УДК 517.98

СХОДИМОСТИ В $*$-АЛГЕБРАХ ЛОКАЛЬНО ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

М.А. Муратов

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *kromsh@crimea.com*

В.И. Чилин

Национальный университет Узбекистана
механико-математический факультет
Вузгородок, г. Такшкент, Республика Узбекистан, 700174,
e-mail: *chilin@ucd.uz*

Abstract

In the paper,the $*$-algebras $LS(M)$ locally measurable operators associated by von Neumann algebra M are considered; the different kinds of convergence is this algebras (a convergence of measure, almost everywhere convergence, and locally convergence of measure, locally almost everywhere convergence) are considered and correlations between by these convergence are study.

Введение

Один из первых подходов к введению «некоммутативного варианта» кольца измеримых функций был предложен И. Сигалом [1], который рассмотрел $*$-*алгебру S(M) измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре Неймана* M. Впоследствии для целей некоммутативного интегрирования, изучались $*$-подалгебры $S(M,\tau)$ в $S(M)$ всех τ-измеримых операторов, ассоцированные с точным нормальным полуконечным следом τ на M (см. например [2], [3], [4]). Алгебры $S(M,\tau)$ и $S(M)$ являются $*$-алгебрами замкнутых, плотно определенных линейных операторов, действующих вв том же гильбертовом пространстве H, что и сама алгебра фон Неймана M. При этом все эти опрераторы присоедитнены к M, а алоперации в этих $*$-алгебрах совпадают с операциями «сильной суммы», «сильного произведения», перехода к сопряженному оператору и обычного умножения на скаляры. Сама алгебра фон Неймана M является $*$-подалгеброй в $S(M,\tau)$ (и в $S(M)$) и совпадает с множеством всех ограниченных операторов из $S(M,\tau)$ и $S(M)$.

Естественно возникает вопрос о наличии двух $*$-алгебр $\mathcal{A}$ замкнутых операторов, действующих в гильбертовом пространстве H и присоединенных к алгебре фон Неймана M, у которых $*$-подалгебра

$$\mathcal{A}_b = \{\mathrm{T} \in \mathcal{A} : \mathrm{T} \in \mathcal{B}(H)\} = M,$$

где $\mathcal{B}(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H.

Важный класс таких алгебр был введен Диксоном в [5], который назвал их EW^*-алгебрами. Помимо указанных $*$-алгебр $S(M,\tau)$ и $S(M)$, EW^*-алгебрами являются $*$-алгебры $LS(M)$ локально измеримых операторов, присоединенных к М ([6], [7]). В работе Закирова Б. С., Чилина В. И.[8] показано, что любая EW^*-алгебра $\mathcal{A}$, у которой $\mathcal{A}_b = M$, является $*$-подалгеброй в $LS(M)$, что объясняет уникальность $*$-алгебры $LS(M)$ для алгебры фон Неймана M в классе EW^*-алгебр.

В настоящей работе рассматриваются $*$-алгебры $LS(M)$, изучаются различные виды сходимости в этих алгебрах (сходимости почти всюду и по мере, локальные сходимости почти всюду и по мере) и исследуются взаимосвязи между этими сходимостями.

Используется терминология и обозначения из теории алгебр фон Неймана ([9], [10]) и теории измеримых операторов ([1], [3], [4], [7]).

1. $*$-алгебра локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана.

Пусть H – гильбертово пространство, $\mathcal{B}(H)$-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H, M - подалгебра фон Неймана в $\mathcal{B}(H)$, $\mathrm{P}(M)$ - полная решетка всех ортопроекторов в M.

Линейное подпространство D в H называется *присоединенным к* M (обозначение $D_\eta M$), если $U(D) \subset D$ для любого унитарного оператора U из коммутанта

$$M' = \{S \in \mathcal{B}(H) : ST = TS \ \forall\ T \in M\}$$

алгебры фон Неймана M. Если D – замкнутое пространство в H и P_D – оператор ортогонального проектирования на D, то $D_\eta M)$ тогда и только тогда, когда $P_D \in P(M)$.

Линейный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H, с областью определения $D(T)$, называется *присоединенным к* M (обозначение: $T_\eta M$), если $U(D(T)) \subset D(T)$ для любого унитарного оператора U из коммутанта M' и $UT\xi = TU\xi$ для всех $\xi \in D(T)$. Очевидно, что если $T \in \mathcal{B}(H)$ и $T_\eta M$, то $T \in M$.

Замкнутый линейный оператор T, с областью определения $D(T) \subset H$, называется *измеримым относительно алгебры фон Неймана* M 1, если $T_\eta M$ и существует такая последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \in P(M)$, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset D(T)$ и $P_n^{\perp} = I - P_n$ – конечный проектор в M для всех $n = 1, 2, \ldots$, где I – единица алгебры фон Неймана M.

Обозначим через $S(M)$ множество всех линейных операторов в H, измеримых относительно алгебры фон Неймана M. Если $T \in S(M)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (где $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел), то $\lambda T \in S(M)$ и сопряженный оператор T^* к T также измерим относительно M 1. Кроме того, если $T, S \in S(M)$, то операторы $T + S$ и TS определены на плотных подпространствах и допускают замыкания, которые называются соответственно сильной суммой и сильным произведением операторов T и S и обозначаются $T\dot{+}\,S$ и $T * S$. В 1 показано, что $T\dot{+}\,S$ и $T * S$ принадлежат $S(M)$ и относительно рассмотренных алгебраических операций $S(M)$ является $*$-алгеброй с единицей I над полем $\mathbb{C}$. При этом M есть $*$-подалгебра в $S(M)$. В дальнейшем сильную сумму и сильное произведение операторов T и S мы будем обозначать, как и обычные, через $T + S$ и TS.

Если T – замкнутый линейный оператор с плотной областью определения в H и $T = U|T|$ полярное разложение оператора T, где $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ – модуль оператора T, а U – соответствующая частичная изометрия, то $T \in S(M)$ тогда и только тогда, когда $U \in M$ и $|T| \in S(M)$ [7]. В следующем предложении приводится удобный критерий измеримости замкнутого оператора T на языке спектрального семейства для $|T|$.

Предложение 1. [7] Пусть T – замкнутый оператор в H. $T_\eta M$, $T = U|T|$ – полярное разложение T, $\{E_\lambda\}$ – спектральное семейство проекторов для $|T|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел. Тогда $U \in M$ и $\{E_\lambda\} \in P(M)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. При этом $T \in S(M)$ тогда и только тогда, когда область определения $D(T)$ оператора T плотна в H и $E_\lambda^\perp$ – конечный проектор для некоторого $\lambda > 0$.

При доказательстве предложения 1 существенно используется следующая лемма, которая понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 1. [7] Пусть T – замкнутый оператор в H с плотной областью опеределения $D(T)$, $T_\eta M$, $\{E_\lambda\}$ – спектральное семейство проекторов для $|T|$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Если $P \in P(M)$, $P(H) \subset D(T)$, $TP \in \mathcal{B}(H)$ и $\|TP\|_{\mathcal{B}(H)} > \lambda$, то $E_\lambda^\perp \lesssim P^\perp$ (напомним, что отношение $E \lesssim Q$ для проекторов $E, Q \in P(M)$, означает, что $E \sim E_1 \leq Q$, а эквивалентность проекторов $E \sim E_1$ равносильна существованию такой частичной изометрии $V \in M$, что $V^*V = E_1$ и $VV^* = E$).

Из предложения 1 непосредственно вытекает, что в случае, когда M-алгебра фон Неймана типа III, или когда M – фактор типа I, всегда имеет место равенство $S(M) = M$. Для алгебр фон Неймана типа II это равенство уже неверно. Доказательство этого факта опирается на следующее предложение.

Предложение 2. Если в алгебре фон Неймана M существует возрастающая последовательность проекторов $\{E_n\}$ такая, что $E = sup_{n\geq 1} E_n$ – конечный проектор, и $E_n \neq E$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, то $S(M) \neq M$.

Доказательство. Доказательство Пусть $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset P(M)$, $E_n \uparrow E$, $E_n \neq E$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Положим $P_n = E^\perp + E_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $P_n \uparrow I$ и $P_n^\perp = E - E_n$ – конечный проектор в M. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H всюду плотное линейное подпространство $D = \cup_{n=1}^\infty P_n(H)$, и определим линейный оператор T на D, полагая $T\xi = n\xi$ для всех $\xi \in (P_n - P_{n-1})(H)$, $n = 1, 2, \ldots$, где $P_0 = 0$.

Покажем, что оператор T допускает замыкание.

Если $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$, $\|\xi_k\|_H \longrightarrow 0$ и $\|T\xi_k - \eta\|_H \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$, где $\eta \in H$, то для каждого фиксированного n имеем, что $\|P_n\xi_k\|_H \longrightarrow 0$ и $\|TP_n\xi_k - P_n\eta\|_H \longrightarrow 0$ при $k \to \infty$.

Полагая $Q_m = P_m - P_{m-1}$, получим, что

$$\left\|\sum_{m=1}^{n} Q_m\xi_k\right\|_H^2 = \sum_{m=1}^{n} \|Q_m\xi_k\|_H^2 = \sum_{m=1}^{n} \|P_m\xi_k - P_{m-1}\xi_k\|_H^2 \longrightarrow 0,$$

при $k \to \infty$ и

$$\|TP_n\xi_k - P_n\eta\|_H^2 = \left\|T\sum_{m=1}^{n} Q_m(\xi_k - \eta)\right\|_H^2 = \left\|\sum_{m=1}^{n} mQ_m(\xi_k - \eta)\right\|_H^2 = \sum_{m=1}^{n} \|mQ_m(\xi_k - \eta)\|_H^2 \longrightarrow 0,$$

при $k \to \infty$.

Отсюда следует, что $Q_m\eta = 0$ для всех $m = 1, 2, \ldots, n$, то есть $P_n\eta = 0$ для любых $n = 1, 2, \ldots$. Так как $P_n \uparrow I$, то это означает, что $\eta = 0$, и потому оператор T допускает замыкание $\overline{T}$, которое, в силу определения T, является положительно опеределенным оператором, присоединенным к M.

Обозначим через $\{E_\lambda\}$ спектральное свойство проекторов для оператора $\overline{T} = |\overline{T}|$. Поскольку $\|\overline{T}P_n\|_{\mathcal{B}(H)} = \|TP_n\|_{\mathcal{B}(H)} \leq n < n+1$, то в силу леммы 1, $E_{n+1}^{\perp} \lesssim P_n^{\perp}$, и поэтому $E_{n+1}^{\perp}$ – конечный проектор. Отсюда, согласно предложения 1 получим, что $\overline{T} \in S(M)$. Так как $E_n \neq E$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$, то найдутся такие номера $n_1 < n_2 < \ldots$, что $P_{n_{k+1}} - P_n \neq 0$, в частности, $\|\overline{T}\xi_k\| \geq n_k$ для некоторых $\xi_k \in (P_{n_{k+1}} - P_n)(H)$ с $\|\xi_k\| = 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Это означает, что $\overline{T}$ не принадлежит M,и потому $S(M) \neq M$.

Следствие 1. *Если M алгебра фон Неймана типа II, то $S(M) \neq M$.*

Доказательство. Возьмем произвольный ненулевой конечный вектор $E \in P(M)$. Так как M имеет тип II, в $P(M)$ нет нет атомов. В частности, найдется такая последовательность ненулевых проекторов $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, что $Q_n \leq E$ и $Q_nQ_m = 0$, при $n \neq m$, где $n, m = 1, 2, \ldots$, и $E = \sup\limits_{n\geq 1} Q_n$. Положим $E_n = \sup\limits_{1\leq m\leq n} Q_m = \sum\limits_{m=1}^{n} Q_m$. Тогда $E_n \in P(M)$, $E_n \uparrow E$ и $E_n \neq E$ при каждом $n = 1, 2, \ldots$. В силу предложения 2 получим, что $S(M) \neq M$.

В следующем предложении даются необходимые и достаточные условия для совпадение $*$-алгебр $S(M)$ и M.

Предложение 3. Следующие предложения эквивалентны:

(i) $S(M) = M$,

(ii) M представимма в виде прямой суммы $M = \sum\limits_{n=0}^{m} M_n$, где M_0 – алгебра фон Неймана типа III, а M_n - факторы типа I, $n = 1, 2, \ldots, m$ и m – некоторое натуральное число (некоторые из слагаемых могут отсутствовать).

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть $S(M) = M$. Используя предложение 2 и представление алгебры фон Неймана M в виде прямой суммы алгебр фон Неймана типов I, II, III, получим, что $M = M_0 \oplus N$, где M_0 – алгебра фон Неймана типа III, а N – алгебра фон Неймана типа I. Существует такой центральный проектор $Z \in P(Z(N))$, где $Z(N) = N \cap N'$ – центр алгебры фон Неймана N, что ZN – атомическая алгебра фон Неймана, а в решетке $P((I_N - Z)N)$ нет атомов, где I_N – единица алгебры N.

Допустим, что $Z \neq I_N$. Так как $(I_N - Z)N)$ имеет тип I, то в $P((I_N - Z)N)$ существует ненулевой конечный проектор. Повторяя доказательство следствия 1, получим, что в этом случае $S(M) \neq M$, что не так. Следовательно, $Z = I_N$, то есть N – атомическая единица алгебры фон Неймана типа I.

Пусть $\{Q_i\}_{i \in J}$ – множество всех атомов в $P(Z(N))$, $M_i = Q_i N$, $i \in J$, J – некоторое множество индексов. Тогда из равенства $Z(M_i) = Q_i Z(N) = Q_i C$, получим, что M_i – факторы типа I.

Предположим, что J – бесконечное множество. Выберем ненулевые конечные проекторы $E_i \in M_i$ и положим $E = \sup\limits_{i \in J} E_i$. Поскольку $E_i = E_i Q_i$, $Q_i Q_j = 0$ при $i \neq j$, $Q_i \in Z(M)$, то E – конечный проектор. Поэтому, в силу предложения 2, получим, что $S(M) \neq M$, что не так. Следовательно, J – конечное множество, то есть M представима в виде прямой суммы $M = \sum\limits_{n=0}^{m} M_n$, где M_0 – алгебра фон Неймана типа III, а M_n - факторы типа I, $n = 1, 2, \ldots, m$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть M есть прямая сумма $\sum\limits_{n=0}^{m} M_n$, где M_0 – алгебра фон Неймана типа III, а M_n - факторы типа I, $n = 1, 2, \ldots, m$. Если $T \in S(M)$, то найдется такая последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subseteq D(T)$, и $P_n^{\perp}$ – конечные проекторы $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку $P_n \downarrow 0$, и в каждом факторе M_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ может быть только конечная последовательность конечных проекторов, убывающая к нулю, то $P_n^{\perp} = 0$, начиная с некоторого номера. Это значит, что $D(T) = H$ и $T \in M$, то есть $S(M) = M$.

Замкнутый, линейный оператор T, дейсвующий в гильбертовом пространстве H, называется *локально измеримым относительно алгебры фон Неймана M,* если $T \eta M$ и существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из M, что $Z_n \uparrow I$ и $TZ_n \in S(M)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$[7].

Обозначим через $LS(M)$ множество всех линейных операторов, локально измеримых относительно M. В [7] доказано, что $LS(M)$ является $*$-алгеброй с единицей I над полем $\mathbb{C}$ относительно операций сильного сложения и умножения и перехода к сопряженному оператору (умножение на скаляры определяется обычным образом, причем считается, что $0 * T = 0$). При этом $S(M)$ является $*$-подалгеброй в $LS(M)$. В случае, когда M – конечная алгебра фон Неймана или фактор, алгебры $S(M)$ и $LS(M)$ совпадают. В общем случае это не так. В следующем утверждении дается достаточное условие для несовпадения этих алгебр.

Предложение 4. Если в алгебре фон Неймана M существует возрастающая к единице последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов, для которой $I - Z_n$ не конечный проектор, $n = 1, 2, \ldots$, то $LS(M) \neq S(M)$.

Доказательство. Рассмотрим в H всюду плотное подпространство $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n(H)$ и определим линейный оператор T на D, полагая $T\xi = n\xi$ для всех $\xi \in (Z_n - Z_{n-1})(H)$, $n = 1, 2, \ldots$, $Z_0 = 0$. Повторяя доказательство предложения 2, получим, что оператор T допускает замыкание $\overline{T}$, которое в силу определния T является положительно определенным оператором, присоединенным к M. В частности, $\overline{T} = |\overline{T}|$. Кроме того, $\overline{T}Z_n = \sum\limits_{m=1}^{n} m(Z_m - Z_{m-1}) \in M \subset S(M)$ и поэтому $\overline{T} \in LS(M)$. С другой стороны, спектральный проектор для $\overline{T}$, отвечающий $\lambda = n$, совпадает с Z_n. Следовательно, в силу предложения 1, оператор $\overline{T}$ не принадлежит $S(M)$ и потому $LS(M) \neq S(M)$.

Из предложения 4 непосредственно вытекает.

Следствие 2. *Если алгебра фон Неймана M есть прямое произведение бесконечного числа не конечных алгебр фон Неймана, то $LS(M) \neq S(M)$.*

В следующем предложении приводится критерий для совпадения $*$-алгебр $LS(M)$ и $S(M)$.

Предложение 5. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) $LS(M) = S(M)$,

(ii) M представима в виде прямой суммы $M = \sum\limits_{n=0}^{m} M_n$, где M_0 – конечная алгебра фон Неймана, а M_n - факторы типа $I_{\propto}$, II_{∞}, III, $n = 1, 2, \ldots, m$, и m – некоторое натуральное число (некоторые из слагаемых могут отсутствовать).

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Выберем центральный проектор $Z_0 \in P(Z(M))$ так, чтобы $M = Z_0M + (I - Z_0)M$, где $Z_0 = M_0$ – конечная алгебра фон Неймана, а в $(I - Z_0)M = N$ нет ненулевых конечных центральных проекторов. Если булева алгебра $P(Z(N))$ содержит бесконечное число элементов, то найдется такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых проекторов из $P(Z(N))$, что $Z_nZ_m = 0$ при $n \neq m$ и $\sup\limits_{n \geq 1} Z_n = I - Z_0$. Положим $P_n = \sum\limits_{m=0}^{n} Z_m$. Тогда $P_n \in P(Z(N))$, $P_n \uparrow I$, $(I - P_n)$ – ненулевой центральный проектор из N, то есть $(I - P_n)$ – не конечный проектор в M,

$n = 1, 2, \ldots$. В силу предложения 4, получим, что $LS(M) \neq S(M)$, что противоречит предположению (i).

Следовательно, булева алгебра $P(Z(N))$ содержит только конечное число элементов. Пусть $\{Q_n\}_{n=1}^{m}$ – множество всех атомов в $P(Z(N))$, $M_n = Q_n N = Q_n M$. Тогда M_n не конечный фактор, то есть имеет один из типов $I_\propto$, II_∞ или III, $n = 1, 2, \ldots, m$, при этом $M = \sum\limits_{m=0}^{n} M_n$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть M есть прямая сумма $\sum\limits_{n=0}^{m} M_n$, где M_0 – конечная алгебра фон Неймана, а M_n - факторы одного из типов $I_\propto$, II_∞, III, $n = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим через Q_n единицу в M_n, $n = 1, 2, \ldots, m$.

Предположим, что $T \in LS(M)$ и $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$ такая последовательность, что $Z_k \uparrow I$ и $TZ_k \in S(M)$, л $= 1, 2, \ldots$. Так как M_n – факторы, $n = 1, 2, \ldots, m$, то найдется такой номер k_0, что $Q_n Z_k = Q_n$ при всех $k \geq k_0$, $n = 1, 2, \ldots, m$. В частности, $T(I - Q_0) = \sum\limits_{n=1}^{m} TQ_n = \sum\limits_{n=1}^{m} TZ_{k_0} Q_n \in S(M)$. Так как Q_0 – конечный центральный проектор, то, очевидно, $TQ_0 \in S(M)$ (поскольку $LS(Q_0 M) = S(Q_0 M)$). Следовательно, $T = TQ_0 + T(I - Q_0) \in S(M)$. Это означает, что $LS(M) = S(M)$.

Отметим ещё одно важное свойство $*$- алгебр $LS(M)$.

Предложение 6. [11] Пусть алгебра фон Неймана M есть $\mathcal{C}^*$-произведение $*$-алгебр фон Неймана M, $i \in I$, где I-некоторое множество индексов, т.е. $M = \{\{T_i\}_{i \in I},\ T_i \in M_i,\ i \in I,\ \sup\limits_{i \in I} \|T_i\|_{M_i} < \infty\}$ с покоординатными алгебраическими операциями и инволюцией и $\mathcal{C}^*$-нормой $\|\{T_i\}_{i \in I}\|_M = \sup\limits_{i \in I} \|T_i\|_{M_i}$. Тогда $*$-алгебра $LS(M)$ $*$-изоморфна $*$-алгебре $\prod\limits_{i \in I} LS(M_i)$ (алгебраические операции и инволюция в $\prod\limits_{i \in I} LS(M_i)$ – покоординатные).

Заметим, что для алгебр $S(M)$ аналог предложения 6 не верен. Действительно, пусть M_n – факторы типа III, $n = 1, 2, \ldots$ и M их $\mathcal{C}^*$-произведение. Тгда $S(M) = M$ и $LS(M_n) = S(M_n) = M_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Кроме того, согласно следствия 3, $LS(M) \neq S(M) = M$. Поэтому, в силу предложения 6,

$$\prod_{n=1}^{\infty} S(M_n) = \prod_{n=1}^{\infty} LS(M_n) = LS(M) \neq S(M).$$

В следующем утверждении даются необходимые и достаточные условия совпадения $*$-алгебр $LS(M)$ и M.

Предложение 7. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) $LS(M) = M$.

(ii) M представима в виде прямой суммы $M = \sum\limits_{n=1}^{m} M_n$, где M_n - факторы типа I или III, $n = 1, 2, \ldots, m$, и m – некоторое натуральное число (некоторые из слагаемых могут отсутствовать).

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Предположим, что булева алгебра $P(Z(M))$ всех проекторов из центра $Z(M)$ алгебры фон Неймана M содержит бесконечное число элементов. Тогда существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$, что $Z_n Z_m = 0$ при $n \neq m$ и $\sup\limits_{n\geq 1} Z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n = I$.

Положим $M_n = Z_n M$. Известно, что $\mathcal{C}^*$-произведение алгебр фон Неймана M_n совпадает с M и потому, согласно предложению 6, имеем, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} LS(M_n) = LS(M) = M.$$

Однако, элемент $T = \{nZ_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит $*$-алгебре $\prod\limits_{n=1}^{\infty} LS(M_n)$, но не принадлежит M.

Следовательно, булева алгебра $P(Z(M))$ содержит только конечное число элементов.

Пусть $\{Q_n\}_{n=1}^{m}$ множество всех атомов в $P(Z(M))$ и $M_n = Q_n M$, $n = 1, 2, \ldots, m$. Так как Q_n – атом в $P(Z(M))$, то из равенства $ZM_n = Q_n Z(M) = Q_n \mathbb{C}$ следует, что M_n – фактор, $n = 1, 2, \ldots, m$, при этом M есть прямая сумма $\sum\limits_{n=1}^{m} M_n$.

Если для некоторого n фактор M_n имеет тип II, то $LS(M_n) = S(M_n) = M_n$[7]. Поэтому, в силу предложения 6, получаем, что

$$LS(M) = \prod_{n=1}^{m} LS(M_n) \neq \prod_{n=1}^{m} M_n = M.$$

Следовательно, M_n факторы типа I, либо типа III для всех $n = 1, 2, \ldots, m$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть M есть прямая сумма $\sum\limits_{n=1}^{m} M_n$, где M_n - факторы либо типа I, либо типа III, $n = 1, 2, \ldots, m$.

Тогда $LS(M_n) = S(M_n) = M_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots, m$ и потому

$$LS(M) = \prod_{n=1}^{m} LS(M_n) = \prod_{n=1}^{m} M_n = M.$$

2. Топологии сходимости локально по мере и двусторонне локально по мере.

Пусть M произвольная коммутативная алгебра фон Неймана. Тогда, как известно, (см. например [12], часть 1, глава 7,) существует такое измеримое пространство (Ω, Σ, μ) с локально конечной полной мерой μ, что M $*$-изоморфна $*$-алгебре $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. В этом случае алгебра $LS(M) = S(M)$ $*$-изоморфна $*$-алгебре $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех измеримых, комплекснозначных функций, заданных на (Ω, Σ, μ) (равные почти всюду функции отождествляются) [1]. Наряду с хорошо известной сходимостью по мере в (Ω, Σ, μ) рассматривается также сходимость локально по мере, которая определяется следующим образом: последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\Omega, \Sigma, \mu)$ *сходится локально по мере* к $f \in S(\Omega, \Sigma, \mu)$ при $n \to \infty$, если $f_n \mathcal{X}_A \longrightarrow f \mathcal{X}_A$ по мере для любого множества $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \infty$, где $\mathcal{X}_A$ – характеристическая функция множества A.

Аналогичную сходимость можно определить в алгебре $LS(M)$ и в случае произвольной алгебры фон Неймана M.

Обозначим через φ $*$-изоморфизм центра $Z(M)$ алгебры фон Неймана M на $*$- алгебру $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, а через $S_\infty^+(\Omega, \Sigma, \mu)$ – множество всех измеримых функций $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ (равные почти всюду функции отождествляются). В [1] показано, что существует такое отображение

$$d : P(M) \longrightarrow S_\infty^+(\Omega, \Sigma, \mu),$$

что

(i) $d(P) = 0$ в том и только в том случае, когда $P = 0$;

(ii) $d(P)$ конечна почти всюду тогда и только тогда, когда проектор P конечен;

(iii) $d(P + Q) = d(P) + d(Q)$, если $PQ = 0$;

$(i\text{v})$ $d(U^*U) = d(UU^*)$ для любой частичной изометрии $U \in M$;

(v) $d(ZP) = \varphi(Z)d(P)$ для всех $Z \in P(Z(M))$ и $P \in P(M)$;

$(\text{v}i)$ Если P_α, $P \in P(M)$ и $P_\alpha \uparrow P$, то $d(P) = \sup_\alpha d(P_\alpha)$.

Отображение $d : P(M) \longrightarrow S_\infty^+(\Omega, \Sigma, \mu)$, и удовлетворяющее свойствам (i)-$(\text{v}i)$, называется размерностной функцией на $P(M)$.

Для каждого $\varepsilon > 0$ и $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \infty$ положим

$$V(A, \varepsilon) = \{T \in LS(M) : \text{существует такой} P \in P(M), \text{что} TP \in M, \|TP\|_M < \varepsilon$$
$$\text{и } \mu(A \cap \{\omega \in \Omega : d(P^\perp)(\omega) > \varepsilon\}) < \varepsilon\}.$$

Теорема 1. [7]

(i) Система множеств

$$\{\{T + V(A, \varepsilon)\} : T \in LS(M), \varepsilon > 0, A \in \Sigma, \mu(A) < \infty\} \tag{1}$$

определяет в $LS(M)$ хаусдорфову векторную топологию t, в которой множества 1 образуют базу окрестностей оператора $T \in LS(M)$.

(ii) $(LS(M), t)$ является полным равномерным пространством относительно равномерности, порожденной топологией t.

(iii) Операция инволюции непрерывна, а операция умножения непрерывна по совокупности переменных в $(LS(M), t)$ (то есть $(LS(M), t)$ – топологическая $*$-алгебра).

(iv) Топология t метризуема тогда и только тогда, когда булева алгебра $P(Z(M))$ имеет счетный тип, то есть любое семейство ненулевых попарно ортогональных проекторов из $P(Z(M))$ не более чем счетно.

(v) Если $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}, T \subset LS(M)$, то сеть T_α сходится к T в топологии t (обозначение $T_\alpha \xrightarrow{t} T$) в том и только в том случае, когда $E_\lambda^\perp(|T_\alpha - T|) \xrightarrow{t} 0$ для любого $\lambda > 0$, где $\{E_\lambda^\perp(|T_\alpha - T|)\}$ – спектральное семейство проекторов для $|T_\alpha - T|$. В частности, $T_\alpha \xrightarrow{t} T \Longleftrightarrow |T_\alpha - T| \xrightarrow{t} 0$.

(vi) Если $\{P_n\}_{n=1}^\infty \subset P(M)$, то $P_n \xrightarrow{t} 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}_A d(P_n) \longrightarrow 0$ по мере μ для каждого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \infty$.

В [7] установлено, что топология t не изменится, если μ заменить на эквивалентную меру, а размерностную функцию d – на другую размерностную функцию.

Сходимость в топологии t называется *сходимостью локально по мере.*

Из определения топологии следует, что сходимость сети $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ к T локально по мере означает, что для любых $\varepsilon > 0$ и $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$ существует такой $\alpha_0 = \alpha(\varepsilon, A)$, что для каждого $\alpha \geq \alpha_0$ найдется такой проектор $P(\alpha) \in P(M)$, что

$$\|(T_\alpha - T)P(\alpha)\|_M < \varepsilon \tag{2}$$

и

$$\mu(A \cap \{\omega \in \Omega : d(I - P(\alpha))(\omega) > \varepsilon\}) < \varepsilon. \tag{3}$$

Если неравенство 2 заменить на неравенство

$$\|P(\alpha)(T_\alpha - T)P(\alpha)\|_M < \varepsilon, \tag{4}$$

то в этом случае говорят, что сеть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *сходится к T двусторонне локально по мере.*

Нетрудно видеть, что двусторонняя сходимость по мере равносильна сходимости в векторной топологии в $LS(M)$, базу окрестностей нуля которой образуют множества $W(A, \varepsilon) = \{T \in LS(M)$: существует такой$P \in P(M)$, что $PTP \in M, \|PTP\|_M < \varepsilon$ и $\mu(A \cap \{\omega \in \Omega : d(P^\perp)(\omega) > \varepsilon\}) < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$.

На самом деле эта векторная топология совпадает с топологией t, что непосредственно вытекает из следующего утверждения.

Предложение 8.

$$V(A, \varepsilon) \subset W(A, \varepsilon) \subset V(A, 2\varepsilon)$$

для любых $\varepsilon > 0$, $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$.

Доказательство. Включение $V(A,\varepsilon) \subset W(A,\varepsilon)$ очевидно. Докажем второе включение.

Пусть $T \in W(A,\varepsilon)$ и $E \in P(M)$ такой проектор, что $ETE \in M$, $\|ETE\|_M < \varepsilon$ и $\mu(A \cap \{\omega \in \Omega : d(E^\perp)(\omega) > \varepsilon\}) < \varepsilon$.

Положим $Q = I - r(E^\perp T)$, где $r(E^\perp T)$ – правый носитель оператора $E^\perp T$. Тогда

$$TQ = (E + E^\perp)TQ = ETQ,$$

$$Q^\perp = r(E^\perp T) \sim l(E^\perp T) \leq E^\perp,$$

где $l(E^\perp T)$ – левый носитель оператора $E^\perp T$.

Из свойства (iii), $(i$v$)$ размерностной функции d вытекает, что

$$d(Q^\perp) = d(l(E^\perp T)) \leq d(E^\perp).$$

Положим $P = E \wedge Q$. Тогда

$$\|TP\|_M = \|TQP\|_M = \|ETQP\|_M = \|ETEP\|_M \leq \|ETE\|_M < \varepsilon$$

и $d(P^\perp) = d(E^\perp \vee Q^\perp) \leq d(E^\perp) + d(Q^\perp \leq 2d(E^\perp))$. Отсюда

$$\{\omega \in \Omega : d(P^\perp)(\omega) > 2\varepsilon\} \subseteq \{\omega \in \Omega : d(E^\perp)(\omega) > \varepsilon\}$$

и поэтому $\mu(A \cap \{\omega \in \Omega : d(P^\perp)(\omega) > 2\varepsilon\}) < \varepsilon < 2\varepsilon$, то есть $T \in V(A, 2\varepsilon)$.

Если на алгебре фон Неймана M имеется точный нормальный полуконечный след τ, то на $*$-алгебре $LS(M)$ можно рассматривать сходимость по мере, порожденную следом τ (см. например [2], [3]). Эта сходимость совпадает с со сходимостью в векторной топологии t_τ в $LS(M)$, базу окрестностей нуля которой образуют множества

$$V(\varepsilon,\delta) = \{T \in LS(M) |\ \exists P \in P(M) : TP \in M, \|TP\|_M < \varepsilon, \tau(P^\perp) < \delta\},$$

где $\varepsilon, \delta > 0$.

Предложение 9. Пусть τ точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана M. Тогда

(i) Если $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset P(M)$ и $\tau(E_n) \longrightarrow 0$, то $E_n \xrightarrow{t} 0$. Обратно, если $E_n \xrightarrow{t} 0$ и $\tau(I) < \infty$, то $\tau(E_n) \longrightarrow 0$;

(ii) Если $\{T_n\}_{n=1}^\infty$, $T \subset LS(M)$ и $T_n \xrightarrow{t_\tau} T$, то $T_n \xrightarrow{t} T$;

(iii) Если $\tau(I) < \infty$, то топология t и t_τ совпадают.

Доказательство. (i). Пусть $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset P(M)$ и $\tau(E_n) \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Для каждого фиксированного $k = 1, 2, \ldots$ выберем номер n_k так, чтобы $\tau(E_{n_k}) < 2^{-(k+1)}$, $n_k > n_{k-1}$.

Положим $Q_m = \sup\limits_{n\geq 1}(E_{n_k})$. Тогда $Q_{m-1} \leq Q_m$ и

$$\tau(Q_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty}\tau(E_{n_k}) < \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \ldots = \frac{1}{2^m}.$$

Следовательно, $Q_m \downarrow 0$ при $m \to \infty$ и, в силу свойств (ii), (vi) размерностной функции d, получим, что $d(Q_m)$ – конечная почти всюду функция для любого $m = 1, 2, \ldots$, и $d(Q_m) \downarrow 0$. Поэтому $\chi_A d(Q_m) \to 0$ по мере μ в $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ для любого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \infty$. Так как $0 \leq d(E_{n_m}) \leq d(Q_m)$, то $\chi_A d(E_{n_m})$ также сходится к нулю по мере μ при $m \to \infty$ для тех же A, что и выше.

Предположим, что последовательность $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится к нулю локально по мере. Тогда существует такое множество $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \infty$, что $\chi_A d(E_n)$ не сходится к нулю по мере μ (см. теорему 1 (vi)), то есть существует такое $\varepsilon > 0$, что $\mu(\{\omega \in A : d(E_n) > \varepsilon\}) \nrightarrow 0$. Следовательно, найдутся такие $\delta > 0$ и последовательность $\{E_{n_s}\}_{s=1}^{\infty}$, что

$$\mu(\{\omega \in A : d(E_{n_s}) > \varepsilon\}) > \delta \tag{5}$$

для всех $s = 1, 2, \ldots$.

Согласно доказанному выше, существует возрастающая подпоследовательность номеров n_{sl}, такая, что $\chi_A d(E_{n_{sl}}) \longrightarrow 0$ по мере μ при $l \to \infty$, что противоречит 5. Следовательно, $E_n \xrightarrow{t} 0$.

Обратно, предположим, что $E_n \xrightarrow{t} 0$ и $\tau(I) < \infty$. Так как $\tau(I) < \infty$, то можно рассматривать такую меру μ, что $\mu(\Omega) < \infty$.

В силу теоремы 1 (vi) имеем, что $E_n \longrightarrow 0$ по мере μ. Кроме того, поскольку $\tau(I) < \infty$, то M – конечная алгебра фон Неймана,и потому $d(E) \in S(\Omega, \Sigma, \mu)$ для всех $E \in P(M)$. Выберем в $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ базис $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнутых окрестностей нуля в топологии сходимости по мере μ, так чтобы $U_{n+1} + U_{n+2} \subseteq U_n$. Так как $d(E_n) \longrightarrow 0$ по мере μ, то для каждого $k = 1, 2, \ldots$ найдется такой номер $n_k > n_{k-1}$, что $d(E_{n_k}) \in U_k$.

Положим, $P_m = \sup\limits_{k\geq m}(E_{n_k})$. Тогда $E_{n_m} \leq P_m \leq P_{m-1}$ и

$$d(P_m) = \sup_{l\geq m} d(\sup_{m\leq k\leq l} E_{n_k}) \leq \sup_{l\geq m}\sum_{k=m}^{l} d(E_{n_k}).$$

Последовательность $\{A_l(m)\}_{l\geq m} = \{\sum\limits_{k=m}^{l} d(E_{n_k})\}_{l\geq m}$ возрастает в $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ и при $l > s \geq m$ имеем, что

$$A_l(m) - A_s(m) = \sum_{k=s+1}^{l} d(E_{n_k}) \subset U_{s+1} + U_{s+2} + \ldots + U_l \subseteq U_s,$$

то есть последовательность $\{A_l(m)\}_{l\geq m}$ фундаментальна в топологии сходимости по мере μ. Так как $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ полно в равномерности, порожденной этой топологией, то существует такое $B_m \in S(\Omega,\Sigma,\mu)$, что $A_l(m)\uparrow B_m$ при $l\to\infty$ для каждого фиксированного $m=1,2,\ldots$. Поскольку U_m – замкнуто в топологии сходимости по мере μ, и так как $A_l(m)\in U_m$, то $B_m\in U_m$.

Следовательно, $B_m \longrightarrow 0$ в топологии сходимости по мере μ, так как $B_m \geq B_{m+1}$, то $B_m \downarrow 0$ при $m\to\infty$.

Из неравенства $d(P_m)\leq \sup\limits_{l\geq m} A_l(m) = B_m$ вытекает, что

$$d(\inf_{m\geq l} P_m) \leq \inf_{m\geq l} B_m = 0,$$

и поэтому, в силу свойств (i), $(\mathrm{v}i)$ размерностной функции d, получим, что $P_m \downarrow 0$.

Это означает, что $0\leq \tau(E_{n_m})\leq \tau(P_m)\longrightarrow 0$ при $m\to\infty$.

Таким образом, для любой последовательности $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset P(M)$, сходящейся в топологии t, существует такая подпоследовательность $\{E_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$, что $\tau(E_{n_m})\longrightarrow 0$ при $m\to\infty$. Отсюда следует, что если $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset P(M)$ и $E_n \xrightarrow{t} 0$, то $\tau(E_n)\longrightarrow 0$ при $n\to\infty$.

Пункт (i) доказан.

(ii). В [3] показано, что $T_n \xrightarrow{t_\tau} T$ в том и только в том случае, когда $\tau(E_\lambda^{\perp}(|T_n - T|))\longrightarrow 0$ при $n\to\infty$ для любых $\lambda>0$, где $\{E_\lambda^{\perp}(|T_n-T|)\}$ – спектральное семейство проекторов для операторов $|T_n-T|$.

Поэтому, если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}, T\subseteq LS(M)$ и $T_n\xrightarrow{t_\tau} T$, то в силу пункта (i), получим, что $E_\lambda^{\perp}(|T_n-T|)\xrightarrow{t} 0$ при $n\to\infty$ для любого $\lambda>0$. Отсюда, согласно теореме 1 (v), следует, что $T_n\xrightarrow{t} T$.

(iii) Предположим, что $\tau(I)<\infty$. В силу пункта (ii) и теоремы $1(i\mathrm{v})$, для доказательства равенства топологий t и t_τ достаточно показать, что из сходимости $T_n\xrightarrow{t} 0$, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq LS(M)$, следует, что $T_n\xrightarrow{t_\tau} 0$.

Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq LS(M)$ и $T_n\xrightarrow{t} 0$. Тогда в силу теоремы 1(v), $E_\lambda^{\perp}(|T_n|)\xrightarrow{t} 0$ при $n\to\infty$ для любого $\lambda>0$. Следовательно, в силу пункта (i), получим, что $\tau(E_\lambda^{\perp}(|T_n|))\longrightarrow 0$ при $n\to\infty$ для любых $\lambda>0$, и потому, согласно [3], $T_n\xrightarrow{t_\tau} 0$ при $n\to\infty$.

Замечание 1. Если след τ – не конечен, то из сходимости $T_n\xrightarrow{t} T$, вообще говоря, не слеудует сходимость $T_n\xrightarrow{t_\tau} T$ даже для коммутативных алгебр фон Неймана.

Пример 1. Рассмотрим алгебру фон Неймана

$$M=l_\infty=\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}: c_n\in\mathbb{C}, n=1,2,\ldots,\ \sup_{n\geq 1}|c_n|<\infty\}.$$

Положим $\tau(\{c_n\})=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ и $\tau_1(\{c_n\})=\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2_{-n}c_n$, где $\{c_n\}\in l_\infty$, $c_n\geq 0$.

Тогда τ есть точный нормальный полуконечный, но не конечный след на M, а τ_1 – точный нормальный конечный след на M.

Рассмотрим последовательность проекторов $E_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, 1, 1, \ldots)$ из l_∞, убывающую к нулю. Тогда $\tau_1(E_n) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n} \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$ и, в силу предложения 9 (i), $E_n \xrightarrow{t} 0$.

Однако, $\tau(\{E_n > \frac{1}{2}\}) = +\infty$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и поэтому $E_n \overset{t_\tau}{\nrightarrow} 0$.

Замечание 2. Пусть M – фактор. Тогда $Z(M) = \mathbb{C} = L_\infty(\{\omega\}, \Sigma, \mu)$, где $\Sigma = \{\emptyset, \{\omega\}\}$, $\mu(\{\omega\}) = 1$. В этом случае размерностная функция d есть точный нормальный полуконечный (конечный) след M, если M имеет тип I_∞, II_∞, (соответственно, I_n, II_1), и $d(E) = +\infty$ для всех ненулевых $E \in P(M)$, если M имеет тип III.

Поэтому при $\varepsilon \in (0, 1)$, $A = \{\omega\}$ имеем, что

$$V(A, \varepsilon) = \{T \in LS(M) : \text{существует такой} P \in P(M), \text{что} TP \in M, \|TP\|_M < \varepsilon \text{ и } d(P^\perp) < \varepsilon\}.$$

Другими словами, если M имеет тип III, то

$$V(A, \varepsilon) = \{T \in M : \|T\|_M < \varepsilon\},$$

то есть сходимость локально по мере совпадает с равномерной сходимостью, а если M имеет тип I или II, то сходимость локально по мере совпадает со сходимостью по мере, порожденной следом d.

Замечание 3. Если $M = \mathcal{B}(H)$-фактор типа I, то сходимость локально по мере совпадает с равномерной сходимостью.

Действительно, пусть $\tau = tr$ – канонический след на $\mathcal{B}(H)$, T_n, $T \in \mathcal{B}(H)$ и $T_n \xrightarrow{t} T$ (заметим, что согласно предложения 7, $LS(M) = S(M) = M = \mathcal{B}(H)$).

В силу теоремы 1 (v), (vi) имеем, что $tr(E_\lambda^\perp(|T_n - T|)) = 0$, начиная с некоторого номера $n(\lambda)$. Это означает, что $\|T_n - T\|_M = \||T_n - T|\|_M \le \lambda$ при $n \ge n(\lambda)$, то есть $\|T_n - T\|_M \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$.

Замечание 4. Если $T_n, T \in S(Z(M))$, то $T_n \xrightarrow{t} T$ тогда и только тогда, когда $T_n \longrightarrow T$ по мере μ для каждого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \infty$ (мы отождествляем $S(Z(M))$ с $*$-алгеброй $S(\Omega, \Sigma, \mu)$).

Действительно, если $\{E_\lambda(|T_n - T|)\}$ – спектральное семейство проекторов для оператора $|T_n - T|$, то согласно теореме 1 (v), $T_n \xrightarrow{t} T$ тогда и только тогда, когда $E_\lambda^\perp(|T_n - T|) \xrightarrow{t} 0$ для любого $\lambda > 0$. Поскольку $T_n, T \in S(Z(M))$, то $E_\lambda(|T_n - T|) \in S(Z(M))$ для всех $\lambda > 0$. В силу теоремы 1 (vi), $E_\lambda^\perp(|T_n - T|) \xrightarrow{t} 0$ тогда и только тогда, когда $\chi_A E_\lambda^\perp(|T_n - T|) d(I) = \chi_A d(E_\lambda^\perp(|T_n - T|)) \longrightarrow 0$ по мере μ

для каждого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \infty$ (мы отождествляем $Z(M)$ с $*$-алгеброй $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ (см. определение размерностной функции d)).

Следовательно, $T_n \xrightarrow{t} T$ тогда и только тогда, когда $E_\lambda^\perp(|T_n - T|)$ сходится к нулю по мере μ для каждого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \infty$ при всех $\lambda > 0$. Последнее условие, очевидно, равносильно сходимости $T_n \longrightarrow T$ по мере μ для каждого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \infty$.

3. Сходимость локально почти всюду в $*$-алгебре $LS(M)$.

Пусть M произвольная алгебра фон Неймана, $P_f(M)$ – подрешетка в $P(M)$ всех конечных проекторов в M.

Следуя [1], будем говорить, что последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset LS(M)$ *сходится почти всюду* к $T \in LS(M)$ (обозначение: $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset P(M)$, что $E_n \uparrow I$, $E_n^\perp \in P_f(M)$, $(T_n - T)E_n \in M$ и $\|(T_n - T)E_n\|_M < \varepsilon$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

В случае, когда M – коммутативная алгебра фон Неймана (в этом случае, как уже отмечалось, $*$-алгебра M $*$-изоморфна $*$-алгебре $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ для соответствующего изоморфного пространства с локально конечной полной мерой μ, а $*$-алгебра $LS(M)$ $*$-изоморфна $*$-алгебре $S(\Omega, \Sigma, \mu)$), введенная сходимость почти всюду совпадает со сходимостью почти всюду относительно меры μ обычном смысле теории меры.

Ясно, что если $T_n, T \in M$ и $\|(T_n - T)\|_M \longrightarrow 0$, то $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$. В следующем утверждении приводится достаточное условие для того, чтобы было верно обратное.

Предложение 10. Пусть алгебра фон Неймана M представима в виде прямой суммы $M = \sum\limits_{i=0}^{m} M_i$, M_0 – алгебра фон Неймана типа III, где M_i - факторы типа I, $i = 1, 2, \ldots, m$, и m – некоторое натуральное число (некоторые из сомножителей могут отсутствовать). Если $T_n, T \in LS(M)$ и $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$, то $(T_n - T) \in M$, начиная с некоторого номера , и $\|(T_n - T)\|_M \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Доказательство. Любой конечный проектор E из $P(M)$ имеет вид $E = \sum\limits_{j=1}^{k} P_j$, где P_j – атомы в $P(M)$ (то есть редуцированные алгебры фон Неймана $P_j M P_j$ одномерны), $j = 1, 2, \ldots, k$. Поэтому, если $Q_n \in P_j(M)$ и $Q_n \downarrow 0$, то $Q_n = 0$, начиная снекоторого номера n_0. Отсюда и из определения сходимости почти всюду выткает, что $(T_n - T) \in M$ при $n \geq n_0$ и $\|(T_n - T)\|_M \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Рассмотрим произвольную алгебру алгебру фон Неймана M типа III, центр которой $Z(M)$ не имеет атомов. Тогда $*$-алгебра $LS(Z(M)) = S(Z(M))$ $*$-изоморфна $*$-алгебре $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ для соответствующего измеримого пространства с локально конечной полной непрерывной мерой μ. Если $T_n, T \in LS(Z(M)) \subset LS(M)$, $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$ в

$LS(M)$, то, согласно предложения 10, $(T_n - T) \in Z(M)$ начиная с некоторго номера и $\|(T_n - T)\|_{Z(M)} = \|(T_n - T)\|_M \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Так как мера μ – непрерывна, то существуют такие $T_n,\ T \in S(Z(M))$, что $T_n \longrightarrow T$ почти всюду относительно меры μ, но $(T_n - T)$ не принадлежат M для всех $n = 1, 2, \ldots$. Это означает, что из сходимости T_n почти всюду к T в $LS(Z(M))$ не следует, вообще говоря, сходимость почти всюду в $LS(M)$.

В связи с этим естественно изменить понятие сходимости почти всюду в $LS(M)$ так, чтобы эта сходимость индуцировала сходимость почти всюду в $LS(Z(M))$.

Определение 1. [7] Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $LS(M)$ называется сходящейся *локально почти всюду* к $T \in LS(M)$ (обозначение: $T_n \xrightarrow{\text{л.п.в.}} T$), если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие последовательности $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$, что $E_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$, $Z_n E_n^{\perp} \in P_f(M)$, $(T_n - T)E_{n \in M}$ и $\|(T_n - T)E_n\|_M < \varepsilon$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Ясно, что из сходимости $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$ следует сходимость $T_n \xrightarrow{\text{л.п.в.}} T$ (достаточно взять $Z_n = I$, $n = 1, 2, \ldots$). Кроме того, очевидно, что в случае, когда M - фактор или конечная алгебра фон Неймана, сходимости почти всюду и локально почти всюду совпадают. В следующей теореме устанавливается связь между сходимостями почти всюду и локально почти всюду для произвольной алгебры фон Неймана M.

Теорема 2. Пусть M произвольная алгебра фон Неймана, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, T из $LS(M)$. Следующие условия эквивалентны.

(i) $T_n \xrightarrow{\text{л.п.в.}} T$;

(ii) Существует такая последовательность попарно ортогональных центральных проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\sum\limits_{m=1}^{\infty} P_m = I$ и $T_n P_m \xrightarrow{\text{п.в.}} TP_m$ при $n \longrightarrow \infty$ для каждого фиксированного $m = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. $(i) \to (ii)$. Пусть $T_n \xrightarrow{\text{л.п.в.}} T$, $\varepsilon > 0$ и проекторы $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$ таковы, что $E_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$, $Z_n E_n^{\perp} \in P_f(M)$, $(T_n - T)E_n \in M$ и $\|(T_n - T)E_n\|_M < \varepsilon$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть $P_1 = Z_1$, $P_m = P_m - P_{m-1}$ для $m \geq 2$.

Ясно, что $\{P_m\}_{m=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} P_m = \sup\limits_{m \geq 1} Z_m = I$.

Зафиксируем m и положим $Q_{nm} = E_n P_m + P_m^{\perp}$ при $n \geq m$ и $Q_{nm} = 0$ при $n \leq m$. Тогда $Q_{nm} \uparrow I$ при $n \to \infty$ и

$$Q_{nm}^{\perp} = I - (E_n P_m + P_m^{\perp}) = P_m - E_n P_m = E_n^{\perp} P_m = (E_n^{\perp} Z_n) P_m \in P_f(M)$$

при $n \geq m$. Кроме того,

$$(T_n P_m - TP_m) Q_{nm} = (T_n - T) P_m Q_{nm} = (T_n - T) E_n P_m \in M$$

и $\|(T_nP_m - TP_m)Q_{nm}\| < \varepsilon$. Это означает, что $T_nP_m \xrightarrow{\text{п.в.}} TP_m$ при $n \to \infty$ для каждого фиксированного $m = 1, 2, \ldots$.

(ii) $\to$ *(i)*. Пусть $\{P_m\}_{m=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$, $P_mP_n = 0$ при $m \neq n$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} P_m = I$ и $T_nP_m \xrightarrow{\text{п.в.}} TP_m$ при $n \to \infty$ для каждого фиксированного $m = 1, 2, \ldots$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность $\{E_{nm}\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, что $E_{nm} \uparrow I$ при $n \to \infty$, $E_{nm}^{\perp} \in P_f(M)$, $(T_n - T)P_mE_{nm} \in M$ и $\|(T_n - T)P_mE_{nm}\|_M < \varepsilon$ для всех $n, m = 1, 2, \ldots$.

Положим $Z_n = \sum\limits_{m=1}^{n} P_m$ и $Q_n = \sum\limits_{m=1}^{n} E_{nm}P_m$.

Тогда $\{Z_n\}_n^{\infty} \subset P(Z(M))$ и $\{Q_n\}_n^{\infty} \subset P(M)$, $Z_n \uparrow I$, $Q_n \uparrow I$, $Q_n^{\perp}Z_n = \sum\limits_{m=1}^{n} E_{nm}^{\perp}P_m \in P_f(M)$, $(T_n - T)Q_n = \sum\limits_{m=1}^{n} E_{nm}^{\perp}P_m \in M$ и поскольку центральные носители операторов $(T_n - T)E_{nm}P_m$ попарно ортогональны при фиксированном n, то

$$\|(T_n - T)Q_n\|_M = \max \|(T_n - T)E_{nm}P_m\|_M < \varepsilon.$$

Следовательно, $T_n \xrightarrow{\text{л.п.в.}} T$.

Выделим класс алгебр фон Неймана, для которых сходимость почти всюду и локально почти всюду совпадают.

Теорема 3. Следующие условия эквивалентны:

(i) Всякая сходящаяся локально почти всюду последовательность из $LS(M)$ является сходящейся почти всюду в $LS(M)$.

(ii) Алгебра фон Неймана M представима в виде прямой суммы $M = \sum\limits_{i=0}^{m} M_i$, где M_0 – конечная алгебра фон Неймана, M_i - факторы типа I_{∞}, II_{∞} либо III, $i = 1, 2, \ldots, m$, и m – некоторое натуральное число (некоторые из сомножителей могут отсутствовать).

Доказательство. *(i)$\Rightarrow$ (ii)*. Предположим, что M – не конечная алгебра фон Неймана и выберем такой центральный проектор $Q \in Z(M)$, что $M_0 = Q_{\perp}M$ – конечная алгебра фон Неймана, а QM – собственно бесконечная алгебра фон Неймана (может случиться, что $Q = I$). Покажем, что центр $Z(QM) = QZ(M)$ есть конечномерная алгебра фон Неймана.

Если это не так, то существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(QZ(M))$, что $Z_n \uparrow Q$ и $Z_n \neq Q$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Тогда, очевидно, $Z_n \xrightarrow{\text{л.п.в.}} Q$ в $LS(M)$ и, в силу предложения *(i)*, имеем, что $Z_n \xrightarrow{\text{п.в.}} Q$в $LS(M)$. Поэтому существует такая последовательность $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(QZ(M)) \subset P(M)$, что $E_n \uparrow I$, $E_n^{\perp} \in P_f(M)$, $(Z_n - Q)E_n \in M$ и $\|(Z_n - Q)E_n\|_M < \varepsilon = \frac{1}{2}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Поскольку $Q - Z_n = Z_n^{\perp}Q$, то $(Q - Z_n)E_n = Z_n^{\perp}QE_n$ есть проектор, для которого $\|Z_n^{\perp}QE_n\| < \frac{1}{2}$. Следовательно, $\|Z_n^{\perp}QE_n\| = 0$, и поэтому $Z_n^{\perp}Q \leq E_n$. Это означает, что $Q - Z_n = Z_n^{\perp}Q$ есть ненулевой конечный проектор из QM, что противоречит собственной бесконечности алгебры фон Неймана QM.

Следовательно, алгебра $QZ(M)$ конечномерна, то есть существуют атомы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ в $P(QZ(M))$, для которых $\sum\limits_{i=0}^{m} Q_i = I$ и $M_i = Q_iM$ не конечные факторы (то есть факторы типа I_∞, II_∞ либо III). Таким образом, M есть прямая сумма $\sum\limits_{i=0}^{m} M_i$, где $M_0 = Q^{\perp}M$ – конечная алгебра фон Неймана, а $M_i = Q_iM$ факторы указанных выше типов.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*. Предположим, что алгебра фон Неймана M представима в виде прямой суммы $M = \sum\limits_{i=0}^{m} M_i$, где M_0, M_i, $i = 1, 2, \ldots$ те же, что и в условии п.*(ii)*. Согласно предложению 6, имеем:

$$LS(M) = LS(M_0) \bigoplus \sum_{i=1}^{m} LS(M_i).$$

Обозначим через Q_i единицу алгебры фон Неймана M_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть $T_n, T \in LS(M)$ и $T_n \xrightarrow{\text{л.п.в.}} T$ в $LS(M)$ при $n \to \infty$. Тогда $T_nQ_i \xrightarrow{\text{л.п.в.}} TQ_i$ в $LS(M)_i$ при $n \to \infty$ и любом фиксированном $i = 1, 2, \ldots, m$.

Поскольку M_0 – конечная алгебра фон Неймана, а M_i – факторы, то $T_nQ_i \xrightarrow{\text{п.в.}} TQ_i$ в $LS(M)_i$ при $n \to \infty$. Так как $Q_i \in P(Z(M))$, то $T_nQ_i \xrightarrow{\text{п.в.}} TQ_i$ в $LS(M)$ при $n \to \infty$. Согласно теореме 2, получим, $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$ в $LS(M)$.

Замечание 5. Пусть алгебра фон Неймана M представима в виде $\mathcal{C}^*$-произведения $M = \prod\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, где M_i – факторы типа I_∞, II_∞ или III, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда, в силу теоремы 3, сходимости локально почти всюду и почти всюду не совпадают в $LS(M)$, в частности, существуют алгебры фон Неймана счетного типа, для которых эти сходимости не совпадают (напомним, что алгебра фон Неймана M имеет счетный тип, если любое семейство ненулевых попарно ортогональных проекторов из $P(M)$ не более чем счетно).

Замечание 6. Замечание Пусть M фактор типа I или III (в этом случае $LS(M) = M$), $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}, T$ из M и $T_n \xrightarrow{\text{л.п.в.}} T$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, что $E_n \uparrow I$, $E_n^{\perp} \in P_f(M)$ (то есть $E_n^{\perp} = 0$ начиная с некоторого номера n_0), $(T_n - T)E_n \in M$ и $\|(T_n - T)E_n\|_M < \varepsilon$ (т.е. $\|T_n - T\| < \varepsilon$ при $n \geq n_0$). Это означает, что сходимость локально почти всюду совпадает с равномерной сходимостью. В силу замечаний 2 и 3 получим, что в случае, когда M фактор типа I или III, сходимости локально почти всюду и локально по мере совпадают.

Предложение 11. Пусть $T_n, T \in S(Z(M))$. Следующие условия эквивалентны:

(i). $T_n \xrightarrow{\text{л.п.в.}} T$ в $LS(M)$.

(ii). $T_n \longrightarrow T$ почти всюду в $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ ($*$-алгебра $S(Z(M))$ отождествляется с $*$-алгеброй $S(\Omega,\Sigma,\mu)$, а центр $Z(M)$ – с $*$-алгеброй $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$).

Доказательство. *(i)$\Rightarrow$ (ii).* Без ограничения общности можно считать, что $T = 0$. Поскольку $T_n \stackrel{\text{л.п.в.}}{\longrightarrow} 0$ в $LS(M)$, то, согласно теореме 2, найдется такая последовательность $\{P_m\}_{m=1}^\infty \subset P(M)$, что $E_n \uparrow I$, $E_n^\perp \in P_f(M)$ и $\|T_nP_mE_n\|_M < \varepsilon$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Обозначим через $\{E_\lambda(|T_nP_m|)\}$ – спектральное семейство проекторов для оператора $|T_nP_m|$. Согласно лемме 1, имеем, что $\{E_\varepsilon^\perp(|T_nP_m|) \precsim E_n^\perp$. Поскольку $\{E_\lambda(|T_nP_m|)\}$ – центральный проектор, то $\{E_\varepsilon^\perp(|T_nP_m|) \leqslant E_n^\perp$ и потому $E_n \leqslant \{E_\varepsilon(|T_nP_m|)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Так как $E_n \uparrow I$, то $\sup\limits_{n\geqslant 1}\{\inf\limits_{k\geqslant n} E_\varepsilon(|T_kP_m|)\} = I$ для каждого $\varepsilon > 0$, то есть

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{k=n}^{\infty}\{\omega \in \Omega : |T_k(\omega)P_m(\omega)| < \varepsilon\}) = \Omega$$

μ-почти всюду. Этот означает, что $T_nP_m \to 0$ почти всюду в $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ при $n \to \infty$ для каждого фиксированного $m = 1, 2, \ldots$. Поскольку $\sum\limits_{m=1}^{\infty} P_m = I$, то $T_n \to 0$ почти всюду в $S(\Omega,\Sigma,\mu)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $T_n \to 0$ почти всюду в $S(\Omega,\Sigma,\mu)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ выполняется следующее равенство:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{k=n}^{\infty}\{\omega \in \Omega : |T_k(\omega)| < \varepsilon\}) = \Omega$$

μ-почти всюду.

Обозначим через Z_n центральный проектор из $Z(M)$, соответствующий множеству $(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}\{\omega \in \Omega : |T_k(\omega)| < \varepsilon\}) \in \Sigma$. Ясно, что $Z_n \uparrow I$, и для $E_n = Z_n$ имеем, что $Z_nE_n^\perp = 0 \in P_f(M)$, $\|T_nE_n\|_M = \|T_nZ_n\|_{Z(M)} < \varepsilon$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Это означает, что $T_n \stackrel{\text{л.п.в.}}{\longrightarrow} 0$ в $LS(M)$.

В следующей теореме приводится критерий для совпадения сходимостей локально почти всюду и локально по мере в $LS(M)$.

Теорема 4. Следующие условия эквивалентны:

(i). Если $\{T_n\}_{n=1}^\infty, T$ из $LS(M)$, то $T_n \stackrel{\text{л.п.в.}}{\longrightarrow} T$ тогда и только тогда, когда $T_n \stackrel{\text{t}}{\longrightarrow} T$.

(ii). Алгебра фон Неймана M представима в виде $\mathcal{C}^*$-произведения $M = \prod\limits_{i\in J} M_i$, где M_i – факторы типа I либо типа III, $i \in J$, где J – некоторое множество индексов.

Доказательство. *(i)$\Rightarrow$ (ii).* Отождествим центр $Z(M)$ алгебры фон Неймана M с $*$-алгеброй $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$, а $*$-алгебру $LS(M)$ с $*$-алгеброй $S(\Omega,\Sigma,\mu)$. Если пространство с мерой (Ω, Σ, μ) не атомично, тосуществует такое множество $A \in \Sigma$ с $0 \neq \mu(A) < \infty$, что булева алгебра $Q(A)Z(M)$ не имеет атомов, где $Q(A)$ – центральный проектор из $Z(M)$, соответствующий множеству A. В этом случае, как показано в [13], существует такая последовательность $\{G_n\} \subset P(Q(A)Z(M))$, что $\mu(G_n) \to 0$, но $\{G_n\}$ не сходится к нулю μ-почти всюду. Из замечания 4 следует, что $G_n \xrightarrow{\mathrm{t}} 0$. Поэтому, в силу предположения *(i)*, имеем, что $G_n \xrightarrow{\text{л.п.в}} 0$. Но тогда, согласно предложения 11, $G_n \to 0$ почти всюду в $S(\Omega, \Sigma, \mu)$, что не так. Следовательно, булева алгебра $P(Z(M))$ центральных проекторов из M является атомической.

Пусть $\{Q_i\}_{i \in J}$ – множество всех атомов в $P(Z(M))$, и $M_i = Q_i M$, $i \in J$. Тогда M_i есть фактор для каждого $i \in J$ и алгебра фон Неймана M $*$-изоморфна $\mathcal{C}^*$-произведению $\prod\limits_{i \in J} M_i$ (этот $*$-изоморфизм задается отображением $\psi : M \to \prod\limits_{i \in J} M_i$, где $\psi(T) - \{Q_i T\}_{i \in J}$, $T \in M$).

Пусть τ_i – точный нормальный след на M_i (если M_i имеет тип III, то $\tau_i(0) = 0$ и $\tau_i(T) = +\infty$) для всякого положительного оператора $T \in M_i$.

Отображение $d : M \to S^+_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, задаваемое формулой $d(E) = \{\tau_i(EQ_i)\}_{i \in J}$ есть размерностная функция на M (так как булева алгебра $P(Z(M))$ атомична, то Ω можно отождествить с J, а Σ – с σ-алгеброй всех подмножеств в J, при этом $\mu(i) < \infty$ для всех $i \in J$).

Предположим, что существует такое $i_0 \in J$, что M_{i_0} имеет тип II_1 или II_∞. Тогда M_i содержит такую коммутативную подалгебру фон Неймана B, что (B, τ_{i_0}) $*$-изоморфна $L_\infty([0,1], m)$, где m-линейная мера Лебега на отрезке $[0,1]$. Используя доказательство теоремы 8 из [13], получим, что существует такая последовательность $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset P(M_{i_0})$, что $\tau_{i_0}(E_n) \to 0$, но $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ не сходится к нулю почти всюду в $S(M_{i_0})$. Из теоремы 1 *(vi)* вытекает, что $E_n \xrightarrow{\mathrm{t}} 0$, где $E_n = \{T_i^{(n)}\}_{i \in J} \in P(M)$, $T_i^{(n)} = 0$ при $i \neq i_0$ и $T_{i_0}^{(n)} = E_n$. Следовательно, в силу предположения *(i)*, $E_n \xrightarrow{\text{л.п.в.}} 0$ и потому $Q_i E_n \xrightarrow{\text{л.п.в.}} 0$, откуда следует, что $E_n \xrightarrow{\text{л.п.в.}} 0$ в $LS(M_{i_0}) = S(M_{i_0})$. Так как M_{i_0} – фактор, то $E_n \to 0$ почти всюду в $S(M_{i_0})$, что не так. Из полученного противоречия следует, что каждый фактор M_i имеет тип I или III, $i \in J$.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*. Пусть алгебра фон Неймана M представима в виде $\mathcal{C}^*$-произведения $M = \prod\limits_{i \in J} M_i$, где M_i – факторы типа I, либо типа III. Для доказательства импликации *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* достаточно показать, что если $\{T_i^{(n)}\}_{i \in J} = T_n \in LS(M) = \prod\limits_{i \in J} LS(M_i)$ и $T_n \xrightarrow{\mathrm{t}} 0$, то $T_n \xrightarrow{\text{л.п.в.}} 0$.

Положим $Q_j = \{E_i\}_{i \in J} \in P(Z(M))$, где $E_i = 0$ при $i \neq j$ и $E_j = I_{M_j}$-единица в алгебре M_j. Предположим, что $T_n \xrightarrow{\mathrm{t}} 0$. Тогда, в силу теоремы 1 *(iii)*, $Q_j T_n \xrightarrow{\mathrm{t}} 0$ для каждого $j \in J$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$Z_1 = \sup\{Q_i : \|T_i^{(k)}\|_{M_i} < \varepsilon \text{ для всех } k \geqslant 1\},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Z_n = \sup\{Q_i : \|T_i^{(k)}\|_{M_i} < \varepsilon \text{ для всех } k \geqslant n\},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ясно, что $Z_n \in P(Z(M))$ и $Z_n \leq Z_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$.

Пусть $Z_0 = \sup\limits_{n \geqslant 1} Z_n$. Если $Z_0 \neq I$, то найдется такой $i_0 \in J$, что $Z_0 Q_{i_0} = 0$.

С другой стороны, из сходимости $\|T_i^{(k)}\|_{M_i} \to 0$ при $k \to \infty$ получим, что $Q_{i_0} \leqslant Z_{n(\varepsilon)} \leqslant Z_0$ для некоторого номера $n(\varepsilon)$, что противоречит равенству $Z_0 Q_{i_0} = 0$. Следовательно, $Z_n \uparrow I$. Положим, что $E_n = Z_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда $E_n \uparrow I$, $Z_n E_n^{\perp} = 0 \in P_f(M)$, $\|T_n E_n\|_M = \|T_n Z_n\|_M = \underset{i:Q_i \leqslant Z_i}{\|} T_i^{(n)}\|_{M_i} \leqslant \varepsilon$.

Это означает, что $T_n \overset{\text{л.п.в.}}{\longrightarrow} 0$.

Заключение

Основными результатами данной статьи являются теоремы 3 и 4, в которых получены необходимые и достаточные условия эквивалентности сходимостей почти всюду и локально почти всюду, а также сходимостей локально почти всюду и локально по мере последовательностей локально измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана M.

В дальнейшем, представляется интересным изучение двусторонних сходимостей почти всюду и локально почти всюду и порядковых сходимостей последовательностей локально измеримых операторов.

Список литературы

1. *Segal I.E.* A non-commutative extension of abstract integration. Ann.Math. - 1953. - № 57. - P. 401-457.
2. *Nelson E.* Notes on non commutative integration. J.Funct.Anal. - 1974. - № 15. - P. 103-116.
3. *Yeadon F. J.* Non-commutative L^p-spaces.// Math.Proc.Camb.Phil.Soc. - 1975. - №77. - P. 91-102.
4. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of r-measurable operators // Pasific J. Math. - 1986. - V.123. - P. 269-300.
5. *Dixon P.G.* Unbounded operator algebras // Proc.London.Math.Soc., - 1971. - V.23, No 3. - P.53-59.
6. *Sankaran S.* The $*$-algebras of unbounded operators // J.London.Math.Soc., No 34, 337-344 (1959)
7. *Yeadon F.J.* Convergence of measurable operators// Proc.Camb.Phil.Soc. - 1973. - №74. - P.257-268.
8. *Закиров Б.С., Чилин В.И.* Ахарактеризация EW^*-алгебр // Функц.анал и его прилож. - 1991. - Т.25, Вып.1. - С.76-78.
9. *Stratila S., Zsido L.* Lectures on von Neumann algebras. - England Abacus Press, 1975. - 478p.
10. *Takesaki M.* theory of operator algebras I. - New York: Springer, 1979. - 415p.
11. *Saito K.* On the algebra of measurable operators for a general AW^*-algebra, II // Tohoku. Math.J. - 1971. - V.23. - P.525-534.

12. *Diximier J.* Les algebras d'operateurs dans l'espace Hilbertin (algebres de von Neumann). - Paris:2ed.ed.Gauthier-Villars, 1969. - 367p.
13. *M. A. Muratov* Order properties of convergent sequences of unbounded measurable operators affiliated a finite von Neumann algebra // Methods Funct. Anal.Topology - 2002. - 8, №3. - P.50-60.