T_1}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi_2(x, t)}{\partial t} + A_2(t)\varphi_2(x, t) = f_2(x, t) \quad \text{в} \quad Q^{(2)}_{t_0,T_1}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_{A_1}} + \sigma_1 \varphi_1 = \beta_1 \quad \text{на} \quad \Sigma^{(1)}_{t_0,T_1} \setminus \Sigma_{t_0,T_1}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial v_{A_2}} + \sigma_2 \varphi_2 = \beta_2 \quad \text{на} \quad \Sigma^{(2)}_{t_0,T_1} \setminus \Sigma_{t_0,T_1}, \tag{4}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_{A_1}} + \alpha_{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v_{A_2}} + \beta_{11}\varphi_1 \beta_{12}\varphi_2 = \omega_1, \\ \alpha_{21} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_{A_1}} + \alpha_{22} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v_{A_2}} + \beta_{21}\varphi_1 \beta_{22}\varphi_2 = \omega_2, \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_0,T_1}, \end{array} \tag{5}$$

$$\varphi_1(x, t_0) = B_1 f_{01} \quad \text{в} \quad \Omega_1, \varphi_2(x, t_0) = B_2 f_{02} \quad \text{в} \quad \Omega_2. \tag{6}$$

Здесь $f_1, f_2, \beta_1, \beta_2, \omega_1, \omega_2, f_{01}$ и f_{02} — данные элементы пространств $L^2(Q^{(1)}_{t_0,T_1})$, $L^2(Q^{(2)}_{t_0,T_1})$, $L^2(\Sigma^{(1)}_{t_0,T_1} \setminus \Sigma_{t_0,T_1})$, $L^2(\Sigma^{(2)}_{t_0,T_1} \setminus \Sigma_{t_0,T_1})$, $L^2(\Sigma_{t_0,T_1})$, H_1 и H_2 соответственно, $B_i \in \mathcal{L}(H_i, L^2(\Omega_i))$ — линейные ограниченные операторы, отображающие гильбертовы пространства H_i в $L^2(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(x, t)$, $\beta_{ij} = \beta_{ij}(x, t)$ и $\sigma_1 = \sigma_1(x, t)$, $\sigma_2 = \sigma_2(x, t)$ измеримые ограниченные соответственно на Σ_{t_0,T_1} и $\Sigma^{(1)}_{t_0,T_1}$, $\Sigma^{(2)}_{t_0,T_1}$ функции, $A_k = A_k(t)$ — дифференциальные операторы, заданные в областях $Q^{(k)}_{t_0,T_1}$, вида

$$A_k(t)\varphi_k(x, t) = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial / \partial x_i \left(a^{(k)}_{ij}(x, t) \partial \varphi_k(x, t) / \partial x_j \right) + a^{(k)}_0(x, t)\varphi_k(x, t), \ k = 1, 2,$$

коэффициенты $a_{ij}^{(k)}(x,t)$, $a_0^{(k)}(x,t)$ которых удовлетворяют условиям

$$a_{ij}^{(k)},\ a_0^{(k)}(x,t) \in L^\infty\left(Q_{t_0,T_1}^{(k)}\right),$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}(x,t)\xi_i\xi_j > \alpha(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2), \quad \alpha > 0, \quad \forall \xi_i \in \mathbb{R}^1,$$

почти всюду в $Q_{t_0,T_1}^{(k)}$, здесь и далее v-единичная нормаль, внешняя по отношению к областям $Q_{t_0,T_1}^{(1)}$ и $Q_{t_0,T_1}^{(2)}$ соответственно на поверхностях $\Sigma_{t_0,T_1}^{(1)}$ и $\Sigma_{t_0,T_1}^{(2)}$ и направленная из $Q_{t_0,T_1}^{(1)}$ в $Q_{t_0,T_1}^{(2)}$ на поверхности Σ_{t_0,T_1}, $\partial/\partial v_{A_k}$ — конормальная производная по отношению к оператору A_k, определяемая формулой

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial v_{A_k}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \cos(v, x_i),$$

где $\cos(v, x_i)$ — i-й направляющий косинус нормали v.

Положим

$$\Delta := \det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

и предположим, что существует константа $p > 0$ такая, что $\Delta \geq p$ на Σ_{t_0,T_1}. Обозначим через $c_{ij} = c_{ij}(x,t)$, $i,j = 1,2$, функции, определенные на Σ_{t_0,T_1} формулами

$$c_{11} = \tfrac{1}{\Delta}(-\beta_{11}\alpha_{22} + \beta_{21}\alpha_{12}), \quad c_{12} = \tfrac{1}{\Delta}(-\beta_{12}\alpha_{22} + \beta_{22}\alpha_{12}),$$
$$c_{21} = \tfrac{1}{\Delta}(-\beta_{21}\alpha_{11} + \beta_{11}\alpha_{21}), \quad c_{11} = \tfrac{1}{\Delta}(-\beta_{22}\alpha_{11} + \beta_{12}\alpha_{21}).$$

при этом под решением указанной выше задачи будем понимать функции $\varphi_1 \in W_1(t_0, T_1)$ и $\varphi_2 \in W_1(t_0, T_1)$, удовлетворяющие начальным условиям (6) и уравнению

$$\left(\frac{\partial \varphi_1(\cdot,t)}{\partial t}, \psi_1(\cdot)\right) + \left(\frac{\partial \varphi_2(\cdot,t)}{\partial t}, \psi_2(\cdot)\right) + a(t; \Phi(\cdot,t), \Psi(\cdot)) = L(t; \Psi(\cdot)) \tag{7}$$

$$\forall \psi_1 \in H^1(\Omega_1), \quad \psi_2 \in H^1(\Omega_2).$$

Здесь через $L(t; V(\cdot))$ и $a(t; U(\cdot), V(\cdot))$ при $t \in (t_o, T_1)$ обозначены соответственно семейтсва линейных на пространстве $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ форм, определяемых соотношениями

$$L(t; V(\cdot)) = \int_{\Omega_1} f_1(x,t)v_1(x)dx + \int_{\Omega_2} f_2(x,t)v_2(x)dx$$
$$+ \int_{\Gamma_1 \setminus \gamma} \beta_1 v_1 d(\Gamma_1 \setminus \gamma) + \int_{\Gamma_2 \setminus \gamma} \beta_2 v_2 d(\Gamma_2 \setminus \gamma) \tag{8}$$
$$+ \int_{\gamma} (d_{11}\omega_1 v_1 + d_{12}\omega_2 v_1 - d_{21}\omega_1 v_2 - d_{22}\omega_2 v_2) d\gamma,$$

$$a(t;U(\cdot),V(\cdot)) = \int\limits_{\Omega_1} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{(1)}(x,t)\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x_j}\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_i}dx + \int\limits_{\Omega_1} a_0^{(1)}(x,t)u_1(x,t)v_1(x)dx$$

$$+\int\limits_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{(2)}(x,t)\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x_j}\frac{\partial v_2(x)}{\partial x_i}dx + \int\limits_{\Omega_2} a_0^{(2)}(x,t)u_2(x,t)v_2(x)dx \tag{9}$$

$$+\int\limits_{\Gamma_1\setminus\gamma} \sigma_1 u_1 v_1 d(\Gamma_1\setminus\gamma) + \int\limits_{\Gamma_2\setminus\gamma} \sigma_2 u_2 v_2 d(\Gamma_2\setminus\gamma)$$

$$+\int\limits_{\gamma}(-c_{11}u_1v_1 - c_{12}u_2v_1 + c_{21}u_1v_2 + c_{22}u_2v_2)d\gamma,$$

где $U=(u_1,u_2)$, $V=(v_1,v_2)$, через $(\cdot,\cdot)_1$ и $(\cdot,\cdot)_2$ обозначены отношения двойственности на $(H^1(\Omega_1))'\times H^1(\Omega_1)$ и $(H^1(\Omega_2))'\times H^1(\Omega_2)$ соответственно,

$$d_{11}=\frac{1}{\Delta}\alpha_{22},\ d_{12}=-\frac{1}{\Delta}\alpha_{12},\ d_{21}=-\frac{1}{\Delta}\alpha_{21},\ d_{22}=\frac{1}{\Delta}\alpha_{11}.$$

Определим теперь при $t\in(t_0,T_1)$ семейство линейных функционалов $\tilde{L}(t;\Phi(\cdot))$ на пространстве $\mathcal{H}$ равенством

$$\tilde{L}(t;\Phi(\cdot)) = \int\limits_{\Omega_1}\tilde{f}_1(x,t)\varphi_1(x)dx + \int\limits_{\Omega_2}\tilde{f}_2(x,t)\varphi_2(x)dx.$$

Тогда аналогично предыдущему, обобщенное решение $\Psi=(\psi_1,\psi_1)\in W_1(t_0,T_1)\times W_2(t_0,T_1)$ уравнения

$$-\left(\frac{\partial\psi_1(\cdot,t)}{\partial t},\varphi_1(\cdot)\right)_1 - \left(\frac{\partial\psi_2(\cdot,t)}{\partial t},\varphi_2(\cdot)\right)_2 + a(t;\Phi(\cdot),\Psi(\cdot,t)) = L(t;\Phi(\cdot)) \tag{10}$$

$$\forall\varphi_1\in H^1(\Omega_1),\ \varphi_2\in H^1(\Omega_2)$$

с начальным условием

$$\psi_1(x,T_1)=\psi_1^0(x) \quad \text{в} \quad \Omega_1, \quad \psi_2(x,T_1)=\psi_2^0(x) \quad \text{в} \quad \Omega_2 \tag{11}$$

можно интерпретировать как решение следующей начально-краевой задачи трансмиссии: определить функции ψ_1 и ψ_2, удовлетворяющие соотношениям

$$\psi_1\in W_1(t_0,T_1), \quad \psi_2\in W_2(t_0,T_1), \tag{12}$$

$$-\frac{\partial\psi_1(x,t)}{\partial t} + A_1^*(t)\psi_1(x,t) = \tilde{f}_1(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{t_0,T_1}^{(1)}, \tag{13}$$

$$-\frac{\partial\psi_2(x,t)}{\partial t} + A_2^*(t)\psi_2(x,t) = \tilde{f}_2(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{t_0,T_1}^{(2)}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\nu_{A_1^*}} + \sigma_1\psi_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_0,T_1}^{(1)}\setminus\Sigma_{t_0,T_1}, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial\nu_{A_2^*}} + \sigma_2\psi_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_0,T_1}^{(2)}\setminus\Sigma_{t_0,T_1}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\nu_{A_1^*}} = c_{11}\psi_1 - c_{21}\psi_2, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial\nu_{A_2^*}} = -c_{12}\psi_1 + c_{22}\psi_2 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_0,T_1}, \tag{16}$$

$$\psi_1(x,T_1)=\psi_1^0(x) \quad \text{в} \quad \Omega_1, \quad \psi_2(x,T_1)=\psi_2^0(x) \quad \text{в} \quad \Omega_2, \tag{17}$$

где $\tilde f_1 \in L^2(Q^{(1)}_{t_0,T_1})$, $\tilde f_2 \in L^2(Q^{(2)}_{t_0,T_1})$, $\psi_1^0(x)\in L^2(\Omega_1)$, $\psi_2^0(x)\in L^2(\Omega_2)$ — заданные функции, а через $A_k^*(t)$, $k=1,2$, обозначены линейные дифференциальные операторы, сопряженные к операторам $A_k(t)$ и определяемые по формулам

$$A_k^*(t)\psi_k(x,t)=-\sum_{i.j=1}^{n}\partial/\partial x_i\left(a_{ji}^{(k)}(x,t)\partial\psi_k(x,t)/\partial x_j\right)+a_0^{(k)}(x,t)\psi_k(x,t),\ k=1,2.$$

При условиях, сформулированных выше, используя рассуждения из доказательства теоремы 1.2 в [4], можно показать, что задача (1) – (6) имеет единственное решение $\varphi_1\in W_1(t_0,T)$, $\varphi_2\in W_2(t_0,T)$, непрерывно зависящее от функций, входящих в правые части (2) – (6) (это же утверждение является справедливым для сопряженной к ней краевой задачи).

Постановка задачи. Предположим, что на интервале $[t_0,T]$, $T<T_1$, наблюдаются функции вида

$$y_k^{(1)}(x,t)=\int_{\Omega_1} g_k^{(1)}(x,\xi,t)\varphi_1(\xi,t)d\xi+\eta_k^{(1)}(x,t), \quad k=\overline{1,m_1}, \tag{18}$$

$$y_{k'}^{(2)}(x,t)=\int_{\Omega_2} g_{k'}^{(2)}(x,\xi,t)\varphi_2(\xi,t)d\xi+\eta_{k'}^{(2)}(x,t), \quad k'=\overline{1,m_2}, \tag{19}$$

где $g_k^{(1)}\in L^2(\Omega_1^2\times[t_0,T])$, $g_{k'}^{(2)}\in L^2(\Omega_2^2\times[t_0,T])$, — заданные функции, $\eta_k^{(1)}(x,t)$ и $\eta_{k'}^{(2)}(x,t)$ погрешности наблюдений, которые являются выборочными функциями непрерывных в среднеквадратическом случайных полей, определенных соответственно в областях $Q^{(1)}_{t_0,T}$ и $Q^{(2)}_{t_0,T}$.

Будем считать, что функции f_1, f_2, β_1, β_2, ω_1, ω_2, элементы f_{01} и f_{02}, а также вторые моменты случайных процессов не определены точно, а известно лишь, что они удовлетворяют условиям

$$\int_{t_0}^{T_1}\int_{\Omega_1} q_1^2(x,t)f_1^2(x,t)dxdt+\int_{t_0}^{T_1}\int_{\Omega_2} q_2^2(x,t)f_2^2(x,t)dxdt+\int_{t_0}^{T_1}\int_{\Gamma_1\setminus\gamma}\beta_1^2r_1^2d(\Gamma_1\setminus\gamma)dt$$

$$+\int_{t_0}^{T_1}\int_{\Gamma_2\setminus\gamma}\beta_2^2r_2^2d(\Gamma_2\setminus\gamma)dt+\int_{t_0}^{T_1}\int_{\gamma}\omega_1^2(x)r_3^2(x)d\gamma dt+\int_{t_0}^{T_1}\int_{\gamma}\omega_2^2(x)r_4^2(x)d\gamma dt\le 1, \tag{20}$$

$$M\eta_k^{(1)}(x,t)=0,\ k=\overline{1,m_1}, \quad M\eta_{k'}^{(2)}(x,t)=0,\ k'=\overline{1,m_2}, \tag{21}$$

$$\sum_{k=1}^{m_1}\int_{t_0}^{T}\int_{\Omega_1} M(\eta_k^{(1)}(x,t))^2\tilde r_k^2(x,t)dxdt+\sum_{k'=1}^{m_2}\int_{t_0}^{T}\int_{\Omega_2} M(\eta_{k'}^{(2)}(x,t))^2\tilde{\tilde r}_{k'}^2(x,t)dxdt\le 1, \tag{22}$$

где $q_1(x,t)$, $\tilde{r}_k(x,t)$, $k=\overline{1,m_1}$, $q_2(x,t)$, $\tilde{\tilde{r}}_{k'}(x,t)$, $k'=\overline{1,m_2}$, $r_1(x,t)$, $r_2(x,t)$, $r_3(x,t)$, $r_4(x,t)$ — непрерывные соответственно на множествах $\bar{Q}^{(1)}_{t_0,T_1}$, $\bar{Q}^{(1)}_{t_0,T}$, $\bar{Q}^{(2)}_{t_0,T_1}$, $\bar{Q}^{(2)}_{t_0,T}$, $\overline{\Sigma^{(1)}_{t_0,T}\setminus\Sigma_{t_0,T}}$, $\overline{\Sigma^{(2)}_{t_0,T}\setminus\Sigma_{t_0,T}}$ и $\bar{\Sigma}_{t_0,T}$ функции, которые не обращаются в нуль.

Обозначим через G_0 множество вектор-функций $\tilde{f}=(f_1,f_2,\beta_1,\beta_2,\omega_1,\omega_2)$, удовлетворяющих условию (20), а через G_1 множество случайных функций $\tilde{\eta}=(\eta^{(1)}_1,\dots,\eta^{(1)}_{m_1},\eta^{(2)}_1,\dots,\eta^{(2)}_{m_2})$, удовлетворяющих условиям (21) и (22).

Задача прогноза заключается в том, что по наблюдениям вида (18), (19) на временном интервале $[t_0,T]$ за состоянием системы, опиываемой начально-краевой задачей (2) – (6), при условиях (20) – (22) оценить в произвольный момент времени $T_1>T$ линейный функционал

$$l(\Phi(\cdot,T_1))=\int\limits_{\Omega}L(x)\Phi(x,T_1)dx=\int\limits_{\Omega_1}l_1(x)\varphi_1(x,T_1)dx+\int\limits_{\Omega_2}l_2(x)\varphi_2(x,T_1)dx \tag{23}$$

в классе линейных по наблюдениям оценок вида (см. [5])

$$\hat{l}(\Phi(\cdot,T_1))=\iint\limits_{t_0\Omega_1}^{T}\sum_{k=1}^{m_1}u^{(1)}_k(x,t)y^{(1)}_k(x,t)dxdt+\iint\limits_{t_0\Omega_2}^{T}\sum_{k'=1}^{m_2}u^{(2)}_{k'}(x,t)y^{(2)}_{k'}(x,t)dxdt+c, \tag{24}$$

где в (23) и (24) $l_1\in L^2(\Omega_1)$, $l_2\in L^2(\Omega_2)$ — заданные функции, $u^{(1)}_k\in L^2(Q^{(1)}_{t_0,T})$, $k=\overline{1,m_1}$, $u^{(2)}_{k'}\in L^2(Q^{(2)}_{t_0,T})$, $k'=\overline{1,m_2}$, $c\in\mathbb{R}^1$. Оценку $\hat{l}(\Phi(\cdot,T_1))$, определяемую из решения экстремальной задачи

$$\inf_{\substack{u^{(1)}_1,\dots,u^{(1)}_{m_1}\in L^2(Q^{(1)}_{t_0,T})\\ u^{(2)}_1,\dots,u^{(2)}_{m_2}\in L^2(Q^{(2)}_{t_0,T}),\,c\in\mathbb{R}^1}}\ \sup_{\substack{\tilde{f}\in G_0,\,\tilde{\eta}\in G_1\\ f_{01}\in H_1,\,f_{02}\in H_2}} M[l(\Phi(\cdot,T_1))-\hat{l}(\Phi(\cdot,T_1))]^2=$$
$$=\sup_{\substack{\tilde{f}\in G_0,\,\tilde{\eta}\in G_1\\ f_{01}\in H_1,\,f_{02}\in H_2}} M[l(\Phi(\cdot,T_1))-\hat{l}(\Phi(\cdot,T_1))]^2=:\sigma^2,$$

назовем минимаксной прогнозной оценкой функционала (23), а величину σ — минимаксной погрешностью прогноза.

Представления для минимаксных прогнозных оценок и погрешностей оценивания

Лемма 1. *Задача нахождения минимаксной прогнозной оценки функционала $l(\Phi(\cdot,T_1))$ эквивалентна задаче оптимального управления системой*

$$\begin{aligned} z^{(2)}_1(x,t;u)=z^{(2)}_1(x,t;u^{(1)}_1,\dots,u^{(1)}_{m_1},u^{(2)}_1,\dots,u^{(2)}_{m_2})\ \in\ W_1(t_0,T),\\ z^{(2)}_2(x,t;u)=z^{(2)}_2(x,t;u^{(1)}_1,\dots,u^{(1)}_{m_1},u^{(2)}_1,\dots,u^{(2)}_{m_2})\ \in\ W_2(t_0,T),\end{aligned} \tag{25}$$

$$\frac{\partial z^{(2)}_1(x,t;u)}{\partial t}+A^*_1(t)z^{(2)}_1(x,t;u)=-\int\limits_{\Omega_1}\sum_{k=1}^{m_1}u^{(1)}_k(\xi,t)g^{(1)}_k(\xi,x,t)d\xi \quad \text{в} \quad Q^{(1)}_{t_0,T}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial z_2^{(2)}(x,t;u)}{\partial t} + A_2^*(t) z_2^{(2)}(x,t;u) = -\int\limits_{\Omega_2} \sum_{k'=1}^{m_2} u_{k'}^{(2)}(\xi,t) g_{k'}^{(2)}(\xi,x,t) d\xi \quad \textit{в} \quad Q_{t_0,T}^{(2)}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial z_1^{(2)}}{\partial \nu A_1^*} + \sigma_1 z_1^{(2)} = 0 \quad \textit{на} \quad \Sigma_{t_0,T}^{(1)} \setminus \Sigma_{t_0,T}, \quad \frac{\partial z_2^{(2)}}{\partial \nu A_2^*} + \sigma_2 z_2^{(2)} = 0 \quad \textit{на} \quad \Sigma_{t_0,T}^{(2)} \setminus \Sigma_{t_0,T}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial z_1^{(2)}}{\partial \nu A_1^*} = c_{11} z_1^{(2)} - c_{21} z_2^{(2)}, \quad \frac{\partial z_2^{(2)}}{\partial \nu A_2^*} = -c_{12} z_1^{(2)} + c_{22} z_2^{(2)} \quad \textit{на} \quad \Sigma_{t_0,T}, \tag{29}$$

$$z_1^{(2)}(x,T;u) = z_1^{(1)}(x,T) \ \textit{в}\ \Omega_1, \quad z_2^{(2)}(x,T;u) = z_2^{(1)}(x,T) \ \textit{в}\ \Omega_2, \tag{30}$$

с функцией стоимости вида

$$I(u_1^{(1)},\ldots,u_{m_1}^{(1)},u_1^{(2)},\ldots,u_{m_2}^{(2)}) =$$
$$\iint\limits_{t_0\Omega_1}^{T} q_1^{-2}(x,t)\left(z_1^{(2)}(x,t;u)\right)^2 dxdt + \iint\limits_{t_0\Omega_2}^{T} q_2^{-2}(x,t)\left(z_2^{(2)}(x,t;u)\right)^2 dxdt$$
$$+ \iint\limits_{t_0\Gamma_1\setminus\gamma}^{T} r_1^{-2}(x,t)\left(z_1^{(2)}(x,t;u)\right)^2 d(\Gamma_1\setminus\gamma)dt$$
$$+ \iint\limits_{t_0\Gamma_2\setminus\gamma}^{T} r_2^{-2}(x,t)\left(z_2^{(2)}(x,t;u)\right)^2 d(\Gamma_2\setminus\gamma)dt$$
$$+ \iint\limits_{t_0\gamma}^{T} r_3^{-2}(x,t)(d_{11}z_1^{(2)}(x,t;u) - d_{21}z_2^{(2)}(x,t;u))^2 d\gamma dt$$
$$+ \iint\limits_{t_0\gamma}^{T} r_4^{-2}(x,t)(d_{12}z_1^{(2)}(x,t;u) - d_{22}z_2^{(2)}(x,t;u))^2 d\gamma dt$$
$$+ \sum_{k=1}^{m_1} \iint\limits_{t_0\Omega_1}^{T} \tilde{r}_k^{-2}(x,t)(u_k^{(1)}(x,t))^2 dxdt + + \sum_{k'=1}^{m_2} \iint\limits_{t_0\Omega_2}^{T} \tilde{\tilde{r}}_{k'}^{-2}(x,t)(u_{k'}^{(2)}(x,t))^2 dxdt \to \min_{u\in U}, \tag{31}$$

при условии, что множество

$$U := \Big\{ u = \left(u_1^{(1)},\ldots,u_{m_1}^{(1)},u_1^{(2)},\ldots,u_{m_2}^{(2)}\right) \in H := \left(L^2(Q_{t_0,T}^{(1)})\right)^{m_1} \times \left(L^2(Q_{t_0,T}^{(2)})\right)^{m_2} :$$
$$B_1^* z_1^{(2)}(\cdot,t_0;u) = 0, \quad B_2^* z_2^{(2)}(\cdot,t_0;u) = 0 \Big\} \quad \textit{не пусто.}$$

Доказательство этого утверждения является модификацией доказательства леммы из [5].

Определим на пространстве $H = \left(L^2(Q_{t_0,T}^{(1)})\right)^{m_1} \times \left(L^2(Q_{t_0,T}^{(2)})\right)^{m_2}$ отображение $C : H \to H_1^* \times H_2^*$ по формуле $Cu = \left(B_1^* z_1^{(2)}(\cdot,t_0;u),\ B_2^* z_2^{(2)}(\cdot,t_0;u)\right)$. Тогда его производная по Фреше $\tilde{C} \in L(H, H_1^* \times H_2^*)$ есть линейный непрерывный оператор, определяемый соотношением $\tilde{C}u = \left(B_1^* \bar{z}_1^{(2)}(\cdot,t_0;u),\ B_2^* \bar{z}_2^{(2)}(\cdot,t_0;u)\right)$, в котором через $\bar{z}_1^{(2)}(x,t;u)$

и $\bar{z}_2^{(2)}(x,t;u)$ обозначены функции, удовлетворяющие уравнениям (25) – (29) и условию

$$\bar{z}_1^{(2)}(x,T) = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad \bar{z}_2^{(2)}(x,T) = 0 \text{ в } \Omega_2. \tag{32}$$

Предположим, что выполняется условие $\operatorname{Im}\tilde{C} = H_1^* \times H_2^*$, которое будем называть условием регулярности отображения C. В силу этого условия множество U будет не пустым, выпуклым и замкнутым в пространстве H. Тогда, решая задачу оптимального управления (25) – (31), используя при этом теорему о существовании минимума квадратичного функционала на выпуклом множестве в гильбертовом пространстве в комбинации с принципом Лагранжа, придем к такому утверждению

Теорема 1. *Минимаксная прогнозная оценка $\hat{\hat{l}}(\Phi(\cdot,T_1))$ функционала (23) определяется по формуле*

$$\hat{\hat{l}}(\Phi(\cdot,T_1)) = \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{\Omega_1} \sum_{k=1}^{m_1} \hat{u}_k^{(1)}(x,t) y_k^{(1)}(x,t)dxdt + \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{\Omega_2} \sum_{k'=1}^{m_2} \hat{u}_{k'}^{(2)}(x,t) y_{k'}^{(2)}(x,t)dxdt + \hat{c},$$

где

$$\hat{u}_k^{(1)}(x,t) = \tilde{r}_k^2(x,t) \int\limits_{\Omega_1} p_1(\xi,t) g_k^{(1)}(x,\xi,t)d\xi, \quad k = \overline{1,m_1}, \tag{33}$$

$$\hat{u}_{k'}^{(2)}(x,t) = \tilde{\tilde{r}}_{k'}^2(x,t) \int\limits_{\Omega_2} p_2(\xi,t) g_{k'}^{(2)}(x,\xi,t)d\xi, \quad k' = \overline{1,m_2}, \tag{34}$$

$\hat{c} = 0$, а функции $p_1(x,t)$ и $p_2(x,t)$ определяются из решения задачи (35) – (45):

$$z_1 \in W_1(t_0,T), \quad z_2 \in W_1(t_0,T), \tag{35}$$

$$-\frac{\partial z_1(x,t)}{\partial t} + A_1^*(t) z_1(x,t) = -\sum_{k=1}^{m_1} \int\limits_{\Omega_1} \tilde{r}_k^2(\xi,t) g_k^{(1)}(\xi,x,t) \int\limits_{\Omega_1} p_1(\eta,t) g_k^{(1)}(\xi,\eta,t) d\eta d\xi \text{ в } Q_{t_0,T}^{(1)}, \tag{36}$$

$$-\frac{\partial z_2(x,t)}{\partial t} + A_2^*(t) z_2(x,t) = -\sum_{k'=1}^{m_2} \int\limits_{\Omega_2} \tilde{\tilde{r}}_{k'}^2(\xi,t) g_{k'}^{(2)}(\xi,x,t) \int\limits_{\Omega_2} p_2(\eta,t) g_k^{(2)}(\xi,\eta,t) d\eta d\xi \text{ в } Q_{t_0,T}^{(2)}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \nu_{A_1^*}} + \sigma_1 z_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_0,T}^{(1)} \setminus \Sigma_{t_0,T}, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial \nu_{A_2^*}} + \sigma_2 z_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_0,T}^{(2)} \setminus \Sigma_{t_0,T}, \tag{38}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \nu_{A_1^*}} = c_{11} z_1 - c_{21} z_2, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial \nu_{A_2^*}} = -c_{12} z_1 + c_{22} z_2 \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_0,T}, \tag{39}$$

$$B_1^* z_1(\cdot,t_0) = 0,\ z_1(x,T) = z_1^{(1)}(x,T) \text{ в } \Omega_1,\ B_2^* z_2(\cdot,t_0) = 0,\ z_2(x,T) = z_2^{(1)}(x,T) \text{ в } \Omega_2, \tag{40}$$

$$p_1 \in W_1(t_0,T), \quad p_2 \in W_1(t_0,T), \tag{41}$$

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} + A_1(t) p_1(x,t) = q_1^{-2}(x,t) z_1(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{t_0,T}^{(1)}, \tag{42}$$

$$\frac{\partial p_2(x,t)}{\partial t} + A_2(t)p_2(x,t) = q_2^{-2}(x,t)z_2(x,t) \quad \text{в} \quad Q^{(2)}_{t_0,T}, \tag{43}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \nu_{A_1}} + \sigma_1 p_1 = r_1^{-2} z_1 \quad \text{на} \quad \Sigma^{(1)}_{t_0,T} \setminus \Sigma_{t_0,T}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial \nu_{A_2}} + \sigma_2 p_2 = r_2^{-2} z_2 \quad \text{на} \quad \Sigma^{(2)}_{t_0,T} \setminus \Sigma_{t_0,T}, \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial p_1}{\partial \nu_{A_1}} &= c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + r_3^{-2}(d_{11}z_1 - d_{21}z_2)d_{11} + r_4^{-2}(d_{12}z_1 - d_{22}z_2)d_{12}, \\ \tfrac{\partial p_2}{\partial \nu_{A_2}} &= c_{21}p_1 + c_{22}p_2 + r_3^{-2}(d_{11}z_1 - d_{21}z_2)d_{21} + r_4^{-2}(d_{12}z_1 - d_{22}z_2)d_{22} \quad \text{на} \quad \Sigma_{t_0,T}. \end{aligned} \tag{45}$$

Задача (35) – (45) однозначно разрешима.

Ошибка прогноза представима в виде

$$\sigma = \left[l(\hat{\hat{P}}(\cdot,T_1))\right]^{1/2} = \left[\int\limits_{\Omega_1} l_1(x)\hat{\hat{p}}_1(x,T_1)dx + \int\limits_{\Omega_2} l_2(x)\hat{\hat{p}}_2(x,T_1)dx\right]^{1/2}, \tag{46}$$

где функции $\hat{\hat{p}}_1(x,t)$, $\hat{\hat{p}}_2(x,t)$ определяются как единственное решение следующей начально-краевой задачи:

$$\hat{\hat{p}}_1 \in W_1(T,T_1), \quad \hat{\hat{p}}_2 \in W_2(T,T_1), \tag{47}$$

$$\frac{\partial \hat{\hat{p}}_1(x,t)}{\partial t} + A_1(t)\hat{\hat{p}}_1(x,t) = q_1^{-2}(x,t)z_1^{(1)}(x,t) \quad \text{в} \quad Q^{(1)}_{T,T_1}, \tag{48}$$

$$\frac{\partial \hat{\hat{p}}_2(x,t)}{\partial t} + A_2(t)\hat{\hat{p}}_2(x,t) = q_2^{-2}(x,t)z_2^{(1)}(x,t) \quad \text{в} \quad Q^{(2)}_{T,T_1}, \tag{49}$$

$$\frac{\partial \hat{\hat{p}}_1}{\partial \nu_{A_1}} + \sigma_1 \hat{\hat{p}}_1 = r_1^{-2} z_1^{(1)} \quad \text{на} \quad \Sigma^{(1)}_{T,T_1} \setminus \Sigma_{T,T_1}, \quad \frac{\partial \hat{\hat{p}}_2}{\partial \nu_{A_2}} + \sigma_2 \hat{\hat{p}}_2 = r_2^{-2} z_2^{(1)} \quad \text{на} \quad \Sigma^{(2)}_{T,T_1} \setminus \Sigma_{T,T_1}, \tag{50}$$

$$\frac{\partial \hat{\hat{p}}_1}{\partial \nu_{A_1}} = c_{11}\hat{\hat{p}}_1 + c_{12}\hat{\hat{p}}_2 + r_3^{-2}(d_{11}z_1^{(1)} - d_{21}z_2^{(1)})d_{11} + r_4^{-2}(d_{12}z_1^{(1)} - d_{22}z_2^{(1)})d_{12}, \tag{51}$$

$$\frac{\partial \hat{\hat{p}}_2}{\partial \nu_{A_2}} = c_{21}\hat{\hat{p}}_1 + c_{22}\hat{\hat{p}}_2 + r_3^{-2}(d_{11}z_1^{(1)} - d_{21}z_2^{(1)})d_{21} + r_4^{-2}(d_{12}z_1^{(1)} - d_{22}z_2^{(1)})d_{22} \quad \text{на} \quad \Sigma_{T,T_1},$$

$$\hat{\hat{p}}_1(x,T) = p_1(x,T) \quad \text{в} \quad \Omega_1, \quad \hat{\hat{p}}_2(x,T) = p_2(x,T) \quad \text{в} \quad \Omega_2. \tag{52}$$

Другое представление для минимаксных прогнозных оценок функционала (23), через решения систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными специального вида, которые могут быть использованы также для получения рекуррентных прогнозных оценок решений исходных задач сопряжения, получено в следующей теореме.

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 минимаксная прогнозная оценка функционала $l(\Phi(\cdot,T_1))$ имеет вид*

$$\hat{\hat{l}}(\Phi(\cdot,T_1)) = l(\hat{\hat{\Phi}}(\cdot,T_1)) = \int\limits_{\Omega_1} l_1(x)\hat{\hat{\varphi}}_1(x,T_1)dx + \int\limits_{\Omega_2} l_2(x)\hat{\hat{\varphi}}_2(x,T_1)dx$$

$$= \int\limits_{\Omega_1} z_1^{(1)}(x)\hat{\varphi}_1(x,T)dx + \int\limits_{\Omega_2} z_2^{(1)}(x)\hat{\varphi}_2(x,T)dx, \tag{53}$$

где функции $\hat{\hat{\varphi}}_1(x)$ *и* $\hat{\hat{\varphi}}_2(x)$ *являются единственным решением следующей начально-краевой задачи:*

$$\hat{\hat{\varphi}}_1 \in W_1(T,T_1), \quad \hat{\hat{\varphi}}_2 \in W_2(T,T_1),$$

$$\frac{\partial\hat{\hat{\varphi}}_1(x,t)}{\partial t} + A_1(t)\hat{\hat{\varphi}}_1(x,t) = 0 \quad \textit{в} \quad Q^{(1)}_{T,T_1},$$

$$\frac{\partial\hat{\hat{\varphi}}_2(x,t)}{\partial t} + A_2(t)\hat{\hat{\varphi}}_1(x,t) = 0 \quad \textit{в} \quad Q^{(2)}_{T,T_1},$$

$$\frac{\partial\hat{\hat{\varphi}}_1}{\partial\nu_{A_1}} + \sigma_1\hat{\hat{\varphi}}_1 = 0 \quad \textit{на} \quad \Sigma^{(1)}_{T,T_1}\setminus\Sigma_{T,T_1}, \qquad \frac{\partial\hat{\hat{\varphi}}_2}{\partial\nu_{A_2}} + \sigma_2\hat{\hat{\varphi}}_2 = 0 \quad \textit{на} \quad \Sigma^{(2)}_{T,T_1}\setminus\Sigma_{T,T_1},$$

$$\frac{\partial\hat{\hat{\varphi}}_1}{\partial\nu_{A_1}} = c_{11}\hat{\hat{\varphi}}_1 + c_{12}\hat{\hat{\varphi}}_2, \qquad \frac{\partial\hat{\hat{\varphi}}_2}{\partial\nu_{A_2}} = c_{21}\hat{\hat{\varphi}}_1 + c_{22}\hat{\hat{\varphi}}_2 \quad \textit{на} \quad \Sigma_{T,T_1},$$

$$\hat{\hat{\varphi}}_1(x,T) = \hat{\varphi}_1(x,T) \quad \textit{в} \quad \Omega_1, \qquad \hat{\hat{\varphi}}_2(x,T) = \hat{\varphi}_2(x,T) \quad \textit{в} \quad \Omega_2, \quad ,$$

а функции $\hat{\varphi}_1(x,t)$ *и* $\hat{\varphi}_2(x,t)$ *определяются из решения задачи (54) – (64):*

$$\hat{p}_1 \in W_1(t_0,T), \quad \hat{p}_2 \in W_2(t_0,T), \tag{54}$$

$$-\frac{\partial\hat{p}_1(x,t)}{\partial t} + A_1^*(t)\hat{p}_1(x,t) = \sum_{k=1}^{m_1}\int\limits_{\Omega_1}\tilde{r}_k^2(\xi,t)g_k^{(1)}(\xi,x,t)[y_1(\xi,t) -$$

$$-\int\limits_{\Omega_1}\hat{\varphi}_1(\eta,t)g_k^{(1)}(\xi,\eta,t)d\eta\Big]\,d\xi \quad \textit{в} \quad Q^{(1)}_{t_0,T}, \tag{55}$$

$$-\frac{\partial\hat{p}_2(x,t)}{\partial t} + A_2^*(t)\hat{p}_2(x,t) = \sum_{k'=1}^{m_2}\int\limits_{\Omega_2}\tilde{\tilde{r}}_{k'}^2(\xi,t)g_{k'}^{(2)}(\xi,x,t)[y_2(\xi,t) -$$

$$-\int\limits_{\Omega_1}\hat{\varphi}_2(\eta,t)g_k^{(2)}(\xi,\eta,t)d\eta\Big]\,d\xi \quad \textit{в} \quad Q^{(2)}_{t_0,T}, \tag{56}$$

$$\frac{\partial\hat{p}_1}{\partial\nu_{A_1^*}} + \sigma_1\hat{p}_1 = 0 \quad \textit{на} \quad \Sigma^{(1)}_{t_0,T}\setminus\Sigma_{t_0,T}, \qquad \frac{\partial\hat{p}_2}{\partial\nu_{A_2^*}} + \sigma_2\hat{p}_2 = 0 \quad \textit{на} \quad \Sigma^{(2)}_{t_0,T}\setminus\Sigma_{t_0,T}, \tag{57}$$

$$\frac{\partial\hat{p}_1}{\partial\nu_{A_1^*}} = c_{11}\hat{p}_1 - c_{21}\hat{p}_2, \qquad \frac{\partial\hat{p}_2}{\partial\nu_{A_2^*}} = -c_{12}\hat{p}_1 + c_{22}\hat{p}_2, \qquad \textit{на}\Sigma_{t_0,T}, \tag{58}$$

$$B_1^*\hat{p}_1(\cdot,t_0) = 0, \quad \hat{p}_1(x,T) = 0 \quad \textit{в} \quad \Omega_1, \quad B_2^*\hat{p}_2(\cdot,t_0) = 0, \quad \hat{p}_2(x,T) = 0 \quad \textit{в} \quad \Omega_2, \tag{59}$$

$$\hat{\varphi}_1 \in W_1(t_0,T), \quad \hat{\varphi}_2 \in W_2(t_0,T), \tag{60}$$

$$\frac{\partial\hat{\varphi}_1(x,t)}{\partial t} + A_1(t)\hat{\varphi}_1(x,t) = q_1^{-2}(x,t)\hat{p}_1(x,t) \quad \textit{в} \quad Q^{(1)}_{t_0,T}, \tag{61}$$

$$\frac{\partial\hat{\varphi}_2(x,t)}{\partial t} + A_2(t)\hat{\varphi}_2(x,t) = q_2^{-2}(x,t)\hat{p}_2(x,t) \quad \textit{в} \quad Q^{(2)}_{t_0,T}, \tag{62}$$

$$\frac{\partial\hat{\varphi}_1}{\partial\nu_{A_1}}+\sigma_1\hat{\varphi}_1=r_1^{-2}\hat{p}_1 \quad \text{на} \quad \Sigma^{(1)}_{t_0,T}\setminus\Sigma_{t_0,T}, \quad \frac{\partial\hat{\varphi}_2}{\partial\nu_{A_2}}+\sigma_2\hat{\varphi}_2=r_2^{-2}\hat{p}_2 \quad \text{на} \quad \Sigma^{(2)}_{t_0,T}\setminus\Sigma_{t_0,T}, \quad (63)$$

$$\frac{\partial\hat{\varphi}_1}{\partial\nu_{A_1}}=c_{11}\hat{\varphi}_1+c_{12}\hat{\varphi}_2+r_3^{-2}(d_{11}\hat{p}_1-d_{21}\hat{p}_2)d_{11}+r_4^{-2}(d_{12}\hat{p}_1-d_{22}\hat{p}_2)d_{12},$$

$$\frac{\partial\hat{\varphi}_2}{\partial\nu_{A_2}}=c_{21}\hat{\varphi}_1+c_{22}\hat{\varphi}_2+r_3^{-2}(d_{11}\hat{p}_1-d_{21}\hat{p}_2)d_{21}+r_4^{-2}(d_{12}\hat{p}_1-d_{22}\hat{p}_2)d_{22}, \quad \text{на}\Sigma_{t_0,T}. \quad (64)$$

Задача (54) – (64) имеет единственное решение.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 1. В случае, когда $H_1=\mathbb{R}^{n_1}$, $H_2=\mathbb{R}^{n_2}$, $f_1^0=(\alpha_1^{(1)},\ldots,\alpha_{n_1}^{(1)})$, $f_2^0=(\alpha_1^{(2)},\ldots,\alpha_{n_2}^{(2)})$,

$$B_1f_1^0(x)=\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i^{(1)}w_i^{(1)}(x), \quad B_2f_2^0(x)=\sum_{i'=1}^{n_2}\alpha_{i'}^{(2)}w_{i'}^{(2)}(x), \quad (65)$$

где $w_i^{(1)}\in L^2(\Omega_1)$, $w_{i'}^{(2)}\in L^2(\Omega_2)$ — заданные линейно независимые функции, соотношения $B_1^*z_1(\cdot,t_0)=0$ и $B_2^*z_2(\cdot,t_0)=0$, входящие в (40) примут вид

$$\int\limits_{\Omega_1}w_i^{(1)}(x)z_1^{(2)}(x,t_0)dx=0, \quad i=\overline{1,n_1}, \quad \int\limits_{\Omega_1}w_{i'}^{(1)}(x)z_2^{(2)}(x,t_0)dx=0, \quad i'=\overline{1,n_2}.$$

Аналогичный вид будут иметь также соотношения $B_1^*\hat{p}_1(\cdot,t_0)=0$ и $B_2^*\hat{p}_2(\cdot,t_0)=0$, входящие в (59).

При заданных операторах B_1 и B_2 вида (65), используя пример 13 на стр. 55 из [6], можно показать, что проверка выполнения условия регулярности отображения C сводится к проверке линейной независимости некоторой конечной системы векторфункций.

В заключение отметим следующее.

Обобщение результатов работы на случай, когда область $\Omega=\cup_{k=1}^N\Omega_k$ составлена из N непересекающихся областей Ω_k, замыкания которых могут пересекаться только по их границам, проводится совершенно аналогично.

Аналогичные результаты можно получить для начально-краевой задачи трансмиссии вида (1) – (6) и в случае, когда вместо условий (4) на $\Sigma^{(1)}_{t_0,T_1}\setminus\Sigma_{t_0,T_1}$ и $\Sigma^{(2)}_{t_0,T_1}\setminus\Sigma_{t_0,T_1}$ заданы неоднородные условия Дирихле.

Заключение

Результаты данной статьи, таким образом, состоят в том, для систем, описываемых параболическими начально-краевыми задачами, при сформулированных выше ограничениях на параметры этих задач, получены представления для минимаксных прогнозных оценок решений и погрешностей оценивания через решения интегродифференциальных уравнений специального вида.

Методика и результаты работы могут быть использованы в дальнейших теоретических и прикладных исследованиях процессов в многослойных средах со сложными включениями при неоднородных условиях неидеального и идеального контакта [3], а также при использовании системного анализа этих процессов.

Список литературы

1. Наконечный О.Г. Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними. Київ: Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 2004. - 103 с.
2. Подлипенко Ю.К., Дабабнех Амер Минимаксное оценивание решений задач трансмиссии для эллиптических уравнений при отсутствии информации относительно условий сопряжения. Проблемы управления и информатики. - 2000. - №5 - С.52-72
3. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. - Киев.: Наукова думка, 1998. - 614 с.
4. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. - М.: Мир, 1972. - 407 с.
5. Наконечный О.Г., Подлипенко Ю.К., Зайцев Ю.А. Минимаксное прогнозное оценивание по неполным данным решений начально-краевых задач для параболических уравнений с разрывными коэффициентами. - Кибернетика и системный анализ. - 2000. - №5. - С.68-78
6. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974. - 479 с.