УДК 519.962.22

# МІНІМАКСНІ ЗАДАЧІ СПОСТЕРЕЖЕННЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

**С.М. Жук**

Київський національний університет ім. Т.Г. Шевченка,
факультет кібернетики
пр-т Академіка Глушкова-2, корпус 6, Київ, Україна,03680
e-mail: *beetle@unicyb.kiev.ua*

**Abstract.**

The minimax estimations of the scalar product $\langle l, x(N)\rangle$ are obtained on the basis of observations $y(k) = H(k)x(k) + \eta(k)$ up to $N-1$ moment assuming that $l \in L \subseteq \mathbb{R}^n$, $x(k)$ is a solution of the difference equation $S(k+1)x(k+1) = A(k)x(k) + f(k), x(0) = f_0$ with some rectangular matrix $S(k)$ of rank $p(k)$, $f_0$, $f(k)$ – are unknown vectors, $\eta(k)$ – is random vector with unknown correlation matrix $R(k)$, $M\eta(k) \equiv 0$.

## Вступ

Лінійні різницеві рівняння вигляду

$$S(k+1)x(k+1) = A(k)x(k) + f(k),\ x(0) = f_0,\ k = \overline{0, N-1} \tag{0.1}$$

з прямокутною матрицею $S(k+1)$ рангу $p(k+1)$ зустрічаються, зокрема, у теорії керування [1] та економіці (модель Леонтьєва). Інші приклади виникнення рівнянь такого типу можна знайти в огляді [1]. У літературі [1] рівняння типу (0.1) зі сталою матрицею при $x(k+1)$ дістали назву «сингулярних».

Якщо відомо, що рівняння (0.1) має непорожню множину розв'язків і спостерігається вектор $y(k)$ вигляду

$$y(k) = H(k)x(k) + \eta(k),\ k = \overline{0, N-1}, \tag{0.2}$$

причому початкове значення $f_0$ детерміновані збурення $f(k)$ системи (0.1) та випадкові шуми $\eta(k)$ у каналі спостереження (0.2) - невідомі, то, природним чином, постає задача апроксимації розв'язків (0.1) за спостереженнями (0.2) - так звана задача спостереження. У тому випадку, коли вектор $(f_0, f(0) \dots f(N-1))$ та матриця

$$R = \mathrm{diag}\{M\eta(0)\eta^T(0) \dots M\eta(N-1)\eta^T(N-1)\}$$

є елементами деяких наперед заданих підмножин $G_1$, $G_2$ у відповідних просторах, ефективним засобом для відновлення розв'язків (0.1) на основі (0.2) є мінімаксний підхід. Для узагальнених задач спостереження останній полягає у апроксимації лінійної функції $l = \langle l, x(N)\rangle$ оптимальною у мінімаксному сенсі афінною функцією $\hat{l} = \langle \hat{u}, y\rangle + \hat{c}$, де $\hat{u} \in \mathcal{U}, x(k)$ – деякий розв'язок (0.1), $y = (y(0) \dots y(N-1))$. Останнє означає, що максимальне відхилення афінної функції $\hat{l}$ від оцінюваного виразу $l$ не перевищує максимального відхилення від $l$ будь-якої іншої афінної функції $\langle u, y\rangle + c$, породженої довільним вектором $u \in \mathcal{U}$ і скаляром $c \in \mathbb{R}$.

У [2] представлено огляд журнальних публікацій та монографій, де, зокрема, розглядалися мінімаксні задачі спостереження для лінійних різницевих рівнянь вигляду (0.1) з одиничною матрицею при $x(k+1)$. У запропонованій роботі розглядається мінімаксна задача спостереження (оцінювання) для рівняння (0.1). Припускається, що $G_1$ — зв'язна компактна підмножина скінченномірного евклідового простору, $G_2$ — компакт відповідного простору симетричних невід'ємно означених матриць. У контексті теорії мінімаксних оцінок [2]-[3] такі постановки задач розглядаються вперше. Слід зауважити, що мінімаксні задачі спостереження для (0.1) в силу скінченномірності просторів, яким належать розв'язки (0.1) та спостереження (0.2), споріднені у цьому сенсі задачам гарантованого оцінування розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які досліджувалися у [4]-[5].

## Постановка задачі

Розглянемо лінійне різницеве рівняння вигляду:

$$S(k+1)x(k+1) = A(k)x(k) + f(k),\ x(0) = f_0,\ k = \overline{0, N-1}, \tag{1}$$

де $S(k+1)$ — $m \times n$-матриця рангу $p(k+1)$, $A(k)$ — деяка $m \times n$-матриця, $f_0 \in \mathbb{R}^n, f(k) \in \mathbb{R}^m,\ k = \overline{0, N-1}$. Припустемо, що множина розв'язків (1) непорожня і спостереження за станом системи (1) мають вигляд:

$$y(k) = H(k)x(k) + \eta(k),\ y(k) \in \mathbb{R}^l,\ k = \overline{0, N-1}, \tag{2}$$

де $H(k)$ — відома $l \times n$-матриця, $x(k)$, $k = \overline{0, N-1}$ задовольняє (1), $\eta(k) \in \mathbb{R}^l$ — випадковий вектор, $R(k) = M\eta(k)\eta^T(k)$. Припустимо також, що математичне сподівання $M\eta(k)$ відомо. Тоді, без витрати загальності, вважатимемо, що $M\eta(k) = 0$. Нехай вектор $f = (f_0, f(0), \ldots, f(N-1))$ та матриця $R = \mathrm{diag}\{R(0) \ldots R(N-1)\}$ невідомі, причому $f$ належить зв'язній компактній множині $G_1$ відповідного евклідового простору, $R$ є елементом компакту $G_2$ у просторі симетричних невід'ємно означених матриць відповідного порядку. Задача мінімаксного спостереження, яку далі у тексті будемо називати задачею мінімаксного оцінування, полягає у знаходженні оптимальної у мінімаксному сенсі оцінки виразу [1] $\langle l, x(N)\rangle$, де $l \in L \subseteq \mathbb{R}^n$, за спостереженнями до $N-1$-моменту включно у вигляді:

$$\widehat{\langle l, x(N)\rangle} = \sum_{k=0}^{N-1} \langle \hat{u}(k), y(k)\rangle + \hat{c}, \hat{u}(k) \in \mathbb{R}^m, \hat{c} \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

**Зауваження.** Поставлена задача еквівалентна побудові однокрокового мінімаксного екстраполятора [2] лінійної функції на станах системи (1).

[1] Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначено скалярний добуток у відповідному евклідовому просторі

**Задачі мінімаксного оцінювання для різницевих рівнянь**

Введемо поняття середньоквадратичних мінімаксних оцінки та похибки.

**Означення 1.** Оцінку $\langle \widehat{\widehat{l, x(N)}} \rangle$ вигляду (3), що знаходиться з умови:

$$\inf_{\mathcal{U},\mathbb{R}} \sup_{\tilde{G},G_2,N^*} M|\langle l, x(N)\rangle - \langle \widehat{l, x(N)}\rangle|^2 = \sup_{\tilde{G},G_2,N^*} M|\langle l, x(N)\rangle - \langle \widehat{\widehat{l, x(N)}}\rangle|^2$$

назвемо *середньоквадратичною мінімаксною оцінкою.*

Вираз $\sigma = \sup_{\tilde{G},G_2,N^*} M|\langle l, x(N)\rangle - \langle \widehat{\widehat{l, x(N)}}\rangle|^2$ назвемо *мінімаксною середньоквадратичною похибкою оцінювання.*

**Зауваження.** Явний вигляд множин $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m$, $N^* \subseteq \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ та $\tilde{G} \subseteq G_1$ буде встановлено нижче.

Перейдемо до знаходження мінімаксної оцінки виразу $\langle l, x(N)\rangle$. З цією метою з'ясуємо структуру множини розв'язків (1). Позначимо через $S^+(k)$ матрицю, псевдообернену [6] до $S(k)$, через $N(S(k))$ — ядро матриці $S(k)$. Відомо [6], що матриці [2] $\widetilde{\mathcal{P}}(k) = E - S(k)S^+(k)$ та $\mathcal{P}(k) = E - S^+(k)S(k)$ відповідають ортопроекторам на підпростори $N(S^T(k))$ та $N(S(k))$ відповідно. Зрозуміло, що множина розв'язків (1) непорожня лише тоді, коли при кожному $k = \overline{0, N-1}$ права частина (1) лежить у образі матриці $S(k)$, що еквівалентно виконанню таких умов:

$$\widetilde{\mathcal{P}}(k+1)A(k)x(k) + \widetilde{\mathcal{P}}(k+1)f(k) = 0,\ k = \overline{0, N-1}. \tag{4}$$

Покладемо $B(k) = S^+(k)$. Якщо при кожному $k$ справджуються умови (4), то (1) еквівалентне наступному рівнянню:

$$x(k+1) = B(k+1)A(k)x(k) + B(k+1)f(k) + \mathcal{P}(k+1)_{v_{k+1}},\ x(0) = f_0,\ v_{k+1} \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Помітимо, що умови (4) являють собою деякі співвідношення між векторами $f_0, f(k)$ та $v_{k+1}$. Для того, щоб знайти їх явно, введемо матрицю $\Phi(k,s)$, яка знаходиться з рівняння: $\Phi(t+1,s) = B(t+1)A(t)\Phi(t,s)$, $\Phi(s,s) = E$. Тоді кожен розв'язок (5) можна подати у вигляді:

$$x(k) = \Phi(k,0)x(0) + \sum_{s=1}^{k} \Phi(k,s)B(s)f(s-1) + \sum_{s=1}^{k} \Phi(k,s)\mathcal{P}(s)v_s. \tag{6}$$

Підставляючи (6) до (4), одержимо шукане співвідношення:

$$\widetilde{\mathcal{P}}(k+1)A(k)[\Phi(k,0)f_0 + \sum_{s=1}^{k} \Phi(k,s)(B(s)f(s-1) + \mathcal{P}(s)v_s)] + \widetilde{\mathcal{P}}(k+1)f(k) = 0. \tag{7}$$

[2]Тут і далі по тексту черещ $E$ позначено одиничну матрицю відповідного порядку

Введемо вектор $v = (v_1 \dots v_N) \in N^*$ та блочну матрицю $P = \mathrm{diag}\{\mathcal{P}(1) \dots \mathcal{P}(N)\}$. Зрозуміло, що співвідношення (7) виконуються при кожному $k$, якщо має місце рівність:

$$\widetilde{D}f + \widetilde{C}Pv = 0 \qquad (*),$$

де $$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & \dots & 0_{m\times n} \\ \widetilde{\mathcal{P}}(2)A(1) & 0_{m\times n} & \dots & 0_{m\times n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{\mathcal{P}}(N)A(N-1)\Phi(N-1,1) & \widetilde{\mathcal{P}}(N)A(N-1)\Phi(N-1,2) & \dots & 0_{m\times n} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{P}}(1)A(0) & \widetilde{\mathcal{P}}(1) & 0_{m\times n} & \dots & 0_{m\times n} \\ \widetilde{\mathcal{P}}(2)A(1)\Phi(1,0) & \widetilde{\mathcal{P}}(2)A(1)B(1) & \widetilde{\mathcal{P}}(2) & \dots & 0_{m\times n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \widetilde{\mathcal{P}}(N)A(N-1)\Phi(N-1,0) & \widetilde{\mathcal{P}}(N)A(N-1)\Phi(N-1,1)B(1) & \widetilde{\mathcal{P}}(N)A(N-1)\Phi(N-1,2)B(2) & \dots & \widetilde{\mathcal{P}}(N) \end{pmatrix}.$$

Покладемо $\widetilde{\mathfrak{P}} = E - \widetilde{C}P[\widetilde{C}P]^+$, $\mathfrak{P} = E - [\widetilde{C}P] + \widetilde{C}P$. Розв'язуючи (*) відносно $v$, одержимо:

$$v = -[\widetilde{C}P]^+\widetilde{D}f + \mathfrak{P}d,\ d \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

$$\widetilde{\mathfrak{P}}\widetilde{D}f = 0. \tag{9}$$

Співвідношення (8)-(9), зокрема, означають, що $N^*$ — це афінна підмножина $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$, утворена векторами $v$ вигляду (8), а $\widetilde{G} = \{f \in G_1 \ : \ \widetilde{\mathfrak{P}}\widetilde{D}f = 0\}$. Сформулюємо одержаний результат у вигляді твердження.

**Твердження 1.** *Множина розв'язків системи* (1) $X_1$ *непорожня тоді і лише тоді, коли* $\widetilde{G} \neq \emptyset$. *Якщо* $\widetilde{G} \neq \emptyset$, *то* $X_1$ *збігається з множиною розв'язків* (5), *причому вектори* $f$ *та* $v$, *компонентами яких є* $f_0$, $f(k)$ *та* $v_k$ *з правих частин* (5), *задовольняють співвідношення* (9) *та* (8) *відповідно.*

**Наслідок 1.** *Якщо* $G_1$ *— опукла множина і* $\forall f \in G_1 \Rightarrow -f \in G_1$, *то* $X_1 \neq \emptyset$.

На підставі цього твердження ми можемо поставлену задачу замінити еквівалентною задачею мінімаксного оцінування для рівняння (5) за спостереженнями (2). Перейдемо до розв'язання останньої, припускаючи, що $\widetilde{G} \neq \emptyset$.
Введемо вектор $z(k)$, що знаходиться з рівняння:

$$z(k) = A^T(k+1)B^T(k+2)z(k+1) - H^T(k+1)u(k+1),\ z(N-1) = l,\ k = \overline{-1, N-1}.$$

Означимо матрицею $\Psi(k,s)$ за допомогою рекуррентного співвідношення:

$$\Psi(t,s) = A^T(t+1)B^T(t+2)\Psi(t+1,s),\ \Psi(s,s) = E,\ k = \overline{-1, N-1}.$$

Тоді, з урахуванням означення $\Psi(k,s)$, для $z(k)$ справедливе подання:

$$z(k) = \Psi(k, N-1)z(N-1) - \sum_{s=k}^{N-2} \Psi(k,s)H^T(s+1)u(s+1). \tag{10}$$

Введемо вектори $z=(z(-1),z(0),\dots,z(N-1))$, $u=(u(0),\dots,u(N-1))$ та бочні матриці $\widetilde{B}=\mathrm{diag}\{E_{n\times n},B^T(1),\dots,B^T(N)\}$, $T=\begin{pmatrix}0_{m\times n} & 0_{m\times n} & \dots & 0_{m\times n}\\ E_{m\times n} & 0_{m\times n} & \dots & 0_{m\times n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & \dots & E_{m\times n}\end{pmatrix}$.

Покладемо $R(u)=\sup_{G_2}M\langle u,\eta\rangle$, $\underline{R}(z,u)=\inf_{\widetilde{G},N^*}[\alpha]$, $\overline{R}(z,u)=\sup_{\widetilde{G},N^*}[\alpha]$, $R(z,u)=\frac{1}{2}(\overline{R}(z,u)-\underline{R}(z,u))$, $\alpha=\langle B^*z,f\rangle+\langle\mathfrak{P}PT^Tz,d\rangle$, $B^*=\widetilde{B}-\widetilde{D}^T[P\widetilde{C}^T]^+PT^T$. Неважко помітити, що, взагалі кажучи: $\overline{R}(z,u)\leqslant+\infty$, $\underline{R}(z,u)\geqslant-\infty$.

Введемо множину $\mathcal{U}=\{u:\langle\mathfrak{P}PT^Tz,d\rangle=0\}$. Якщо $\mathcal{U}$ — непорожня множина, то $\forall u\in\mathcal{U}$ вирази $\overline{R}(z,u)$, $\underline{R}(z,u)$ скінчені. З'ясуємо умови, за яких $\mathcal{U}\neq\emptyset$. Якщо розбити $\mathfrak{P}$ на квадратні блоки $\mathfrak{P}(i,j)$ порядку $n$, то легко переконатися, що $\mathcal{U}=\{u:\sum_{j=1}^N\mathfrak{P}(i,j)\mathcal{P}(j)z(j-1)=0,\ i=\overline{1,N}\}$. Покладемо $\widetilde{H}(i,s+1)=\sum_{j=1}^{s+1}\mathfrak{P}(i,j)\mathcal{P}(j)\Psi(j-1,s)H^T(s+1)$, $\widetilde{H}(i,0)=0_{n\times l}$.

Введемо матрицю $V(i)=\sum_{j=1}^N\mathfrak{P}(i,j)\mathcal{P}(j)\Psi(j-1,N-1)$. Тоді, враховуючи представлення (10), одержимо:

$$\mathcal{U}=\{u=(u(0)\dots u(N-1)):V(i)l=\sum_{s=0}^{N-2}\widetilde{H}(i,s+1)u(s+1),\ i=\overline{1,N}\}. \tag{11}$$

Зауважимо, що сукупність лінійних алгебраїчних рівнянь, за допомогою яких вище було означено множину $\mathcal{U}$, утворює у відповідальному просторі систему вигляду $Vl=\widetilde{H}u$. Введемо множину $L=\{l:[E-\widetilde{H}\widetilde{H}^+]Vl=0\}$.

Надалі обмежимося розглядом лише тих рівнянь типу (1), для яких $\mathrm{dim}L>0$. Отже, якщо $l\in L$, то $\mathcal{U}$ — непорожня замкнена множина. Покажемо, що справедлива

**Теорема 1.** *Якщо множина* $\mathcal{U}=\arg\inf_{\mathcal{U}}(R^2(z,u)+R^2(u))$ *непорожня,* $\widetilde{G}\neq\emptyset$, *а* $l\in L$, *то мінімаксна оцінка скаляроного добутку* $\langle l,x(N)\rangle$, *де* $x(k)$ *знаходиться з рівняння* (5), *має вигляд:*

$$\widehat{\langle l,x(N)\rangle}=\sum_{k=0}^{N-1}\langle\hat{u}(k),y(k)\rangle+\hat{c},\ \hat{u}\in\mathcal{U},\ \hat{c}=R^*(\hat{z},\hat{u})=\frac{1}{2}(\overline{R}(\hat{z},\hat{u})+\underline{R}(\hat{z},\hat{u})).$$

*При цьому* $\sigma=\sup_{\widetilde{G},G_2}M|\langle l,x(N)\rangle-\widehat{\langle l,x(N)\rangle}|^2=R^2(\hat{z},\hat{u})+R^2(\hat{u})$.

**Доведення.** Помітимо, що $\langle l,x(N)\rangle=\langle z(N-1),x(N)\rangle$, звідки:

$$\langle l,x(N)\rangle-\langle z(-1),x(0)\rangle=\sum_{k=0}^{N-1}(\langle z(k),x(k+1)\rangle-\langle z(k-1),x(k)\rangle)=$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}[\langle z(k),B(k+1)f(k)\rangle+\langle x(k),H^T(k)u(k)\rangle+\langle z(k),\mathcal{P}(k+1)v_{k+1}\rangle].$$

Тому, враховуючи (3), (8), будемо мати:

$$\langle l, x(N)\rangle - \langle \widehat{l, x(N)}\rangle = \langle z(-1), f_0\rangle + \sum_{k=0}^{N-1}(\langle B^T(k+1)z(k), f(k)\rangle - \langle u(k), \eta(k)\rangle)+$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}\langle z(k), \mathcal{P}(k+1)v_{k+1}\rangle - c = \langle B^* z, f\rangle - \langle u, \eta\rangle - c + \langle \mathfrak{P}PT^T z, d\rangle.$$

Відтак $\forall u \in \mathcal{U}$, враховуючи рівність $sup_{|k|\leqslant d}|k-b| = d + |b|$, одержимо:

$$\sup_{\widetilde{G}, G_2, N^*} M|\langle l, x(N)\rangle - \langle \widehat{l, x(N)}\rangle|^2 = \sup_{\widetilde{G}, G_2} M|\langle B^* z, f\rangle - \langle u, \eta\rangle - c|^2 = \sup_{G_2} M\langle u, \eta\rangle^2 +$$

$$+\sup_{\widetilde{G}}[\langle B^* z, f\rangle - c]^2 = (R(z,u) + |c - R^*(z,u)|)^2 + R^2(u) \geqslant \inf_{\mathcal{U}}(R^2(z,u) + R^2(u)).$$

Зрозуміло, що $\inf_{\mathcal{U},\mathbb{R}} \sup_{\widetilde{G}, G_2, N^*} M|\langle l, x(N)\rangle - \langle \widehat{l, x(N)}\rangle|^2 = R^2(\hat{z}, \hat{u}) + R^2(\hat{u})$, якщо $u = \hat{u}$, $c = \hat{c}$, де $\hat{z}(k)$ знаходиться з (10) при $u(k) = \hat{u}(k)$.■

**Наслідок 2.** *Якщо умови наслідку 1 виконано, $l \in L$ і $\widetilde{\mathcal{U}} \neq \emptyset$, то $\hat{c} = 0$.*

**Доведення.** Очевидно, для цього випадку $\forall u \in \mathcal{U} : \overline{R}(z,u) = -\underline{R}(z,u)$. Тепер залишилося застосувати теорему, умови якої, як легко бачити, справджуються. ■

### Задачі мінімаксного оцінювання з квадратичнимим обмеженнями

Побудуємо мінімаксну оцінку виразу $\langle l, x(N)\rangle$, $l \in L$ для того випадку, коли:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{f : \langle Q_0 f_0, f_0\rangle + \sum_{k=0}^{N-1}\langle Q(k)f(k), f(k)\rangle \leqslant 1\},\ Q_0 > 0,\ Q(k) > 0, \\ G_2 &= \{R : \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{tr}\Theta(k)R(k) \leqslant 1\},\ \Theta(k) > 0,\ \operatorname{tr} - \text{слід матриці}. \end{aligned} \tag{12}$$

Оскільки $\overline{R}^2(z,u) + R^2(u)$ — невід'ємна монотонно зростаюча неперервна функція, як це випливає з означення $\overline{R}(z,u)$, $R(u)$ та узагальненої нерівності Коші-Буняковського [3], то, автоматично, $\widetilde{\mathcal{U}} \neq \emptyset$. Отже, для цього випадку виконуються умови наслідку 2. Перщ ніж сформулювати основний результат для задач з квадратичними обмеженнями — теорему про вигляд мінімаксних оцінки та похибки — введемо деякі допоміжні позначення. А саме, покладемо:

$$D = (E - \widetilde{D}^T\widetilde{\mathfrak{P}}[\widetilde{\mathfrak{P}}\widetilde{D}Q^{-1}\widetilde{D}^T\widetilde{\mathfrak{P}}]^+\widetilde{\mathfrak{P}}\widetilde{D}Q^{-1})(\widetilde{B} - \widetilde{D}^T[P\widetilde{C}^T]^+PT^T). \tag{13}$$

Подамо $D$ у вигляді блочної матриці $D = \begin{pmatrix} D(-1,-1) & \dots & D(-1,N-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ D(N-1,-1) & \dots & D(N-1,N-1) \end{pmatrix}$, де блоки $D(-1,j)$ — це квадратні матриці порядку $n$, а решта — $m \times n$-матриці.

Означимо блочні матриці

$$\widetilde{H}^T = \begin{pmatrix} \widetilde{H}^T(1,0) & \dots & \widetilde{H}^T(N,0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{H}^T(1,N-1) & \dots & \widetilde{H}^T(N,N-1) \end{pmatrix},$$

$K = \begin{pmatrix} K(0) \\ \dots \\ K(N-1) \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} V(1) \\ \dots \\ V(N) \end{pmatrix}$, $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0_{n\times l} & \widetilde{H}(1,1) & \dots & \widetilde{H}(1,N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0_{n\times l} & \widetilde{H}(N,1) & \dots & \widetilde{H}(N,N-1) \end{pmatrix}$,
$K(j) = \sum_{k=-1}^{N-1} H(j)\widetilde{D}^T(k,j-1)Q^{-1}(k)\widetilde{D}(k,N-1)$, $\widetilde{D}(k,s) = \sum_{i=-1}^{s} D(k,i)\Psi(i,s)$.
Введемо квадратну матрицю [3] $\widetilde{Q}$ порядку $lN$, що складається з $N\times N$ блоків вигляду: $\widetilde{Q}(j+1,s+1) = \sum_{k=-1}^{N-1}\{H(j+1)\widetilde{D}^T(k,j)Q^{-1}(k)\widetilde{D}(k,s)H^T(s+1)\}$, якщо $j \neq s$ та $\widetilde{Q}(j+1,j+1) = \sum_{k=-1}^{N-1}\{H(j+1)\widetilde{D}^T(k,j)Q^{-1}(k)\widetilde{D}(k,j)H^T(j+1) + \Theta^{-1}(j+1)\}$.
Покладемо $\lambda = (\lambda(1)|\dots|\lambda(N))$, $\Gamma = \widetilde{Q}^{-1}(\widetilde{H}^T[\mathcal{H}\widetilde{Q}^{-1}\widetilde{H}^T]^+(V-\widetilde{Q}^{-1}K)+K.)$ Подамо $\Gamma$ у вигляді блочної матриці $\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma(0) \\ \dots \\ \Gamma(N-1) \end{pmatrix}$, де блок $\Gamma(k)$ — це $l\times n$-матриця.

Введемо матрицю $D(k) = \widetilde{D}(k,N-1) - \sum_{s=-1}^{N-2}\widetilde{D}(k,s)H^T(s+1)\Gamma(s+1)$. Покладемо $\Delta = \sum_{k=-1}^{N-1} D^T(k)Q^{-1}(k)D(k) + \sum_{k=0}^{N-1}\Gamma^T(k)\Theta^{-1}(k)\Gamma(k)$. Має місце

**Теорема 2.** *Якщо $l \in L$, то мінімаксна оцінка скалярного добутку $\langle l, x(N)\rangle$, де $x(k)$ знаходиться з (1), має вигляд:*

$$\widehat{\langle l, x(N)\rangle} = \sum_{k=0}^{N-1}\langle \hat{u}(k), y(k)\rangle = \langle l, \hat{x}\rangle,$$

*де* $\hat{u}(k) = \Gamma(k)l$, $\hat{x}(k) = \Gamma^T(k)y(k)$, $k = \overline{0,N-1}$, $\hat{x} = \sum_{k=0}^{N-1}\hat{x}(k)$. При цьому

$$\sigma = \sup_{\widetilde{G},G_2} M|\langle l, x(N)\rangle - \widehat{\langle l, x(N)\rangle}|^2 = \langle \Delta l, l\rangle.$$

**Доведення.** Згідно наслідку 2 для знаходження мінімаксної оцінки потрібно розв'язати задачу оптимізації $\overline{R}^2(z,u) + R^2(u) = I(u) \to \inf_{\mathcal{U}}$. Обчислимо $R^2(u)$. Для цього введемо блочну матрицю $\Theta = \operatorname{diag}\{\theta(0),\dots,\theta(N-1)\}$. Тоді, згідно узагальненої нерівності Коші: $M\langle u,\eta\rangle^2 \leqslant M\langle\Theta\eta,\eta\rangle\langle\Theta^{-1}u,u\rangle$, звідки, беручи до уваги вигляд множини $G_2$, одержимо: $R^2(u) = \sum_{k=0}^{N-1}\langle\Theta^{-1}(k)u(k),u(k)\rangle$. Обчислимо $\overline{R}(z,u)$. З цією метою, враховуючи вигляд $\widetilde{G}$, введемо функцію Лагранжа $F(\mu,f) = \langle B^*z, f\rangle - \langle\mathfrak{P}\widetilde{D}f,\mu\rangle$. Означимо вектор $\widetilde{z} = B^*z - \widetilde{D}^T\mathfrak{P}\mu$. Введемо блочну матрицю $Q = \operatorname{diag}\{Q_0, Q(0),\dots,Q(N-1)\}$. Тоді $\overline{R}(z,u) = \sup_{G_1}|F(\mu,f)| = \sup_{G_1}|\langle\widetilde{z},f\rangle| = \langle Q^{-1}\tilde{z},\tilde{z}\rangle^{\frac{1}{2}}$, звідки видно, що вектор $\tilde{z}$ є

[3] Нижче буде показано, що $\widetilde{Q}$ має обернену.

нормальним до множини $G_1$ у точці $\hat{f} = \langle Q^{-1}\tilde{z}, \tilde{z}\rangle^{\frac{1}{2}} Q^{-1}\tilde{z}$. Зважаючи на це та взявши до уваги (9), одержимо рівняння для знаходження $\mu$ : $\widetilde{\mathfrak{P}}\widetilde{D}Q^{-1}B^*z = \widetilde{\mathfrak{P}}\widetilde{D}Q^{-1}\widetilde{D}^T\widetilde{\mathfrak{P}}\mu$. Помітимо, що множина розв'язків цього рівняння непорожня, оскільки множник Лагранжа $\mu$ існує, і збігається з $\arg\inf \Upsilon(\mu)$, де $\Upsilon(\mu) = \langle Q^{-1}\tilde{z}, \tilde{z}\rangle$ — квадратична функція від $\mu$. На цій підставі покладемо $\mu = [\widetilde{\mathfrak{P}}\widetilde{D}Q^{-1}\widetilde{D}^T\widetilde{\mathfrak{P}}]^+\widetilde{\mathfrak{P}}\widetilde{D}Q^{-1}(\widetilde{B} - \widetilde{D}^T(P\widetilde{C}^T)^+PT^T)z$. Тоді, з урахуванням (13), $\overline{R}^2(z,u) = \langle Q^{-1}Dz, Dz\rangle$. Отже, $I(u)$ — строго опукла функція, тому $\arg\inf I$ складається рівно з одної точки, звідки $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\hat{u}\}$. Знайдемо $\hat{u}$ у явному вигляді. З цією метою перетворимо $I(u)$. Враховуючи розбиття матриці $D$ на блоки $D(i,j)_{i,j=\overline{-1,N-1}}$, описане вище, введемо вектор $p(k) = \sum_{i=-1}^{N-1} D(k,i)z(i)$, $k = \overline{-1, N-1}$. Якщо формально покласти $Q(-1) = Q_0$, то $I(u) = \sum_{k=-1}^{N-1}\langle Q^{-1}(k)p(k), p(k)\rangle + \sum_{k=0}^{N-1}\langle \Theta^{-1}(k)u(k), u(k)\rangle$.

Обчислимо $\inf_{\mathcal{U}} I(u)$. Для цього, враховуючи вигляд множини $\mathcal{U}$ (11), введемо функцію Лагранжа: $F_\lambda(u) = I(u) - 2\sum_{j=-1}^{N-2}\langle\sum_{s=1}^{N}\widetilde{H}^T(s, j+1)\lambda(s), u(j+1)\rangle$. Знайдемо $\hat{u}$ з умови: $\frac{d}{d\tau}F_\lambda(\hat{u} + \tau v)|_{\tau=0} \equiv 0$. Беручи до уваги (10), подамо $p(k)$ у вигляді: $p(k) = \widetilde{D}(k, N-1)l - \sum_{s=-1}^{N-2}\widetilde{D}(k,s)H^T(s+1)u(s+1)$, $k = \overline{-1, N-1}$. Очевидно $\frac{d}{d\tau}p(k) = -\sum_{s=-1}^{N-2}\widetilde{D}(k,s)H^T(s+1)v(s+1)$. Легко перевірити, що: $\frac{d}{d\tau}F_\lambda(\hat{u} + \tau v)|_{\tau=0} = 2\sum_{j,s=0}^{N-1}\langle v(j), \widetilde{Q}(j,s)\hat{u}(s) - \widetilde{H}^T(s+1, j)\lambda(s+1) - K(j)l\rangle$.

З тотожності $\frac{d}{d\tau}F(\hat{u} + \tau v, \lambda)|_{\tau=0} \equiv 0$, враховуючи вигляд означених вище блочних матриць $\widetilde{Q}$, $\widetilde{H}^T$ та $K$, знаходимо: $\widetilde{Q}\hat{u} = \widetilde{H}^T\lambda + Kl$ $(*)$. Вище було показано, що $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\hat{u}\}$. Тому рівняння $(*)$ має єдиний розв'язок: $\hat{u} = \widetilde{Q}^{-1}(\widetilde{H}^T\lambda + Kl)$.

Знайдемо $\lambda$ з умови: $\hat{u} \in \mathcal{U}$, яка дає нам лінійне алгебраїчне рівняння вигляду: $\mathcal{H}\hat{u} = V\lambda$. Виходячи з того, що $\mathcal{U} = \{\hat{u}\}$, візьмемо у якості $\lambda$ мінімальний по нормі розв'язок попереднього рівняння, який, згідно [6], має вигляд: $\lambda = [\mathcal{H}\widetilde{Q}^{-1}\widetilde{H}^T]^+(V - \widetilde{Q}^{-1}K)$. Тоді, зважаючи на вигляд матриці $\Gamma$, будемо мати: $\hat{u} = \Gamma l$. Оскільки $\hat{u} = (\hat{u}(0)\ldots\hat{u}(N-1))$, то, з урахуванням введеної раніше блочної структури $\Gamma$, одержимо, що $\hat{u}(k) = \Gamma(k)l$, $k = \overline{0, N-1}$.

Якщо означити $\hat{x}(k)$ і $\hat{x}$ так, як це було зроблено у формулюванні теореми, то $\sum_{k=0}^{N-1}\langle\hat{u}(k), y(k)\rangle = \sum_{k=0}^{N-1}\langle l, \hat{x}(k)\rangle = \langle l, \hat{x}\rangle$. Зважаючи на вигляд введених вище матриць $D(k)$ та $\Omega$, одержимо $\sigma = I(\hat{u}) = \langle\Omega l, l\rangle$. ■

**Наслідок 3.** *Якщо $l \in L$, ранг $S(k)$ не залежить від $k$ і збігається з кількістю рядків $S(k)$, то мінімаксна оцінка скалярного добутку $\langle l, x(N)\rangle$, де $x(k)$ знаходиться з (5), має вигляд:*

$$\widehat{\langle l, x(N)\rangle} = \sum_{k=0}^{N-1}\langle\hat{u}(k), y(k)\rangle = \sum_{k=0}^{N-1}\langle l, \hat{x}(k)\rangle = \langle l, \hat{x}\rangle,$$

$$\hat{u}(k) = \Gamma(k)l,\ \hat{x}(k) = \Gamma^T(k)y(k),\ k = \overline{0, N-1},\ \hat{x} = \sum_{k=0}^{N-1}\hat{x}(k).$$

*Вигляд матриці* $\Gamma(k)$ *зберігається з тою лише різницею, що*

$$V(i) = \mathcal{P}(i)\Psi(i-1, N-1), \ \widetilde{H}(i, s+1) = \mathcal{P}(i)\Psi(i-1, s)H^T(s+1),$$

$$K(j+1) = \sum_{-1\leqslant \ k\leqslant j} H(j+1)\widetilde{D}^T(k, j)Q^{-1}(k)\widetilde{D}(k, N-1),$$

$$\widetilde{Q}(j, s) = \begin{cases} \sum_{-1\leqslant \ k\leqslant j} H(j-1)\widetilde{D}^T(k, j-1)Q^{-1}(k)\widetilde{D}(k, j-1)H^T(j) + \Theta^{-1}(j), & j = s, \\ \sum_{-1\leqslant \ k\leqslant min(j-1, s-1)} H(j)\widetilde{D}^T(k, j-1)Q^{-1}(k)\widetilde{D}(k, s-1)H^T(s), & j \neq s; \end{cases}$$

$$\widetilde{D}(k, j) = \begin{cases} 0, & j < k, \\ D(k, k)\Psi(k, j), & j \geqslant k; \end{cases}$$

$$D(k, k) = \begin{cases} E, & k = -1, \\ B(k+1), & k \geqslant 0. \end{cases}$$

**Доведення.** Оскільки $l \in L$, то справедливість твердження наслідку про вигляд оцінки випливає з теореми. Згідно умови $\widetilde{\mathcal{P}}(k) \equiv 0 \Rightarrow \widetilde{D} = 0, \ \widetilde{C} = 0$, звідки $\mathfrak{B} = E$, тобто $\mathfrak{B}(i, i) = E, \ \mathfrak{B}(i, j) = 0, \ i \neq j$. Безпосередньою перевіркою встановлюється, що $V(i), \ K(j+1), \ \widetilde{H}(i, s+1), \ \widetilde{Q}(j, s)$ означені так, як у наслідку. ■

**Наслідок 4.** *Якщо ранг* $S(k)$ *не залежить від* $k$ *і збігається з кількістю стовпчиків* $S(k)$*, то мінімаксна оцінка скалярного добутку* $\langle l, x(N)\rangle$*, де* $x(k)$ *знаходиться з* (5)*, має вигляд:*

$$\widehat{\langle l, x(N)\rangle} = \sum_{k=0}^{N-1}\langle \hat{u}(k), y(k)\rangle = \sum_{k=0}^{N-1}\langle l, \hat{x}(k)\rangle = \langle l, \hat{x}\rangle,$$

$$\hat{u}(k) = \Gamma(k)l, \quad \hat{x}(k) = \Gamma^T(k)y(k), \quad \Gamma = \widetilde{Q}^{-1}K, \quad \hat{x} = \sum_{k=0}^{N-1}\hat{x}(k), \quad k = \overline{0, N-1}.$$

**Доведення.** Згідно умови $\mathfrak{P}(k) \equiv 0 \Rightarrow \mathfrak{B} = E, \ V = 0, \ \widetilde{H}(i, s+1) \equiv 0 \Rightarrow \widetilde{H}^T = 0$. Тому $L = \mathbb{R}^n$ і умови теореми виконано. З іншого боку $\Gamma = \widetilde{Q}^{-1}K$. ■

**Наслідок 5.** *Якщо* $\dim N(S(k)) \equiv \dim N(S^T(k))) \equiv 0$*, то мінімаксна оцінка скалярного добутку* $\langle l, x(N)\rangle$*, де* $x(k)$ *знаходиться з* (5)*, має вигляд:*

$$\widehat{\langle l, x(N)\rangle} = \sum_{k=0}^{N-1}\langle \hat{u}(k), y(k)\rangle = \langle l, \hat{x}\rangle,$$

*де* $\hat{u}(k) = \Gamma(k)l$, $\hat{x}(k) = \Gamma^T(k)y(k)$, $k = \overline{0, N-1}$, $\hat{x} = \sum_{k=0}^{N-1}\hat{x}(k)$.

*При цьому* $V(i) = \widetilde{H}(i, s+1) \equiv 0$*, а* $\widetilde{D}(k, j), \ D(k, k), \ K(j+1), \ \widetilde{Q}(j, s)$ *означені так само, як у наслідку 2.*

## Висновки

У запропонованій роботі, зокрема, одержано у явному вигляді умови (7) на праві частини різницевого рівняння (1), виконання яких гарантує, що множина розв'язків (1) непорожня і збігається з множиною розв'язків рівняння вигляду (5). *Основним результатом роботи є* побудова мінімаксної оцінки лінійної функції від розв'язку рівняння (5) $x(k)$ при $k = N$ за спостереженням вигляду (2) до $N - 1$ моменту включно, зокрема, для випадку роздільних квадратичних обмежень на невідомі детерміновані збурення $f(k)$ рівняння (1) та випадкові шуми $\eta(k)$ у каналі спостереження (2). У вигляді наслідків відповідних теорем розглянуто деякі важливі частинні випадки. *Перспективним* на думку автора є дослідження сингулярних систем лінійних диференційних рівнянь із стаціонарною прямокутною матрицею при похідних з метою знаходження мінімаксних оцінок лінійних функціоналів на станах системи з урахуванням вимирів, зашумлених випадковими чи детермінованими шумами.

## Література


1. Мурина Г.Е. Сингулярные возмущения задач управления с уравнением состояния, не разрешенным относительно производной (Обзор) //Известия, Техническая кибернетика. — 1992. — N 4. — С. 20-49
2. Наконечный О.Г. Оцінювання параметрів в умовах невизначеності. /Наукові записки КНУ ім.Т.Г.Шевченка. — 2004. — Том 7: факультет кібернетики. — С.102-112
3. Бублик Б.Н. Данилов В.Я. Наконечный А.Г. Некоторые задачи управления и наблюдения в линейных системах: Учебное пособие. — М.: УМК ВО, 1988. — 191 с.
4. Жук С.М. Минимаксное оценивание решений линейных алгебраических уравнений с сингулярными матрицами //Проблемы управления и информатики. — 2004. — N 3. — С. 121-130
5. Жук С.М. Апостеріорні мінімаксні оцінки розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь з сингулярними матрицями //Вісник Київського університету. — 2004. — N 3. — С.211-215
6. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1977. — 223с.