ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ
С ЧАСТИЧНО ЗАДАННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Н.Ю. Таратынова

Черноморский Филиал Московского Государственного Университета,
отделение прикладной математики
ул. Гер.Севастополя, 7, г.Севастополь, Крым, Украина, 99004

Abstract.
The solution finding of the linear programming problem with incomplete information and reconstruction of model parameters is investigated.

Введение

Модель линейного программирования

$$\begin{aligned} f(x) = (c, x) &\to \max \\ Ax &\leqslant b \\ x &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{1}$$

- оптимизация линейной функции на множестве решений системы линейных неравенств, проста по своей структуре и, вместе с тем, может быть применена к широкому кругу приложений. Особенно большое значение она приобрела как средство моделирования и оптимизации технико-экономических систем. Однако связи и отношения в реально существующих системах могут быть настолько сложны и многообразны, что практически невозможно описать такую систему математически строго, особенно если она характеризуется наличием неопределенных и плохо формализованных факторов.

Целью данной работы является исследование возможностей метода «обобщенного портрета» для восстановления системы ограничений в задачах линейного программирования с неполной информацией.

Постановка задачи

В работе рассматривается ситуация, когда параметры задачи (1) $c,\ A,\ b$ неизвестны, а исходная информация задана в виде набора точек наблюдения с указанием значений оптимизируемой функции в этих точках, и принадлежности этих точек к области допустимых решений.

x	x_1	x_2	$\dots$	x_m	(c,x)	$P(x)$
1	α_{11}	α_{12}	$\dots$	α_{1m}	y_1	σ_1
2	α_{21}	α_{22}	$\dots$	α_{2m}	y_2	σ_2
$\vdots$						
n	α_{n1}	α_{n2}	$\dots$	α_{nm}	y_n	σ_n

(2)

$$P(x) \triangleq \begin{cases} 1, & Ax \leqslant b; \\ 0, & Ax \geq b. \end{cases} \tag{3}$$

Требуется по заданной таким образом неполной информации отыскать решение $\tilde{x}_0$ наиболее близкое к решению x_0 исходной (неизвестной) задачи (1).

$$||\tilde{x}_0 - x_0|| \to \inf$$

Общая схема решения

Существуют различные подходы к решению задач с неполной информацией.

Используемый подход предполагает поиск решения после восстановления параметров модели (целевая функция, система ограничений), которые могут представлять самостоятельный интерес.

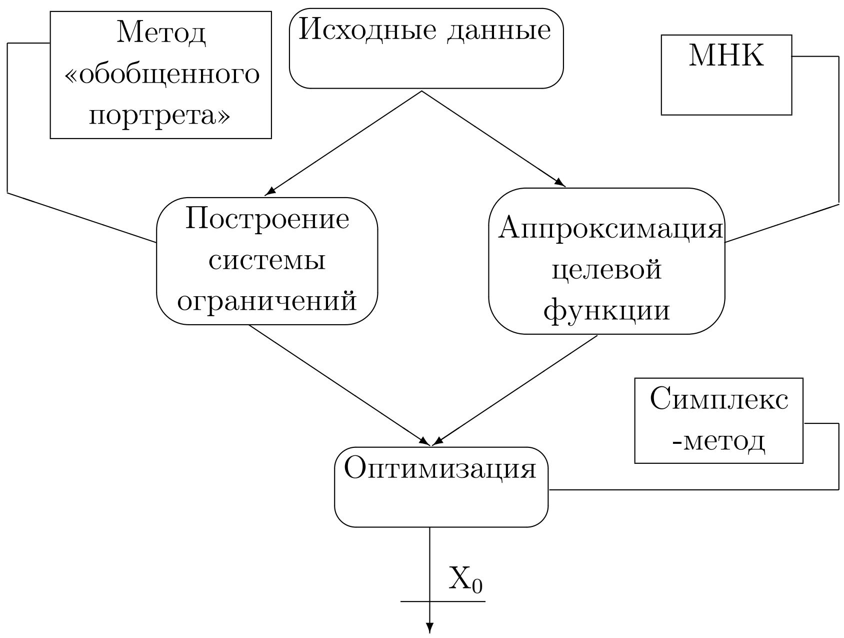

Рис. 1. Восстановление параметров модели

Для восстановления целевой функции и оптимизации целесообразно использовать хорошо известные методы: метод наименьших квадратов, выбор которого обосновывается известными свойствами оценок наименьших квадратов (несмещенность, эффективность) и симплекс-метод.

Основной интерес представляет построение системы ограничений.

Построение системы ограничений

При построении системы ограничений можно выделить два этапа:

Первый этап: Разбиение множества недопустимых точек на подмножества, каждое из которых линейно отделимо от множества допустимых точек.

Второй этап: Построение разделяющих поверхностей для каждого из этих подмножеств.

Первый этап. Рассмотрим первый этап построения системы ограничений.

Алгоритм основан на простейшей рекурентной персептронной процедуре построения отделяющей гиперплоскости вида

$$\Lambda_0 = 0$$

$$\Lambda_{t+1} = \begin{cases} \Lambda_t + cX_{t+1}, & [(\Lambda_t, X_{t+1}) \leqslant 0]\, and (X_{t+1} \in W_2^*); \\ \Lambda_t - cX_{t+1}, & [(\Lambda_t, X_{t+1}) \geqslant 0]\, and (X_{t+1} \in W_1^*); \\ \Lambda_t. \end{cases} \tag{4}$$

где

$X = (x_1, \ldots, x_m, 1)$ - расширенный $(m+1)$-мерный вектор;

$\Lambda_t = (\lambda_1^t, \ldots, \lambda_{m+1}^t)$ - вектор коэффициентов;

W_1^* и W_2^* - множества расширенных векторов, полученных соответственно из множества W_2 дополнением $(m+1)$-й координаты, равной единице;

c - константа: $0 \leq c \leqslant 1$;

$t = 0, 1, 2, \ldots$ – шаги итерации;

X_t – вектор из $W_1^* \cup W_2^*$, предъявленный для обучения распощнаванию на шаге t.

Алгоритм

(1) Используя процедуру (4), строим $s = |W_2|$ гиперплоскостей $L_j(x) = 0$, отделяющих по отдельности каждую точку $x \in W_2$ от всех точек из W_1.

(2) Решаем задачу о минимальном покрытии, отбирающую наименьшее число гиперплоскостей из $L_j(x) = 0, j = \overline{1, s}$, в совокупности кусочно-линейно отделяющих все точки из W_2 от множества W_1. Для этой цели строится таблица $||l_{ij}||_{s \times s}$, в которой $l_{ij} = 1$, если гиперплоскость L_i отделяет точку с номером j из множества W_2 и $l_{ij} = 0$-в противном случае.

Поставим в соответствие каждой гиперплоскости $L_i(x) = 0, i = \overline{1, s}$, булеву переменную α_i и рассмотрим конъюктивную нормальную форму (к.н.ф.)

$$K(||l_{ij}||_{s \times s}) = \prod_{j=1}^{s} \left(\bigvee_{i=1}^{s} \alpha_i l_{ij} \right). \tag{5}$$

	1	2	3	...	s
α_1	l_{11}	l_{12}	l_{13}	...	l_{1s}
α_2	l_{21}	l_{22}	l_{23}	...	l_{2s}
α_3	l_{31}	l_{32}	l_{33}	...	l_{3s}
$\vdots$					$\vdots$
α_s	l_{s1}	l_{s2}	l_{s3}	...	l_{ss}

Если в к.н.ф. раскрыть скобки и выполнить все возможные операции поглощения, то, очевидно, в полученной дизъюнктивной нормальной форме будут содержатся конъюнкции, соответствующие всем тупиковым несокращаемым наборам гиперплоскостей из $L_i(x)$, отделяющим в совокупности W_2 от W_1.

(3) Из полученных тупиковых наборов по какому-либо признаку выбирается один набор. Примерами таких признаков могут быть: количество гиперплоскостей в наборе и/или суммарное число отделяемых каждой гиперплоскостью точек [2].

Пусть

$$S_k = \{L_{r_1}(x) = 0, L_{r_2}(x) = 0, \dots, L_{r_k}(x) = 0\}$$

– выбранный набор гиперплоскостей.

Пусть $N(r_i) \subset W_2$, $(i = \overline{1,k})$ – множество точек из W_2, отделяемых гиперплоскостью L_{r_i} от множества W_1. Обозначим

$$W_2^i = N(r_i) \quad (i = \overline{1,k}).$$

Система множеств $\{W_2^i\}_{i=\overline{1,k}}$ – результат работы первого этапа.

Следующий этап решения: для каждого W_2^i, $i = \overline{1,k}$ построить разделяющую поверхность по методу «обобщенного портрета».

Второй этап. Пусть требуется разделить два конечных множества m-мерных векторов:

$$W_1$$

$$W_2^i \quad (i = \overline{1,k})$$

Задача разделения множеств ставится таким образом: необходимо найти уравнение оптимальной гиперплоскости в m-мерном пространстве признаков

$$x\psi_i^0 - b_i^0 = 0$$

которая разделяет точки множеств W_1 и W_2^i и, в то же время, наиболее удалена от выделяемых областей - выпуклых оболочек каждого их этих множеств.

Геометрическая интерпретация задачи разделения двух подмножеств точек плоскостью (точнее, прямой линией) для случая двух переменных представлена на рис. 2.

Построение разделяющей поверхности идет здесь следующим образом.

Ищется такое направление ψ_i^0 в полном пространстве признаков, чтобы проекции выпуклых оболочек точек обучающей выборки одного (W_1) и другого $(W_2^i(i = \overline{1,k}))$

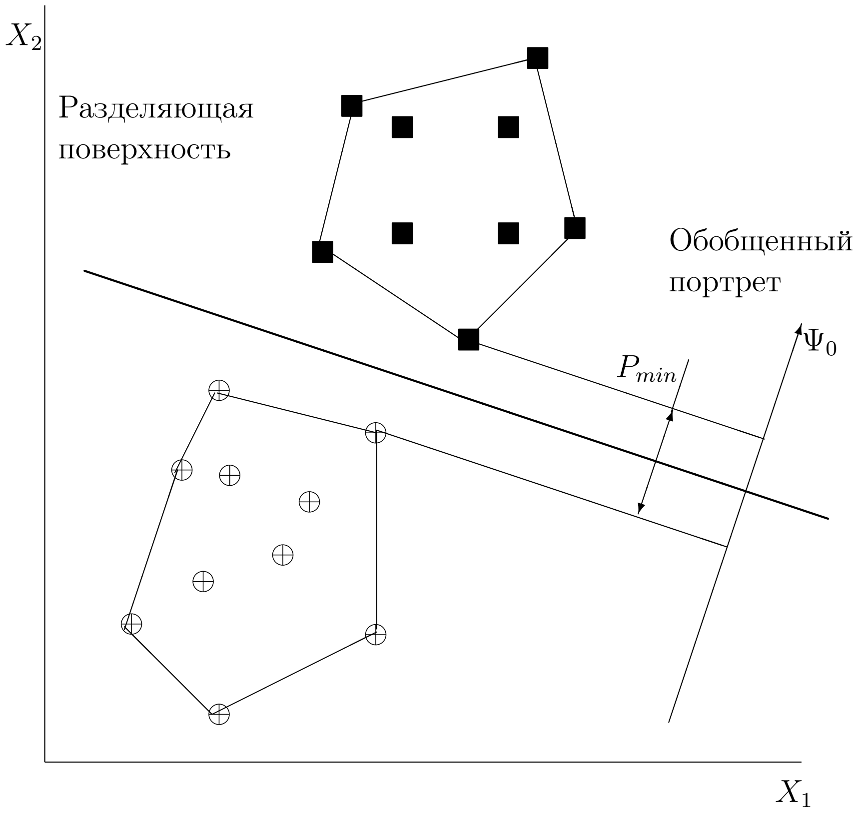

Рис. 2. Метод обобщенного портрета

класса на это направление были максимально удалены друг от друга:

$$\psi_i^0 = \max_{\psi}[\min_{\tilde{x}\in W_2^i} \tilde{x}\psi - \max_{x\in W_1} x\psi]$$

Как показано на рисунке 2, разделяющая поверхность проводится перпендикулярно выбранному направлению ψ_0^i через середину отрезка, соединяющего проекции разделяемых областей:

$$b_i^0 = \frac{\min_{\tilde{x}\in W_2^i} \tilde{x}\psi_i^0 + \max_{x\in W_1} x\psi_i^0}{2}$$

Эта разделяющая гиперплоскость отделяет точки множества W_1, для которых $x\psi_i^0 \leqslant b_i^0$, от точек множества W_2^i для которых $x\psi_i^0 > b_i^0$, а её направляющий вектор ψ_0^i и называется, собственно, «обобщенным портретом». [3]

Полученная система ограничений

$$x\psi_i^0 \leqslant b_i^0, \quad i = \overline{1,k} \tag{6}$$

— результат работы второго этапа.

Рассмотрим алгоритм построения «обобщенного портрета» (алгоритм ОП) [3].

Конечные множества векторов $X(x_1, \ldots, x_a)$ и $\tilde{X}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_b)$ разделимы гиперплоскостью. Это означает, что существует такое число $k < 1$ и такой вектор ψ, что:

$$\begin{cases} (x_i\psi) \geqslant 1, \quad x_i \in X \quad (i = \overline{1, a}); \\ (\tilde{x}_j\psi) \leqslant k, \quad \tilde{x}_j \in \tilde{X} \quad (j = \overline{1, b}); \\ k < 1. \end{cases} \tag{7}$$

Определение 1. Обобщенным портретом называется минимальный по модулю вектор ψ_0, удовлетворяющий неравенствам (7).

Этот вектор можно представить в виде

$$\psi_0 = \sum_{i=1}^{a} \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^{b} \beta_j \tilde{x}_j,$$

причем

$$\begin{aligned} &\alpha_i((x_i\psi) - 1) = 0, \quad i = \overline{1, a} \\ &\beta_j((\tilde{x}_j\psi) - k) = 0, \quad j = \overline{1, b} \\ &\alpha_i \geqslant 0, \quad \beta_j \geqslant 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Условия (8) означают, что вектор ψ_0 раскладывается по тем векторам $x_i, \tilde{x}_j$, на которых достигаются равенства: $(x_i\psi) = 1; (\tilde{x}_j\psi) = k$.

Определение 2. Векторы, по которым раскладывается обобщенный портрет называются крайними, или информативными.

Геометрически крайние векторы множества X - это те векторы, которых впервые коснется разделяющая гиперплоскость при ее параллельном переносе в направлении множества X. Аналогично определяются крайние векторы множества $\tilde{X}$.

Обычно, если множества X и $\tilde{X}$ разделимы гиперплоскостью, то число крайних векторов невелико, т.е. вектор ψ_0 можно представить как линейную комбинацию небольшого числа векторов x_i и $\tilde{x}_j$.

Метод «обобщенного портрета» заключается в выявлении крайних векторов и определении коэффициентов разложения по ним вектора ψ_0.

Так как вектор ψ можно представить в виде

$$\psi = \sum_{i=1}^{a} \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^{b} \beta_j \tilde{x}_j,$$

где $\alpha_i \geqslant 0, \quad \beta_j \geqslant 0$, то для того, чтобы его найти достаточно отыскать соответствующие значения α_i и β_j. Известно [3], что α_i и β_j есть координаты точки покоя устойчивой системы уравнений:

$$\dot{\alpha}_i = \begin{cases} 1 - (x_i\psi), & 1 - (x_i\psi) \geqslant 0 \quad (\alpha_i > 0); \\ 0, & \alpha_i = 0. \end{cases}$$

$$\dot{\beta}_j = \begin{cases} -k + (\tilde{x}_j \psi), & -k + (\tilde{x}_j \psi) \geqslant 0 \quad (\beta_i > 0); \\ 0, & \beta_i = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Суть алгоритма ОП заключается в отыскании точки покоя системы (9).

Искать точку покоя системы (9) удобно с помощью модифицированного метода параллельных касательных — «партан», который предложен для списка экстремума отрицательно определенных квадратичных форм. С помощью этого метода найти экстремум за $(2m-1)$ шагов, где m - ранг формы.

Поиск точки покоя системы эквивалентен отысканию в положительном квадранте $(\alpha_i \geqslant 0, \quad \beta_j \geqslant 0, \quad i = \overline{1,a}, \quad j = \overline{1,b})$ максимума квадратичной формы:

$$W(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{a} \alpha_i - k \sum_{j=1}^{b} \beta_j - \frac{1}{2}(\psi, \psi), \tag{10}$$

где

$$\psi = \sum_{i=1}^{a} \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^{b} \beta_j \tilde{x}_j.$$

Поиск максимума формы (10) не во всем пространстве α, β, а только в его части, естественно, затрудняет решение задачи (по существу, решается задача квадратичного программирования, правда, при достаточно простых ограничениях: $\alpha_i \geqslant 0$). В этих условиях максимум определяется на за $(2m-1)$, а, вообще говоря, за большое число шагов.

Алгоритм «партан» таков, что в m-мерном случае в точках P_{2m-4} и P_{2m-1} касательные плоскости параллельны, и экстремум функции $f(x)$ находится на прямой, соединяющей P_{2m-4} и P_{2m-1}, т.е. в точке P_{2m}.

Пусть $P_0, P_2, \ldots, P_{2m}$ - последовательность точек в m-мерном пространстве (первую точку для удобства обозначим не P_1, а P_0).

Из точки P_0 движемся вдоль ломаной:

Направления отрезков $P_2P_0, P_3P_2, \ldots, P_{2k+1}P_{2k}, \ldots, P_{2m-1}P_{2m-2}$ определяют соответственно grad $f(P_0)$,grad $f(P_2)$,...,grad $f(P_{2k})$,...

Направления же отрезков $P_4P_3, \ldots, P_{2k-1}P_{2k-4}, \ldots, P_{2m}P_{2m-1}$ определяются разностями $P_3 - P_0, \ldots, P_{2k-1} - P_{2k-4}, \ldots$

Определение 3. Движение вдоль отрезков $P_{2k+1}P_{2k}$ будем называть градиентным шагом, а вдоль отрезков $P_{2k}P_{2k-1}$ - «овражным шагом».

Движение вдоль любого отрезка происходит вплоть до достижения экстремума функции $f(x)$.

Если, например, отрицательно определенная форма задана в виде

$$W(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{a} \alpha_i - k \sum_{j=1}^{b} \beta_j - \frac{1}{2}(\psi, \psi),$$

где

$$\psi = \sum_{i=1}^{a} \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^{b} \beta_j \tilde{x}_j,$$

то за начальную точку выбирается любая точка пространства α, β, а направление движения - вдоль градиентного шага:

$$\text{grad } W(\alpha, \beta) = (1 - x_1\psi); \ldots ; (-k + \tilde{x}_b\psi).$$

Обозначим через $\dot{\alpha}_1, \ldots, \dot{\alpha}_a$, $\dot{\beta}_1, \ldots, \dot{\beta}_b$ координаты grad $W(\alpha, \beta)$. Тогда точка максимума grad $W(\alpha, \beta)$ при движении по градиентному шагу будет достигнута при величине шага

$$h = \frac{\sum \dot{\alpha}_i - k \sum \dot{\beta}_j - (\psi\dot{\psi})}{||\dot{\psi}||^2}$$

где

$$\dot{\psi} = \sum_{i=1}^{a} \dot{\alpha}_i x_i - \sum_{j=1}^{b} \dot{\beta}_j \tilde{x}_j.$$

Координаты этой точки могут быть вычислены:

$$\alpha(2k + 1) = \alpha(2k) + \text{grad } W[\alpha(2k), \beta(2k)]h,$$

$$\beta(2k + 1) = \beta(2k) + \text{grad } W[\alpha(2k), \beta(2k)]h.$$

Направление движения по «овражному» шагу вычисляется как

$$\Delta^{\alpha} = \alpha(2k - 1) - \alpha(2k - 4),$$

$$\Delta^{\beta} = \beta(2k - 1) - \beta(2k - 4),$$

а величина шага - по формуле

$$h = \frac{\sum \Delta_i^{\alpha} - k \sum \Delta_j^{\beta} - (\psi\psi_{\Delta})}{||\psi_{\Delta}||^2}$$

где

$$\psi_{\Delta} = \sum_{i=1}^{a} \Delta_i^{\alpha} x_i - \sum_{j=1}^{b} \Delta_j^{\beta} \tilde{x}_j.$$

Координаты точки $\alpha(2k)$ $\beta(2k)$ вычисляются так:

$$\alpha(2k) = \alpha(2k - 1) + \Delta^{\alpha} h,$$

$$\beta(2k) = \beta(2k - 1) + \Delta^{\beta} h.$$

Когда максимум отрицательно определенной формы $W(\alpha, \beta)$ определяется в положительном квадранте, направление градиентного шага задается системой (9). При выборе величины шага надо следить за тем, чтобы следующая точка траектории движения не вышла за пределы положительного квадранта. Для этого величина градиентного шага определяется как:

$$h^* = \min\left[\left|\frac{\alpha}{\dot\alpha}\right|, \dots, \left|\frac{\beta}{\dot\beta}\right|, h\right],$$

где минимум берется по тем отношениям $\left|\frac{\alpha}{\dot\alpha}\right|, \left|\frac{\beta}{\dot\beta}\right|$, для которых величина $\dot\alpha, \dot\beta$ отрицательна. При выборе величины «овражного» шага аналогично определяется величина

$$h^* = \min\left[\left|\frac{\alpha}{\Delta^\alpha}\right|, \dots, \left|\frac{\beta}{\Delta^\beta}\right|, h\right].$$

Система (9) решается до тех пор, пока не выполнятся либо неравенства

$$|\dot\alpha_1| \leqslant \epsilon \dots |\dot\alpha_a| \leqslant \epsilon, |\dot\beta_1| \leqslant \epsilon \dots |\dot\beta_b| \leqslant \epsilon \tag{11}$$

Выполнение неравенства (11) означает, что разделяющая гиперплоскость построена.

Статистический эксперимент

Целесообразность выбора метода «обобщенного портрета» для построения системы ограничений обосновывается проведенным статистическим экспериментом.

Алгоритм метода статистических испытаний включает выполнение N испытаний, в каждом из них задаются случайные значения исходных данных и сравниваются величины ошибки при построении системы ограничений персептронным алгоритмом и методом «обобщенного портрета» (рис. 2).

Выбирается задача

$$f(x) = (c, x) \to \max,$$
$$Ax \leqslant b,$$
$$x \geqslant 0,$$

для неё находится точное решение z^*, (c, z^*). И выполняется N испытаний, в каждом испытании:

(1) Генерируется случайная выборка T_{lm}, заданной длины l. Для этого l раз генерируется случайный m-мерный вектор ξ и вычисляется $P(\xi)$ (проверяется $A\xi \leqslant b$).
(2) Вычисляется система ограничений персептронным алгоритмом (A_1, b_1) и по методу «обобщенного портрета» (A_2, b_2).
(3) Находится решение z_1 задачи

$$\begin{aligned} f(x) = (c, x) &\to \max \\ A_1 x &\leqslant b_1 \\ x &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{12}$$

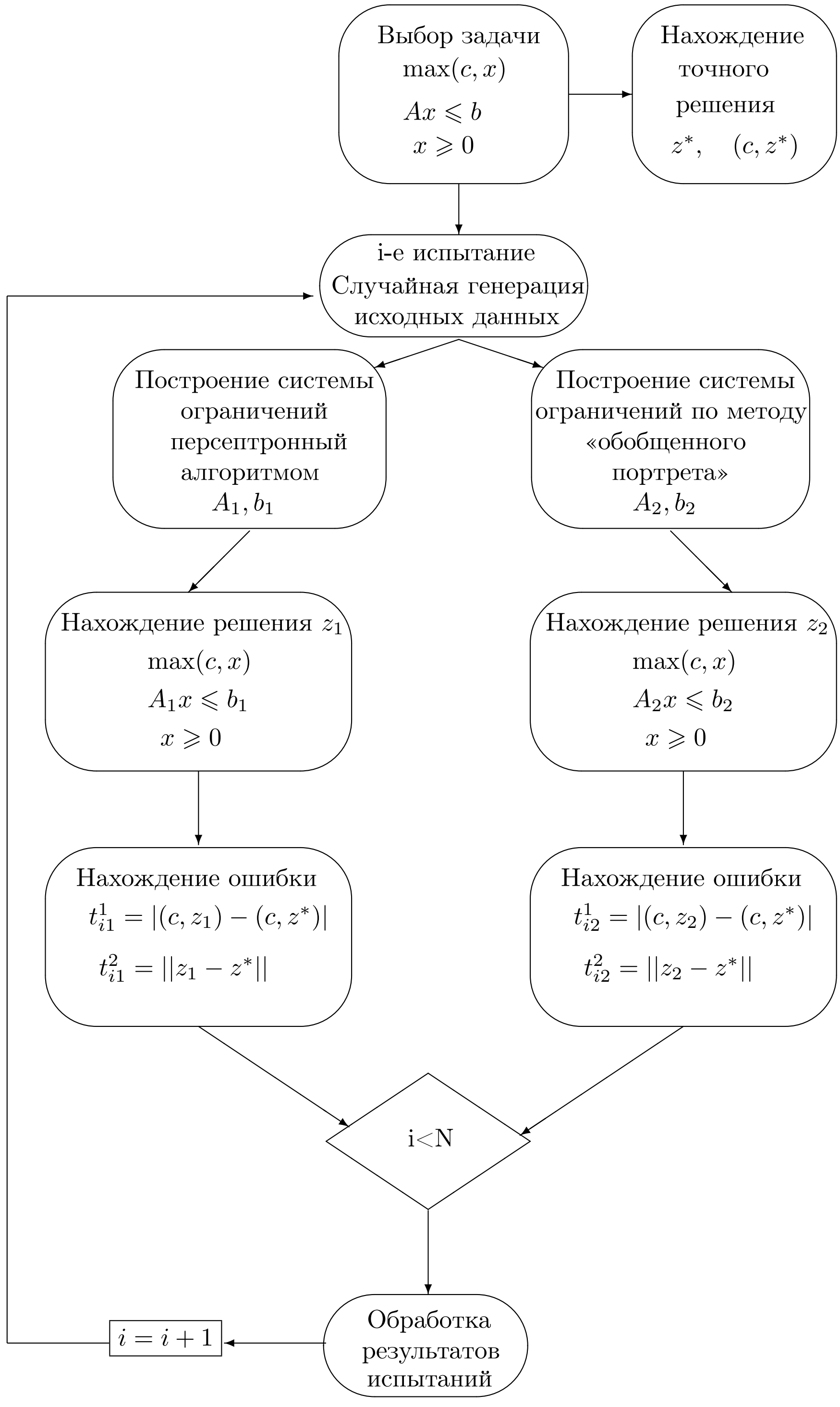

Рис. 3. Схема вычислений методом статистических испытаний и решение z_2 задачи

$$\begin{aligned} f(x) = (c, x) \to \max \\ A_2 x \leqslant b_2 \\ x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{13}$$

(4) Вычисляются ошибки

- Оценки $t^1_{i1} = |(c, z_1) - (c, z^*)|$ и $t^1_{i2} = |(c, z_2) - (c, z^*)| \Rightarrow$ в таблицу 1 (i-номер испытания)
- Оценки $t^2_{i1} = ||z_1 - z^*||$ и $t^2_{i2} = ||z_2 - z^*|| \Rightarrow$ таблицу 2.

Установим влияние выбора метода на величину ошибки по F-критерию Фишера. F определятся из соотношения факторной и остаточной дисперсии, рассчитанных на одну степень свободы. Рассмотрим значения в таблице 1(таблице 2). Для наглядности опустим верхний индекс, обозначающий номер таблицы:

t_{i1} - значение, полученное в i-м эксперименте для персептронного алгоритма;

t_{i2} - значение, полученное в i-м эксперименте по методу «обобщенного портрета»;

$$S^2_{ost} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m t^2_{ij} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m t^2_j}{m(n-1)},$$

$$S^2_f = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^m t^2_j - \frac{1}{mn} (\sum_{j=1}^m t_j)^2}{m-1},$$

$$F = \frac{S^2_f}{S^2_{ost}}$$

где

$$t_j = \sum_{i=1}^n t_{ij},$$

n – количество проведенных экспериментов; m – количество методов.

Для проведенного исследования:

$n = 30; \qquad m = 2.$

В результате вычислений были получены значения

для таблицы 1 $F = 9.697106375$; для таблицы 2 $F = 9.698439724$.

Возьмем уровень значимости $\alpha = 0.05$ и найдем по таблице Фишера $F_{0.95}(m-1, m(n-1)) \approx 4,00$.

Так как $F > F_{0.95}(m-1, m(n-1))$, то делаем вывод о значимости выбора метода и целесообразности метода с меньшей средней ошибкой.

Средняя ошибка методов:

по таблице 1

$$\Delta_{perc} = \frac{t_1}{n} = 46.747196 \qquad \Delta_{op} = \frac{t_2}{n} = 7.903679$$

и по таблице 2

$$\Delta_{perc} = \frac{t_1}{n} = 34.003500 \qquad \Delta_{op} = \frac{t_2}{n} = 17.331529$$

Список литературы

1. Еремин И.И., Мазуров В.Д. Нестационарные процессы математического программирования. Наука. М., 1979, с.182–290
2. Донской В.И., Башта А.И. Дискретные модели принятия решений при неполной информации. Симферополь: Таврия, 1992, с.149-153
3. Вапник В.Н., Журавлев А.А., Червоненкис А.Я. Алгоритмы обучения машин распознаванию образов ОП-1, ОП-2, ОП-3.//Сб. под редакцией В. Н. Вапника «Алгоритмы обучения распознаванию образов». М.: Советское радио, 1973, с.89-109