

ОБ АБСТРАКТНОЙ ФОРМУЛЕ ГРИНА ДЛЯ ТРОЙКИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ К ЗАДАЧЕ СТОКСА

Н.Д. Копачевский

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА

In this paper, Abstract Green's formula for a triple of Hilbert spaces and for an abstract trace operator is proved. This formula generalized the one resulted in [1] and some modernized in [2]. Applications of this new formula to the hydrodynamic Stokes equations are considered.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω — произвольная область в \mathbb{R}^n с гладкой границей $\partial\Omega$. Для функций $u = u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ и $\eta = \eta(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, хорошо известна формула

$$\int_{\Omega} (\eta(u - \Delta u)) d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla \eta \cdot \nabla u + \eta u) d\Omega - \int_{\Omega} \eta \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad (0.1)$$

которую называют первой формулой Грина для оператора Лапласа $\Delta := \sum_{k=1}^n \partial^2 / \partial x_k^2$.

Эта формула допускает обобщения, связанные с ослаблением требований на $\Gamma := \partial\Omega$ и функции $\eta(x)$ и $u(x)$. В частности, если Γ липшицева, то, как следует из [2], а также из данной работы, справедливо тождество

$$\langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H_1(\Omega)} - \langle \gamma \eta, \partial u / \partial n \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad (0.2)$$

где $\eta, u \in H^1(\Omega)$, $\Delta u \in (H^1(\Omega))^*$, $\gamma \eta := \eta|_{\Gamma}$, а символами $l_{\omega}(\eta) = \langle \eta, \omega \rangle_{L_2(\Omega)}$ и $l_{\psi}(\eta) = \langle \varphi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}$ обозначены линейные функционалы в «скалярном произведении» $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ соответственно для элементов $\eta \in H^1(\Omega)$, $\omega \in (H^1(\Omega))^*$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma)$.

В данной работе получена абстрактная формула Грина, обобщающая формулу (0.2) на случай произвольных гильбертовых пространств E , F и G и так называемого абстрактного оператора следа γ . При этом условия, которые накладываются на эти пространства и оператор, менее обременительные, чем соответствующие требования [1, 2]. В частности, снимается требование плотности вложения ядра оператора γ в пространство E . Это позволяет как усилить результаты из [2], так и применить её для получения обобщённой формулы Грина для задачи Стокса.

Отметим, что известная формула Грина для задачи Стокса (см. (1.45), (1.54)) не является частным случаем абстрактной формулы Грина из [2], но, как выясняется в данной работе, является частным случаем полученной здесь формулы (2.21). Подробно об этом говорится в последнем параграфе работы.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом параграфе приводятся необходимые сведения, используемые далее, они изложены например, в [1, 3, 4], см. также [2], §1.

1.1. Гильбертовы пары, оснащения и шкалы гильбертовых пространств. Будем говорить, что гильбертово пространство F плотно вложено в гильбертово пространство E , и обозначать $F \subset\rightarrow E$, если F является плотным линейным подмножеством в E и существует такое $a > 0$, что

$$\|u\|_E \leq a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \quad (1.1)$$

Говорят, что пространства F и E с указанными свойствами образуют гильбертову пару $(F; E)$.

Если $u \in F$, $v \in E$, то

$$(u, v)_E = (u, Vv)_F, \quad (1.2)$$

где $V : E \rightarrow F$ — ограниченный оператор, для которого

$$a^{-1}\|Vv\|_E \leq \|Vv\|_F \leq a\|v\|_E, \quad \forall v \in E.$$

Так как $F \subset\rightarrow E$, то V , рассматриваемый как оператор из E в E , положителен, а если F компактно вложено в E (т.е. всякое множество, ограниченное в F , компактно в E), то $V : E \rightarrow E$ — компактен. Для обратного оператора $A := V^{-1}$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(V)$ и областью значений $\mathcal{R}(A) = E$ из (1.2) следует, что

$$(u, Av)_E = (u, v)_F, \quad \forall u \in F, \forall v \in \mathcal{D}(A) \subset F, \quad (1.3)$$

при этом

$$F = \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad (u, v)_F = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_E, \quad \forall u, v \in F. \quad (1.4)$$

Оператор A называется порождающим оператором гильбертовой пары $(F; E)$; по паре (F, E) он определяется единственным образом.

Иногда пространство F состоит из элементов другой природы, чем E , но существует взаимно-однозначное отображение F в плотное в E множество, сохраняющее алгебраические операции. Тогда F можно отождествить с его образом, и если для образа снова выполнено направление (1.1), то вся конструкция построения гильбертовой пары проходит и в этом случае.

Пусть снова $F \subset\rightarrow E$. При фиксированном $v \in E$ функционал $l_v(u) := (u, v)_E$, определённый на элементах $u \in F$, является в силу (1.1) линейным ограниченным функционалом на F . Поэтому элемент $v \in E$ можно отождествить с функционалом из F^* . После такого отождествления E будет плотным множеством в пространстве

F^* . Отсюда следует, что скалярное произведение $(u, v)_E$ при $u \in F$ можно расширить на тот случай, когда второй множитель принадлежит F^* . Если $v_n \in E$ и $v_n \rightarrow v$ в F^* , то возникает линейный ограниченный функционал

$$l_v(u) := \langle u, v \rangle_E := \lim_{n \rightarrow \infty} (u, v_n)_E, \quad \forall u \in F, \quad \forall v \in F^*; \quad (1.5)$$

при этом справедливо неравенство Коши-Буняковского

$$|\langle u, v \rangle_E| \leq \|u\|_F \cdot \|v\|_{F^*}. \quad (1.6)$$

При выполнении (1.5), (1.6) говорят, что функционал $l_v \in F^*$ определён через «скалярное произведение в E », о тройку пространств

$$F \subset \rightarrow E \subset \rightarrow F^* \quad (1.7)$$

называют оснащением пространства E .

Если $(F; E)$ — гильбертова пара пространств, а A — соответствующий порождающий оператор, то по оператору A можно построить шкалу гильбертовых пространств E^α , $\alpha \in \mathbb{R}$ таким образом, что при $\alpha > 0$ пространство $E^\alpha = \mathcal{D}(A^\alpha)$ и

$$(u, v)_{E^\alpha} := (A^\alpha u, A^\alpha v)_E, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A^\alpha). \quad (1.8)$$

При этом оказывается, что

$$F = \mathcal{D}(A^{1/2}) = E^{1/2}. \quad (1.9)$$

Для отрицательных индексов $\alpha = -\nu$, $\nu > 0$, на пространстве E вводится норма

$$\|u\|_{E^\alpha} := \|A^\alpha u\|_E, \quad \forall u \in E, \quad (1.10)$$

а затем E пополняется по этой норме.

Шкала E^α , $\alpha \in \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами. При $\alpha < \beta$ пространство E^β плотно вложено в пространство E^α . При $\alpha > 1$ сужение оператора A на E^α взаимнооднозначно и непрерывно отображает E^α на $E^{\alpha-1}$. При $\alpha \leq 1$ расширение по непрерывности оператора A непрерывно отображает E^α на $E^{\alpha-1}$. В частности, $AE^{1/2} = AF = E^{-1/2} = F^*$. Аналогично действует и оператор $A^{1/2}$, в частности, он отображает $E^{1/2} = F$ на E , а E на $E^{-1/2}$. При этом оказывается, что $E^{-1/2}$ изометрически отождествляется с F^* . Отсюда и из (1.7), (1.9) следует, что

$$E^{1/2} = F \subset \rightarrow E = E^0 \subset \rightarrow F^* = E^{1/2}. \quad (1.11)$$

1.2. Об обобщённых и слабых решениях операторных уравнений. Пусть A — порождающий оператор гильбертовой пары $(F; E)$. Решения уравнения

$$Au = f, \quad u \in \mathcal{D}(A), \quad (1.12)$$

при $f \in E$ называются обобщёнными решениями. Так как оператор A имеет ограниченный обратный $A^{-1} = V$, то единственное решение существует при любом

$f \in E$, а совокупность всех обобщённых решений заполняют всю область определения $\mathcal{D}(A) = E^1$ оператора A . При этом

$$(v, u)_F = (A^{1/2}v, A^{1/2}u)_E = (v, f)_E, \quad \forall v \in F. \quad (1.13)$$

Решения уравнения (1.12) при $f \in E^{-1/2} = F^* \supset E$ называют слабыми решениями. Так как оператор A ограниченно действует из $E^{1/2} = F$ на $E^{-1/2} = F^*$, а обратный из F^* на F , то при $f \in E^*$ задача (1.12) имеет единственное слабое решение.

Таки образом, для слабых решений уравнения (1.12) имеем

$$\mathcal{D}(A) = F = E^{1/2}, \quad \mathcal{R}(A) = F^* = E^{-1/2}, \quad (1.14)$$

и выполнено тождество

$$(v, u)_F = (A^{1/2}v, A^{1/2}u)_E = \langle v, Au \rangle_E = \langle v, f \rangle_E, \quad \forall v, u \in F. \quad (1.15)$$

1.3. О полях скоростей идеальной жидкости в открытом сосуде. Информацию, изложенную в этом пункте, можно найти, например, в [1], §2.1 (см. также [5, 6]).

Учитывая приложения полученной ниже абстрактной формулы Грина к уравнениям Стокса, приведём некоторые сведения из линейной гидродинамики идеальной и вязкой жидкости.

Пусть идеальная однородная несжимаемая жидкость частично заполняет некоторую ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\partial\Omega$. Если $\vec{u} = \vec{u}(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \in \Omega$ — поле скорости частиц жидкости, то естественно считать, что кинетическая энергия жидкости конечна, и тогда

$$\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega), \quad \|\vec{u}\|_{\vec{L}_2(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} |\vec{u}|^2 d\Omega < \infty. \quad (1.16)$$

В гильбертовом пространстве вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$ (со скалярным произведением (\vec{u}, \vec{v}) , порождающим норму (1.16)) выделяют векторные поля $\vec{v} = \nabla p$, $p \in H^1(\Omega)$. (Потенциалы p определены с точностью до константы, которую в различных задачах определяют тем или иным способом.) Совокупность потенциальных полей образует замкнутое пространство $\vec{G}(\Omega)$ в пространстве $\vec{L}_2(\Omega)$. Совокупность потенциальных полей с потенциалами, обращающимися в нуль на $\partial\Omega$, т.е. с потенциалами из $H_0^1(\Omega)$, образует подпространство $\vec{G}_0(\Omega) \subset \vec{G}(\Omega)$.

Пусть \vec{u} — произвольное поле из $\vec{L}_2(\Omega)$, $\nabla p \in \vec{G}_0(\Omega)$. Тогда выражение

$$\Phi_{\vec{u}}(p) := -(\nabla p, \vec{u}) = - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{u} d\Omega$$

является линейным ограниченным функционалом в $H_0^1(\Omega)$, т.е. элементом из $(H_0^1(\Omega))^* =: H^{-1}(\Omega)$. Если обозначить через $div \vec{u}$ элемент из $H^{-1}(\Omega)$, порождающий этот функционал в скалярном произведении $L_2(\Omega)$, то

$$\Phi(p) = \langle p, div \vec{u} \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = -(\nabla p, \vec{u}), \quad p \in H_0^1(\Omega), \quad \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) \quad (1.17)$$

При этом

$$div \vec{u} \in H^{-1}(\Omega), \quad \|div \vec{u}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u\|_{\vec{L}_2(\Omega)}. \quad (1.18)$$

Поле $\vec{u} \in L_2(\Omega)$ называется соленоидальным, если $div \vec{u} = 0$. Из (1.18) следует, что совокупность $\vec{J}(\Omega)$ всех соленоидальных полей образует подпространство в $\vec{L}_2(\Omega)$ и

$$(\nabla p, \vec{u}) = 0, \quad \forall \nabla p \in \vec{G}_0(\Omega), \quad \vec{u} \in \vec{J}(\Omega). \quad (1.19)$$

Отсюда следует, что

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}(\Omega) \oplus \vec{G}_0(\Omega). \quad (1.20)$$

Назовём оператором Лапласа оператор Δ , определённый формулой

$$\Delta p := div \nabla p, \quad p \in H^1(\Omega). \quad (1.21)$$

По определению, он действует из $H^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*$, при этом

$$\|\Delta p\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|div p\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|\nabla p\| \leq \|p\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.22)$$

Пусть поле $\vec{u} \in L_2(\Omega)$ таково, что

$$div \vec{u} \in (H^1(\Omega))^*, \quad H^1(\Omega) \subset \rightarrow L_2(\Omega) \subset \rightarrow (H^1(\Omega))^*. \quad (1.23)$$

Рассмотрим на $H^1(\Omega)$ функционал

$$F(p) := (\nabla p, \vec{u}) + \langle p, div \vec{u} \rangle_{L_2(\Omega)}. \quad (1.24)$$

Из оценки

$$\begin{aligned} |F(p)| &\leq \|\vec{u}\| \cdot \|\nabla p\| + \|div \vec{u}\|_{(H^1(\Omega))^*} \cdot \|p\|_{H^1(\Omega)} \leq \\ &\leq (\|\vec{u}\| + \|div \vec{u}\|_{(H^1(\Omega))^*}) \|p\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (1.25)$$

следует, что $F(p)$ является линейным ограниченным функционалом на $H^1(\Omega)$. Так как при $p \in H_0^1(\Omega)$ в силу (1.17) $F(p) = 0$, то $F(p)$ является линейным ограниченным функционалом на ортогональном дополнении к $H_0^1(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$, т.е. на подпространстве гармонических функций $H_h^1(\Omega)$ из $H^1(\Omega)$:

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega), \quad \|p\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla p|^2 d\Omega, \quad \int_{\partial\Omega} p dS = 0. \quad (1.26)$$

Поскольку между элементами $H_h^1(\Omega)$ и $H^{1/2}(\partial\Omega)$ имеется взаимнооднозначное соответствие (и даже изометрия при специальном выборе нормы в $H^{1/2}(\partial\Omega)$, см. [1], §1.3), то $F(p)$ можно рассматривать как линейный ограниченный функционал в $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Представим этот функционал через скалярное произведение в $L_2(\partial\Omega)$ и отвечающий ему элемент из $H^{-1/2}(\partial\Omega) = (H^{1/2}(\partial\Omega))^*$ обозначим через u_n . Тогда из (1.24) получаем формулу

$$F(p) = (\partial p, \vec{u}) + \langle p, \operatorname{div} \vec{u} \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \gamma p := p|_{\partial\Omega}. \quad (1.27)$$

Элемент $u_n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ будем называть нормальной составляющей поля \vec{u} на границе $\partial\Omega$. Из (1.25) вытекает неравенство

$$\|u_n\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \|\vec{u}\| + \|\operatorname{div} \vec{u}\|_{(H^1(\Omega))^*}. \quad (1.28)$$

Полагая в (1.27) $p(x) \equiv 1$, получаем формулу Остроградского

$$\langle 1, \operatorname{div} \vec{u} \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle 1, u_n \rangle_{L_2(\partial\Omega)} \quad (\operatorname{div} \vec{u} \in (H^1(\Omega))^*, \quad u_n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)). \quad (1.29)$$

Для соленоидального поля из (1.28) имеем

$$\|u_n\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \|\vec{u}\|,$$

а формула (1.29) даёт

$$\langle 1, u_n \rangle_{L_2(\partial\Omega)} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (1.30)$$

Опираясь на формулу (1.27), получим формулу Грина для оператора Лапласа. Пусть $q \in H^1(\Omega)$ и $\Delta q \in (H^1(\Omega))^*$. Тогда $\nabla q \in \vec{G}(\Omega)$, $\operatorname{div} \nabla q \in (H^1(\Omega))^*$, и при $\vec{u} = \nabla q$ из (1.27) имеем

$$(p, q)_{H^1(\Omega)} + \langle p, \Delta q \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \gamma p, \frac{\partial q}{\partial n} \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad (1.31)$$

где

$$\frac{\partial q}{\partial n} := (\nabla q)_n \in H^{-1/2}(\partial\Omega), \quad \left\| \frac{\partial q}{\partial n} \right\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \|q\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta q\|_{(H^1(\Omega))^*}. \quad (1.32)$$

Если поле $\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega)$ является одновременно потенциальным и соленоидальным, то $\vec{u} = \nabla q$, $\operatorname{div} \vec{u} = \Delta q = 0$. Такие поля естественно называть гармоническими. всех гармонических полей образует подпространство $\vec{G}_h(\Omega)$ в пространстве всех соленоидальных полей:

$$\vec{G}_h(\Omega) = \vec{J}(\Omega) \cap \vec{G}(\Omega). \quad (1.33)$$

Можно проверить (см.[1], с. 103), что

$$\vec{J}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_h(\Omega), \quad (1.34)$$

$$\vec{J}_0(\Omega) = \{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), \quad u_n = 0 \text{ (на } \partial\Omega) \}. \quad (1.35)$$

Отсюда и из (1.20) следует разложение Г.Вейля:

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_h(\Omega) \oplus \vec{G}_0(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega). \quad (1.36)$$

Пусть теперь идеальная несжимаемая жидкость находится в открытом сосуде и в состоянии покоя занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ограниченную твёрдой стенкой S и горизонтальной свободной поверхностью $\Gamma : \partial\Omega = \bar{S} \cup \Gamma$. При этом считаем, что

$\partial\Omega$ — липшицева. При малых движениях жидкости в сосуде для поля скоростей $\vec{u} = \vec{u}(x)$ на твёрдой стенке S должно выводиться условие непротекания:

$$u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S). \quad (1.37)$$

Однако на Γ такого условия нет. Поэтому пространство полей скоростей движения жидкости в открытом сосуде шире, чем $\vec{J}_0(\Omega)$ (см. (1.35)). Расширение этого множества можно провести лишь за счёт добавления потенциальных полей из $\vec{G}_h(\Omega)$. Заменяя для потенциальных полей нормировку (1.26) новым условием

$$\int_{\Gamma} p d\Gamma = 0, \quad (1.38)$$

приходим к разложению (см. [1], с. 106).

$$\vec{G}(\Omega) = \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega), \quad (1.39)$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) = \vec{G}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma,h}(\Omega), \quad (1.40)$$

где $\vec{G}_{0,\Gamma,h}(\Omega)$ — подпространство гармонических полей, у которых потенциалы обращаются в нуль на Γ , а

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega) := \{ \vec{u} = \nabla p : \Delta p = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S) \}. \quad (1.41)$$

Разложение (1.36) а также формулы (1.39)–(1.41) порождают разложение

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \quad (1.42)$$

используемое при исследовании малых движений идеальной жидкости в открытом сосуде.

1.4. О полях скоростей вязкой жидкости в открытом сосуде. (см. [1], с.106 – 119). Будем считать, что однородная несжимаемая жидкость, находящаяся в сосуде, является не идеальной, а вязкой жидкостью с коэффициентом динамической вязкости $\mu > 0$. Наличие вязких сил приводит к диссипации энергии, скорость которой вычисляется по формуле

$$\mu E(\vec{u}, \vec{u}) := \frac{1}{2} \mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 |\tau_{i,j}(\vec{u})|^2 d\Omega, \quad \tau_{i,j}(\vec{u}) := \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (1.43)$$

Очевидно, что

$$E(\vec{u}, \vec{u}) \leq 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 d\Omega \leq 2 \|\vec{u}\|_{\vec{H}^1(\Omega)}^2, \quad (1.44)$$

где $\vec{H}^1(\Omega)$ — совокупность векторных полей $\vec{u} = \sum_{k=1}^3 u_k \vec{e}_k$ с компонентами $u_k \in \vec{H}^1(\Omega)$, $k = 1, 2, 3$.

Подпространство пространства $\vec{H}^1(\Omega)$, состоящее из всех его соленоидальных полей, обозначим через $\vec{J}^1(\Omega)$.

Если $\vec{u} \in \vec{C}^2(\bar{\Omega}) \cap \vec{J}^1(\bar{\Omega})$, $\vec{v} \in \vec{C}^1(\bar{\Omega})$, то имеет место следующая формула Грина для векторного оператора Лапласа (см. [6]):

$$-\int_{\Omega} \Delta \vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega = E(\vec{u}, \vec{v}) - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,k=1}^3 \tau_{ik}(\vec{u}) n_k v_i dS, \quad \vec{n} = \sum_{k=1}^3 n_k \vec{e}_k. \quad (1.45)$$

Если вязкая жидкость целиком занимает неподвижный сосуд Ω то на твёрдой стенке $S := \partial\Omega$ выполняется условие прилипания $\vec{u}|_S = \vec{0}$. В этом случае имеют место неравенства (см. [1], с. 111)

$$\|\vec{u}\|_{\vec{H}^1(\Omega)}^2 \leq E(\vec{u}, \vec{u}) \leq 2\|\vec{u}\|_{\vec{H}^1(\Omega)}^2, \quad \text{div } \vec{u} = \vec{0}, \quad (1.46)$$

где норма в $\vec{H}^1(\Omega)$ выбрана в одной из эквивалентных форм:

$$\|\vec{u}\|_{\vec{H}^1(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 |\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} |\vec{u}|^2 dS. \quad (1.47)$$

Таким образом, при выполнении условия прилипания норма в подпространстве

$$\vec{J}_0^1(\Omega) := \{ \vec{u} \in \vec{J}^1(\Omega) : \vec{u} = \vec{0} \text{ (на } \partial\Omega) \}, \quad (1.48)$$

определяемая по формуле

$$\|\vec{u}\|_{\vec{J}_0^1(\Omega)}^2 := E(\vec{u}, \vec{u}), \quad (1.49)$$

эквивалентна стандартной норме пространства $\vec{H}^1(\Omega)$.

Пусть теперь вязкая жидкость заполняет открытый сосуд, как и в п. 1.3, область Ω , ограниченную твёрдой стенкой S и горизонтальной свободной поверхностью Γ , причём $\partial\Omega$ — липшицева.

Пусть $\vec{J}_{00,S}^1(\Omega)$ — линейная совокупность полей из $\vec{J}^1(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности (каждое в своей) поверхности S . Оказывается (см. [1]), замыкание этой совокупности в $\vec{L}_2(\Omega)$ совпадает с $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$.

Замыкание совокупности $\vec{J}_{00,S}^1(\Omega)$ в норме $\vec{J}^1(\Omega)$ обозначим через $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, и тогда

$$\vec{J}_{0,S}^1(\Omega) := \{ \vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega) : \text{div } \vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \text{ (на } S) \}. \quad (1.50)$$

Это пространство играет основную роль при исследовании движений вязкой жидкости в открытом сосуде.

Норма в $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ определяется, как и (1.49), по формуле

$$\|\vec{u}\|_{\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)}^2 := E(\vec{u}, \vec{u}). \quad (1.51)$$

Из неравенства Корна (см. [1], с. 114)

$$E(\vec{u}, \vec{u}) \geq c \|\vec{u}\|_{\vec{H}^1(\Omega)}^2, \quad c > 0, \forall \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega), \quad (1.52)$$

которое имеется и для элементов из $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, а также из (1.47) (с заменой $\partial\Omega$ на S) следует, что нормы (1.51) и (1.47) в $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ эквивалентны.

Будем считать, что начало O декартовой системы координат выбрано на Γ б область Ω расположена в полупространстве $x_3 > 0$. Тогда при любых

$$\vec{u} \in \vec{C}^2(\bar{\Omega}) \cap \vec{J}_{0,S}^1(\bar{\Omega}), \quad \vec{v} \in \vec{C}^1(\bar{\Omega}) \cap \vec{J}_{0,S}^1(\bar{\Omega}), \quad \nabla p \in \vec{G}(\Omega), \quad (1.53)$$

из формулы Грина (1.45) имеем

$$\int_{\Omega} (\nabla p - \Delta \vec{u}) \cdot \vec{v} d\Omega = E(\vec{u}, \vec{v}) - \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 (\tau_{i3}(\vec{u}) - p\delta_{i3}) v_i d\Gamma. \quad (1.54)$$

2. АБСТРАКТНАЯ ФОРМУЛА ГРИНА ДЛЯ ТРОЙКИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этом параграфе выводится абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного следа в предположениях работы [2]. Рассматривается также классический пример и случай бигармонического оператора.

2.1. О формуле Грина из работы [2]. Предположим, что для гильбертовых пространств E, F и G выполнены следующие условия.

1⁰. Пространство F плотно вложено в E :

$$F \subset_{\rightarrow} E. \quad (2.1)$$

2⁰. На пространстве F определён оператор γ (оператор следа), ограниченно действующий из F в G , причём γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+$ пространства G :

$$\gamma : F \rightarrow G_+ \subset_{\rightarrow} G. \quad (2.2)$$

3⁰. Ядро $N := \text{Ker}\gamma$ оператора γ плотно в E :

$$\bar{N} = E. \quad (2.3)$$

В работе [2] доказано (см. теорему 2.1), что в предположениях 1⁰-3⁰ существуют однозначно определяемые по E, F, G и γ операторы L и ∂ , такие, что $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\partial) \subset F$, $\overline{\mathcal{D}(L)} = F$ и при любых $v \in F, u \in \mathcal{D}(L)$ справедливо тождество

$$\langle v, Lu \rangle_E = (v, u)_F - \langle \gamma v, \partial u \rangle_G, \quad (2.4)$$

где символами $\langle v, w \rangle_E$ и $\langle \varphi, \psi \rangle_G$ обозначены линейные функционалы, отвечающие тройкам пространств $F \subset E \subset F^*$, $G_+ \subset G \subset (G_+)^*$ и элементам $v \in F, w \in F^*, \varphi \in G_+, \psi \in (G_+)^*$.

Этот результат сейчас будет усилен в следующих позициях: а) во-первых, будет отброшено условие (2.3), б) во-вторых, в новом утверждении будет $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\partial) = F$, $\mathcal{R}(L) \subset F^*$. Такое обобщение позволяет в последнем параграфе работы установить, что формула Грина (1.54) для задачи Стокса есть частный

случай новой абстрактной формулы, хотя и не является частным случаем формулы Грина из работы [2].

2.2. Об абстрактном операторе следа. (см. [1], с.40-42, а также [2], п.1.3). Пусть для произвольных гильбертовых пространств F и G выполнено условие (2.2), т.е. существует оператор $\gamma : F \rightarrow G_+ \subset G$, такой, что

$$\|\gamma u\|_G \leq b \|u\|_F, \quad b > 0, \quad \forall u \in F. \quad (2.5)$$

Обозначим через N ядро оператора γ :

$$N := Ker \gamma = \{u \in F : \gamma u = 0\}. \quad (2.6)$$

В силу (2.5) N есть подпространство пространства F . Обозначим через M ортогональное дополнение к N в F :

$$F = N \oplus M. \quad (2.7)$$

В силу свойства (2.2) оператор $\gamma_M := \gamma|_M$ осуществляет взаимно-однозначное отображение M на G_+ . Это позволяет ввести на G_+ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\varphi, \psi)_{G_+} := (u, v)_F, \quad u, v \in M, \quad \gamma_M u = \varphi, \quad \gamma_M v = \psi. \quad (2.8)$$

Пусть $u \in F$, $\gamma u = \varphi \in G_+$. Тогда найдётся такой элемент $w \in M$, что $\gamma w = \gamma_M w = \varphi$; при этом $\gamma u - \gamma_M w = \gamma(u - w) = 0$, т.е. $v := u - w \in N$.

Так как

$$\|u\|_F^2 = \|w + (u - w)\|_F^2 = \|w\|_F^2 + \|u - w\|_F^2,$$

то

$$\|\varphi\|_{G_+}^2 = \|w\|_F^2 \leq \|\varphi\|_F^2, \quad \forall u \in F, \quad \gamma u = \varphi.$$

Отсюда следует, что

$$\|\varphi\|_{G_+} = \min_{\gamma u = \varphi} \|u\|_F. \quad (2.9)$$

Из (2.5) при $\varphi = \gamma_M u \in G_+$ ($u \in M$) имеем

$$\|\varphi\|_G = \|\gamma_M u\|_G \leq b \|u\|_F = b \|\varphi\|_{G_+}, \quad (2.10)$$

и так как согласно (2.2) G_+ плотно вложено в G , то (G_+, G) — гильбертова пара пространств. Построим по этой паре шкалу пространств G^α так, чтобы $G_+ = G^{1/2}$, $G = G^0$, тогда $(G_+)^* = G^{-1/2}$.

Обозначим через T_M оператор, сопряжённый к γ_M в смысле скалярного произведения в G . Поскольку в силу (2.8) оператор γ_M изометрически отображает пространство M на пространство $G_+ = G^{1/2}$, то оператор T_M изометрически отображает пространство $(G_+)^* = G^{-1/2}$ на пространство M . Тогда, по определению T_M , имеем

$$(\eta, T_M \psi)_F = \langle \gamma_M \eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in M, \quad \forall \psi \in G^{-1/2} = (G_+)^*. \quad (2.11)$$

Обозначим через ∂_M оператор, обратный к T_M . Тогда из (2.11) получаем тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma_M \eta, \partial_M w \rangle_G, \quad \forall \eta, w \in M, \quad (2.12)$$

где $\gamma_M \eta \in G_+$, $\partial_M w \in (G_+)^*$.

При $\eta = T_M \varphi$ из (2.11) следует соотношение

$$(T_M \varphi, T_M \psi)_F = \langle \gamma_M T_M \varphi, \psi \rangle_G, \quad \forall \varphi, \psi \in (G_+)^*, \quad (2.13)$$

и поэтому оператор $G_M := \gamma_M T_M$ изометрически отображает $(G_+)^* = G^{-1/2}$ на $G_+ = G^{1/2}$. Следовательно, его сужение на G является ограниченным в G оператором, самосопряжённым и положительным. Поэтому оператор, обратный к этому сужению, является порождающим оператором гильбертовой пары $(G_+; G)$.

2.3. Вывод абстрактной формулы Грина. Будем теперь считать, что выполнено условие (2.1), и рассмотрим гильбертову пару $(F; E)$. Построим по порождающему оператору A этой пары шкалу пространств E^α так, чтобы $F = E^{1/2}$, $E = E^0$, $F^* = E^{-1/2}$. Оператор A ограниченно действует из E^α на $E^{\alpha-1}$ в частности, из $E^{1/2} = F$ на $E^{-1/2} = F^*$. При $f \in E^{-1/2} = F^*$ обратный к нему оператор даёт слабое решение задачи $Au = f$ в форме $u = A^{-1}f \in F = E^{1/2}$.

Далее под A будем понимать оператор, заданный на $F = E^{1/2} = \mathcal{D}(A)$ и имеющий область значений $\mathcal{R}(A) = E^{-1/2} = F^*$. Тогда $A^{1/2}$ ограниченно действует из F на E и из E на $E^{-1/2} = F^*$ и имеет место тождество

$$(A^{1/2}\eta, A^{1/2}u)_E = (\eta, u)_F = \langle \eta, Au \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F. \quad (2.14)$$

Обозначим через P_N и P_M ортопроекторы на подпространства M и N ортогонального разложения (2.7) и введём оператор

$$L := AP_N, \quad \mathcal{D}(L) = F, \quad (2.15)$$

ограниченно действующий, согласно установленному выше, из F в F^* . Так как подпространства N и M ортогональны, то, очевидно,

$$L\omega = 0, \quad \forall \omega \in M. \quad (2.16)$$

Введём теперь оператор ∂ , являющийся расширением оператора ∂_M с подпространства M на всё пространство $F = N \oplus M$. Рассмотрим неравенство

$$|\langle \eta, Lu \rangle_E| \leq \|Lu\|_F \cdot \|\eta\|_F = \|Lu\|_{F^*} \cdot \|\gamma_M \eta\|_{G_+}, \quad \forall \eta \in M, \quad u \in N. \quad (2.17)$$

Из него следует, что величину $l_u(\eta) := \langle \eta, Lu \rangle_E$ можно рассматривать как линейный ограниченный функционал на G_+ . Обозначим через $-\partial_N u$ элемент из $(G_+)^*$ ⁸ представляющий этот функционал через скалярное произведение в G . Тогда

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = -\langle \gamma_M \eta, \gamma_N u \rangle_G, \quad \forall \eta \in M, \quad u \in N, \quad (2.18)$$

причём

$$\|\partial_N u\|_{(G_+)^*} \leq \|Lu\|_{F^*}. \quad (2.19)$$

По операторам ∂_M и ∂_N построим оператор $\partial : F \rightarrow (G_+)^*$ по следующему правилу:

$$\partial u := \partial_N P_N u + \partial_M P_M u, \quad \forall u \in F. \quad (2.20)$$

Проведённые выше построения приводят к такому итоговому результату.

Теорема 1. Если для гильбертовых пространств E , F и G , а также оператора γ выполнены условия (2.1) и (2.2), то имеет место следующая абстрактная формула Грина

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F, \quad (2.21)$$

причём операторы L и ∂ заданы на F и определяются единственным образом (по пространствам E , F , G и оператору γ) формулами (2.15) и (2.20).

Доказательство. Учтём предыдущие построения и заметим, что операторы A , P_N , P_M и ∂ находятся по пространствам E , f и g и оператору γ однозначно.

Для произвольных элементов η и u из F имеем

$$\eta = P_N \eta + P_M \eta =: \eta_N + \eta_M \in N \oplus M, \quad u = P_N u + P_M u =: u_N + u_M \in N \oplus M. \quad (2.22)$$

Далее, в силу (2.16), (2.20), (2.7) получаем

$$Lu = Lu_N, \quad \partial u = \partial_N u_N + \partial_M u_M, \quad \gamma \eta = \gamma_M \eta_M; \quad (2.23)$$

кроме того, в силу (2.7) и (2.22),

$$(\eta, u)_F = (\eta_N, u_N)_F + (\eta_M, u_M)_F. \quad (2.24)$$

Вычислим, опираясь на (2.22), (2.23), (2.24) разность между левой и правой частями формулы (2.21), имеем:

$$\begin{aligned} \langle \eta, Lu \rangle_E - (\eta, u)_F + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G &= \langle \eta_N, Lu_N \rangle_E + \langle \eta_M, Lu_N \rangle_E - (\eta_N, u_N)_F - \\ &- (\eta_M, u_M)_F + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_G + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M \rangle_G = (\langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M \rangle_G - \\ &- (\eta_M, u_M)_F) + (\langle \eta_N, Lu_N \rangle_E - (\eta_N, u_N)_F) + (\langle \eta_M, Lu_N \rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_G). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Пользуясь формулой (2.12) для элементов η_M и u_M из M , приходим к выводу, что первая скобка справа в (2.25) равна нулю. Из (2.14) и (2.15) имеем:

$$\langle \eta_N, Lu_N \rangle_E = \langle \eta_N, Au_N \rangle_E = (\eta_N, u_N)_F,$$

и потому вторая скобка справа в (2.25) также равна нулю.

Наконец, из (2.18) следует, что

$$\langle \eta_M, Lu_N \rangle_E = -\langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_G, \quad (2.26)$$

а тогда и третья скобка справа в (2.25) равна нулю.

2.4. Об абстрактных краевых задачах. В работе [2] рассмотрены примеры абстрактных краевых задач, основанные на формуле Грина этой работы. Здесь приведён лишь один пример абстрактной краевой задачи, связанной с формулой (2.21).

Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и потому имеет место абстрактная формула Грина (2.21). Рассмотрим абстрактную краевую задачу Неймана для уравнения Пуассона:

$$Lu = f, \quad \partial u = \psi. \quad (2.27)$$

Теорема 2. *Задача (2.27) тогда и только тогда имеет единственное слабое решение $u \in F$, когда выполнены условия:*

$$f \in F^*, \quad \psi \in G_+^*. \quad (2.28)$$

Это решение имеет вид

$$u = A^{-1}f + T_M\psi, \quad (2.29)$$

где $A : F \rightarrow F^*$ — порождающий оператор гильбертовой пары $(F; E)$, а T_M — оператор, сопряжённый к $\gamma_M := \gamma|_M$ в смысле скалярного произведения в G , см. (2.11).

Доказательство. 1⁰. Рассмотрим краевую задачу

$$Lv = f, \quad \partial v = 0. \quad (2.30)$$

Из формулы Грина (2.21) следует, что для её решений v выполнено тождество:

$$\langle \eta, f \rangle_E = (\eta, v)_F, \quad \forall \eta \in F, \quad (2.31)$$

служащее определением слабого решения. При любом $\eta \in F$ левая часть (2.31) представляет собой линейный ограниченный функционал $l_f(\eta)$ тогда и только тогда, когда $f \in F^*$. В этом случае существует единственное решение $v \in F$.

Задачу (2.30) можно переписать в виде

$$Av = f, \quad Av = Lv, \quad v \in \mathcal{D}(A) := \{v \in F : \partial v = 0\}, \quad (2.32)$$

где $A : F \rightarrow F^*$ — линейный ограниченный оператор, который, как только что установлено, имеет ограниченный обратный: $v = A^{-1}f$, $A^{-1} : F^* \rightarrow F$. Из (2.31) следует, что

$$\langle \eta, Av \rangle_E = (\eta, v)_F, \quad \forall \eta, v \in F, \quad (2.33)$$

и поэтому согласно (1.15) оператор A из (2.32) — это порождающий оператор гильбертовой пары $(F; E)$.

2⁰. Рассмотрим теперь задачу

$$Lw = 0, \quad \partial w = \psi. \quad (2.34)$$

Из формулы Грина (2.21) следует, что для её решений w выполнено тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in F, \quad (2.35)$$

служащее определением слабого решения. При любом $\eta \in F$ правая часть в (2.35) является линейным ограниченным функционалом $l_\psi(\eta)$ тогда и только тогда, когда $\psi \in (G_+)^*$. В этом случае существует единственное решение $w \in F$. Так как $Lw = 0$, то $w \in M \subset F$. Поэтому из (2.35) и из ортогональности подпространств N и M следует, что

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma_M \eta, \psi \rangle, \quad \forall \eta \in M, \quad w \in M. \quad (2.36)$$

Отсюда и из (2.11) получаем, что $w = T_M \psi$, где $T_M = \gamma_M^*$ (см. (2.11)).

3⁰. Введём элемент $\tilde{u} := v + w$ и докажем, что он равен элементу u — решению задачи (2.27) которое, таким образом, будет определено единственным образом по $f \in F^*$ и $\psi \in (G_+)^*$.

Имеем, ввиду предыдущего, следующие свойства

$$L\tilde{u} = Lv = f = Lu, \quad \partial\tilde{u} = \partial w = \partial_M w = \psi = \partial u. \quad (2.37)$$

Отсюда и из формул Грина (2.21), составленных для пар $(\eta; \tilde{u})$ и $(\eta; u)$, имеем

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, \tilde{u})_F - \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G. \quad (2.38)$$

Поэтому $(\eta, \tilde{u} - u)_F = 0, \forall \eta \in F$, откуда получаем, что $u = \tilde{u}$ и потому решение задачи (2.27) существует, единственно и представляется формулой (2.29).

Замечание 1. Из теоремы 2 следует, что для любого элемента $u \in F$ имеет место единственное представление его в виде

$$u = A^{-1}(Lu) + T_M(\partial u) := v + w. \quad (2.39)$$

Так как, с другой стороны, $u = u_N + u_M = P_N u + P_M u$ (см. теорему 1), то элементы v и w в представлении (2.39) находятся по элементам u_N и u_M однозначно.

В самом деле, в силу (1.27), (2.34), (2.37) имеем

$$\partial w = \partial u = \partial_M u_M + \partial_N u_N, \quad \partial_M = T_M^{-1}, \quad (2.40)$$

и потому

$$w = T_M(\partial w) = u_M + T_M \partial_N u_N. \quad (2.41)$$

Значит,

$$v = u - w = u_M + u_N - (u_M + T_M \partial_N u_N) = u_N - T_M \partial_N u_N. \quad (2.42)$$

Нетрудно видеть, что обратное соответствие между элементами v и w , а также элементами $u_N = P_N u$ и $u_M = P_M u$, тоже однозначно. Действительно, так как в (2.42) $u_N \in N, -T_M \partial_N u_N \in M$, то

$$u_N = P_N v, \quad u_M = P_M(v + w). \quad (2.43)$$

2.5. Классический пример. Рассмотрим в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ вещественное гильбертово пространство $E = L_2(\Omega)$ с обычной нормой

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} |u(x)|^2 d\Omega, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega, \quad (2.44)$$

а также пространство $F = H^1(\Omega)$ со стандартной нормой

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) d\Omega, \quad (2.45)$$

где $\nabla u = \sum_{k=1}^m \vec{e}_k \partial u / \partial x_k$ — градиент функции $u(x)$.

Нетрудно видеть, что — гильбертова пара пространств. В самом деле, $H^1(\Omega)$ плотно вложено в $L_2(\Omega)$ и выполнено неравенство

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad (2.46)$$

т.е. $H^1(\Omega) \subset \rightarrow L_2(\Omega)$, т.е. соответствующий оператор вложения компактен.

Пусть A — порождающий оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega), L_2(\Omega))$. Чтобы выяснить аналитическую природу оператора A , предположим, что граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая, функция $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, $v(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ и выполнено тождество (1.15), т.е. в данном случае соотношение

$$\int_{\Omega} (\nabla \eta \cdot \nabla u + \eta u) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla(Au) d\Omega. \quad (2.47)$$

Используя формулу Грина (0.1), отсюда имеем

$$\int_{\Omega} \eta(Au - u + \Delta u) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0, \quad \forall \eta \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (2.48)$$

Считая в этом тождестве $\eta(x)$ произвольной финитной функцией, приходим к формуле $Au = u - \Delta u$. Тогда из (2.48) следует, что $\int_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$, и потому (в силу плотности следов функций из $C^1(\bar{\Omega})$ в пространстве $L_2(\partial\Omega)$) приходим к граничному условию $\partial u / \partial v = 0$ (на $\partial\Omega$).

Таким образом, порождающий оператор A гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ есть оператор краевой задачи

$$Au := u - \Delta u = f \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega). \quad (2.49)$$

В области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ эта задача при $f(x) \in C(\bar{\Omega})$ имеет классическое решение $u(x) = A^{-1}f \in C^2(\bar{\Omega})$. Если $f(x) \in L_2(\Omega)$, а $\partial\Omega$ — липшицева, то задача (2.49)

имеет обобщённое решение $u(x) \in \mathcal{D}(A) \subset H^1(\Omega)$, и для этого решения выполнено тождество

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = (f, u)_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \quad (2.50)$$

Наконец, при $f(x) \in (H^1(\Omega))^*$, задача (2.49) имеет слабое решение $u(x) = A^{-1}f \in H^1(\Omega)$. Для этого решения, согласно (1.15), справедливо тождество

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \quad (2.51)$$

При этом оператор A ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ на $(H^1(\Omega))^*$, а обратный оператор A^{-1} — из $(H^1(\Omega))^*$ на $H^1(\Omega)$. Сужение оператора A^{-1} на $L_2(\Omega)$ является компактным положительным оператором, действующим в $L_2(\Omega)$.

Для элементов $\eta \in H^1(\Omega)$ (с нормой (2.45)) введём оператор следа γ по закону

$$\gamma u := u|_{\partial\Omega}. \quad (2.52)$$

Тогда (в области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$, см.[7]) оператор γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ в $H^{1/2}(\partial\Omega) = G_+$, причём $H^{1/2}(\partial\Omega)$ компактно вложено в $G = L_2(\partial\Omega)$.

Пространство $N = Ker\gamma$ в рассматриваемом примере совпадает с пространством $H_0^1(\Omega)$:

$$N = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ (на } \partial\Omega)\} =: H_0^1(\Omega). \quad (2.53)$$

Выясним, каким будет ортогональное дополнение M к $N = H_0^1(\Omega)$ в пространстве $H^1(\Omega)$ со скалярным произведением, отвечающим норме (2.45).

Если $\eta \in H_0^1(\Omega) = N$, $u \in M$, то

$$\int_{\Omega} (\eta u + \nabla \eta \cdot \nabla u) d\Omega = 0. \quad (2.54)$$

Так как $u \in H^1(\Omega)$, то $\nabla u \in \vec{L}_2(\Omega)$ и потому (см. (1.21), (1.22)) существует $\Delta u \in H^{-1}(\Omega) =: (H_0^1(\Omega))^*$. При этом для η и u выполнено свойство (1.17), т.е.

$$\int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \nabla u \, d\Omega = -\langle \eta, \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \eta \in H_0^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega). \quad (2.55)$$

Из (2.54) и (2.55) следует, что

$$\langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = 0, \quad \eta \in H_0^1(\Omega). \quad (2.56)$$

Так как $H_0^1(\Omega)$ плотно в L_{Ω} и потому в $(H_0^1(\Omega))^*$, то отсюда приходим к выводу, что $u - \Delta u \in (H_0^1(\Omega))^*$, и поскольку $u \in H^1(\Omega)$, то $\Delta u = u \in H^1(\Omega)$. Окончательно имеем

$$M = H_h^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \Delta = u\}. \quad (2.57)$$

Это подпространство, по аналогии со случаем (1.26) с эквивалентной нормой, также будем подпространством называть гармонических функций из $H^1(\Omega)$. Таким образом, при норме (2.45) снова имеем ортогональное разложение

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega), \quad (2.58)$$

где подпространства $H_0^1(\Omega)$ и $H_h^1(\Omega)$ определены в (2.53) и (2.57).

Установленные свойства пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\partial\Omega)$ и оператора γ показывают, что в этом случае выполнены требования 1⁰ – 3⁰ п.2.1 (см. (2.1) – (2.3)). Поэтому по теореме 1 для этих пространств справедлива формула Грина (2.21), т.е.

$$\langle \eta, Lu \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} (\eta u + \Delta \eta \cdot \Delta u) d\Omega - \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \quad (2.59)$$

Здесь, согласно определениям (2.15), (2.49),

$$Lu = u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad (2.60)$$

причём $Lu = 0$, если $u \in H_h^1(\Omega)$.

Получим теперь выражение для ∂u из (2.59) и попутно установим разрешимость некоторых краевых задач, возникающих при построении абстрактной формулы Грина.

Оператор $\gamma_M = \gamma|_M$ отображает пространство $M = H_h^1(\Omega)$ изометрически на пространство $G_+ = H^{1/2}(\partial\Omega)$, в котором норма в соответствии с (2.9) введена по формуле

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} := \min_{\gamma\eta=\varphi} \|\eta\|_{H^1(\Omega)}, \quad \eta \in H^1(\Omega). \quad (2.61)$$

Здесь минимум достигается на гармонической функции $u(x)$, для которой $\gamma u = \gamma_M u = \varphi$.

Из указанной изометрии между $H_h^1(\Omega)$ и $H^{1/2}(\partial\Omega)$ вытекает, что задача Дирихле

$$u - \Delta u = 0 \text{ (в } \Omega), \quad u = \varphi \text{ (на } \partial\Omega). \quad (2.62)$$

имеет единственное решение $u \in H_h^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Рассмотрим по аналогии с (2.34) задачу

$$w - \Delta w = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \text{ (на } \partial\Omega). \quad (2.63)$$

Эта задача имеет слабое решение $w \in M = H_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\psi \in (H^{1/2}(\Omega))^*$; в этом случае выполнено тождество

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma \eta, \psi \rangle_{L_2(\partial\Omega)} = \langle \gamma \eta, \frac{\partial w}{\partial n} \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \quad (2.64)$$

Отсюда имеем

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_M \eta, \frac{\partial w}{\partial n} \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \forall \eta, w \in H^1(\Omega). \quad (2.65)$$

С другой стороны, из (2.12) в рассматриваемом случае получаем, что

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_M \eta, \partial_M w \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \forall \eta, w \in H_h^1(\Omega) = M. \quad (2.66)$$

Из (2.65), (2.66) следует, что

$$\langle \gamma_M \eta, \partial_M w \rangle_{L_2(\partial\Omega)} = 0, \quad \forall \eta \in M, \quad (2.67)$$

и так как $H^{1/2}(\partial\Omega)$ плотно в $L_2(\partial\Omega)$ и в $(H^{1/2}(\partial\Omega))^*$, то из (2.67) приходим к выводу, что

$$\partial_M w = \frac{\partial w}{\partial n} \quad (\forall w \in M = H_h^1(\Omega)). \quad (2.68)$$

Определим теперь аналитическое выражение для оператора ∂_N . Пусть $\eta \in M = H_h^1(\Omega)$, $v \in N \cap C^2(\bar{\Omega})$. Тогда по формуле Грина (0.1) имеем

$$\int_{\Omega} \eta(v - \Delta v) d\Omega = \int_{\Omega} (\eta v + \Delta \eta \cdot \Delta v) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \gamma_M \eta \frac{\partial v}{\partial n} dS = - \int_{\partial\Omega} \gamma_M \eta \frac{\partial v}{\partial n} dS. \quad (2.69)$$

Рассмотрим теперь последовательность элементов $v_k \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ такую, что $v_k \rightarrow v \in H_0^1(\Omega)$, $\partial v_k / \partial n \rightarrow \partial v / \partial n \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^*$. Тогда, подставляя элементы этой последовательности вместо v в (2.69) и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\eta, v_k - \Delta v_k)_{L_2(\Omega)} = - \langle \gamma_M \eta, \frac{\partial v}{\partial n} \rangle_{L_2(\partial\Omega)}. \quad (2.70)$$

Здесь $\Delta v_k \rightarrow \Delta v$ в $(H_0^1(\Omega))^*$, см. (1.21), (1.22) и потому, в силу существования предела в правой части, заключаем, что левая часть равна функционалу $(\eta, v - \Delta v)_{L_2(\Omega)}$, где $\eta \in H_0^1(\Omega)$, $\Delta v \in (H_0^1(\Omega))^*$. Окончательно имеем тождество

$$\langle \eta, v - \Delta v \rangle_{L_2(\Omega)} = - \langle \gamma_M \eta, \frac{\partial v}{\partial n} \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \forall \eta \in H_h^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.71)$$

С другой стороны, учитывая (2.15) и (2.49), приходим к выводу, что $v - \Delta v = Lv = Av$ для элементов из $H_0^1(\Omega)$ и тогда из (2.18) имеем

$$\langle \eta, v - \Delta v \rangle_{L_2(\Omega)} = - \langle \gamma_M \eta, \partial_N v \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \forall \eta \in H_h^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.72)$$

Из (2.70) и (2.72) следует, что

$$\langle \gamma_M \eta, \partial_N v - \frac{\partial v}{\partial n} \rangle_{L_2(\partial\Omega)} = 0, \quad \forall \eta \in H_h^1(\Omega), \quad (2.73)$$

поэтому, в силу произвольности $\gamma_M \eta$ в $G_+ = H^{1/2}(\partial\Omega)$ приходим к выводу, что

$$\partial_N v = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \forall v \in N = H_0^1(\Omega). \quad (2.74)$$

Теперь из (2.68) и (2.74) окончательно получаем:

$$\partial u := \partial_M u_M + \partial_N u_N = \frac{\partial}{\partial n} (u_M + u_N) = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (2.75)$$

Изометрия, которую осуществляет оператор $\partial = \partial_M = T_M^{-1}$ на подпространстве $M = H_h^1(\Omega)$ (см. (2.11) и утверждения перед этой формулой), показывает, что задача Неймана (2.63) имеет единственное слабое решение $w \in H_h^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\psi \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^*$.

Приведённые рассмотрения изучаемого здесь классического примера приводят к следующему окончательному выводу.

Теорема 3. Для тройки гильбертовых пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ и $L_2(\partial\Omega)$, определённых для области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, а также для оператора следа γ (см. (2.52)) имеет место следующая формула Грина

$$\langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \quad (2.76)$$

причём

$$\Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^*. \quad (2.77)$$

Формула (2.77) обобщает, таким образом, как формулу (0.1) на случай негладкой области Ω и менее гладких, чем в (0.1), функций $\eta(x)$ и $u(x)$, так и формулу (0.2), где дополнительно требовалось, чтобы $\Delta u \in (H^1(\Omega))^*$. Здесь установлено, что это свойство имеет место при $u \in H^1(\Omega)$.

2.6. О формуле Грина для бигармонического оператора. Пусть теперь Ω — произвольная область в \mathbb{R}^2 и будем считать, что $\Gamma := \partial\Omega$ — достаточно гладкая, для простоты — бесконечно гладкая граница Ω .

Для произвольных функций $\eta(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ и $u(x) \in C^4(\bar{\Omega})$ хорошо известна формула Грина для бигармонического оператора

$$\int_{\Omega} (\eta \Delta^2 u + \eta u) \, d\Omega = \int_{\Omega} (\Delta \eta \Delta u + \eta u) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \left(\eta \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \frac{\partial \eta}{\partial n} \Delta u \right) \, d\Gamma, \quad (2.78)$$

получающаяся из второй формулы Грина для оператора Лапласа.

Сейчас будет приведено обобщение формулы Грина (2.78) на случай менее гладких функций, и это обобщение связано с применением абстрактной формулы Грина (2.21).

Введём, как и в п.2.5, гильбертово пространство $E = L_2(\Omega)$ с нормой (2.44), а также пространство $F := H^2(\Omega)$ с квадратом нормы

$$\|u\|_F^2 = \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (|\Delta u|^2 + |u|^2) \, d\Omega, \quad (2.79)$$

где Δ — оператор Лапласа в \mathbb{R}^2 . Отметим, что норма (2.79) эквивалентна стандартной норме пространства $H^2(\Omega)$ (см.[8] пп.112 – 114). Поэтому $F = H^2(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega) = E$, и тогда $(H^2(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств.

Для выявления аналитической природы оператора A гильбертовой пары $(H^2(\Omega); L_2(\Omega))$ воспользуемся тождеством (1.15) и формулой (2.78); имеем

$$\int_{\Omega} \eta(Au) d\Omega = (\eta, u)_F = \int_{\Omega} (\eta \Delta^2 u + \eta u) d\Omega - \int_{\Gamma} \left(\eta \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \frac{\partial \eta}{\partial n} \Delta u \right) d\Gamma \quad (2.80)$$

при любых $\eta(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, $u(x) \in C^4(\bar{\Omega})$. При финитных $\eta(x)$ отсюда получаем, что

$$Au = \Delta^2 u + u \quad (\text{в } \Omega), \quad (2.81)$$

и тогда из следует, что

$$\int_{\Gamma} \left(-\eta \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + \frac{\partial \eta}{\partial n} \Delta u \right) d\Gamma = 0 \quad (2.82)$$

при любых $\eta \in C^2(\bar{\Omega})$. Поэтому отсюда приходим к граничным условиям

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0, \quad \Delta u = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \quad (2.83)$$

Таким образом, оператор A гильбертовой пары $(H^2(\Omega); L_2(\Omega))$ является оператором краевой задачи

$$Au := \Delta^2 u + u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0, \quad \Delta u = 0 (\text{на } \Gamma). \quad (2.84)$$

При $f(x) \in L_2(\Omega)$ эта задача имеет обобщённое решение $u(x) \in \mathcal{D}(A) \subset H^2(\Omega)$, а при $f(x) \in (H^2(\Omega))^*$ — слабое решение из $H^2(\Omega)$. При этом для слабого решения $\Delta^2 u \in (H^2(\Omega))^*$.

Введём пространство $G = L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma)$ с квадратом нормы, определяемым стандартным скалярным произведением в $L_2(\Gamma)$:

$$(\varphi, \psi)_{L_2(\Gamma)} := \int_{\Gamma} \varphi \psi d\Gamma. \quad (2.85)$$

Введём, далее, оператор следа γ по закону

$$\gamma u := \left\{ -u|_{\Gamma}; \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} \right\}, \quad \forall u \in F = H^2(\Omega). \quad (2.86)$$

Тогда

$$N = \text{Ker } \gamma = \left\{ u \in H^2(\Omega) : u|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \right\} =: H_0^2(\Omega). \quad (2.87)$$

Найдём ортогональное дополнение $M = F \ominus N$ к подпространству (2.87). При гладких $\eta(x) \in H_0^2$ и $u(x) \in M$ из формулы Грина (2.78) получаем

$$(\eta, u)_F = \int_{\Omega} (\Delta \eta \Delta u + \eta u) d\Omega = 0 = \int_{\Omega} \eta (\Delta^2 u + u) d\Omega. \quad (2.88)$$

Отсюда следует, что

$$M := H_h^2(\Omega) := \{u(x) \in H^2(\Omega) : \Delta^2 u + u = 0 \quad (\text{в } \Omega)\}. \quad (2.89)$$

Заметим теперь, что в области Ω с достаточно гладкой границей $\partial\Omega = \Gamma$ оператор γ из (2.86) ограниченно действует из $F = H^2(\Omega)$ в пространство

$$G_+ := H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma), \quad (2.90)$$

плотно (и даже компактно) вложенное в $G = L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma)$. Так как, кроме этого, $H_0^2(\Omega)$ плотно в $H^2(\Omega)$ (множество финитных функций плотно в каждом из этих пространств), то для тройки пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^2(\Omega)$ и $G = L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma)$ и оператора γ из (2.86) выполнены общие требования 1⁰ – 3⁰ п.2.1 и потому справедлива формула Грина (2.21). При этом

$$Lu = AP_N u = \Delta^2 u + u \in (H^2(\Omega))^*, \quad \forall u \in H^2(\Omega). \quad (2.91)$$

Опираясь на эти факты, получим аналитическое выражение для ∂u и установим разрешимость некоторых краевых задач, отвечающих бигармоническому оператору Δ^2 .

Прежде всего, ввиду изометрии между $M = H_h^2(\Omega)$ и $G_+ = H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$, осуществляемой оператором $\gamma_M := \gamma|_M$, вытекает, что задача Дирихле

$$\Delta^2 u + u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad u = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad (2.92)$$

имеет единственное решение $u \in H_h^2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi \in H^{3/2}(\Gamma), \quad \psi \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (2.93)$$

Рассмотрим теперь по аналогии с (2.34) задачу

$$\Delta^2 w + w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \Delta w = \varphi, \quad \frac{\partial}{\partial n} \Delta w = \psi \quad (\text{на } \Gamma). \quad (2.94)$$

Из формулы Грина (2.78) следует, что задача имеет слабое решение $w \in M = H_h^2 \subset H^2(\Omega)$ в том и только в том случае, когда

$$\varphi \in (H^{1/2}(\Gamma))^*, \quad \psi \in (H^{3/2}(\Gamma))^*. \quad (2.95)$$

При этом выполнено тождество

$$(\eta, w)_{H^2(\Omega)} = \langle \gamma n, \left\{ \frac{\partial \Delta u}{\partial n}; \Delta u \right\}_G \rangle = \langle \gamma \eta, \{\psi; \varphi\}_G \rangle, \quad \forall \eta \in H^2(\Omega). \quad (2.96)$$

В частности,

$$(\eta, w)_{H^2(\Omega)} = \langle \gamma_M n, \left\{ \frac{\partial \Delta u}{\partial n}; \Delta u \right\}_G \rangle, \quad \forall \eta, w \in H_h^2(\Omega) = M. \quad (2.97)$$

Здесь справа стоит линейный функционал, обобщающий выражение из левой части (2.82) на случай, когда $\eta|_{\Gamma} \in H^{3/2}(\Gamma)$, $\frac{\partial \eta}{\partial n}|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$, $(\frac{\partial}{\partial n} \Delta u)_{\Gamma} \in (H^{3/2}(\Gamma))^*$, $(\Delta u)_{\Gamma} \in (H^{1/2}(\Gamma))^*$, то есть правая часть в (2.97) равна

$$\langle -\eta, \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle \frac{\partial \eta}{\partial n}, \Delta u \rangle_{L_2(\Gamma)}. \quad (2.98)$$

Эти рассуждения показывают, что

$$\partial_M u = \left\{ \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \Delta u \right\}, \quad \forall u \in H_h^2(\Omega) = M. \quad (2.99)$$

Аналогично преобразованиям, осуществлённым выше и приведшим к формулам (2.69) – (2.74), получаем, что для рассматриваемой задачи

$$\partial_N u = \left\{ \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \Big|_{\Gamma}; (\Delta u)_{\Gamma} \right\}, \quad \forall u \in H_0^2(\Omega), \quad (2.100)$$

и поэтому окончательно

$$\partial u := \partial_M u_M + \partial_N u_N = \left\{ \frac{\partial \Delta u}{\partial n}; \Delta u \right\} \in (G_+)^* = (H^{3/2}(\partial\Omega))^* \times (H^{1/2}(\partial\Omega))^* \quad (2.101)$$

при любой $u \in H^2(\Omega)$.

Итогом рассмотрения случая бигармонического оператора является

Теорема 4. Для тройки гильбертовых пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^2(\Omega)$ и $G = [L_2(\Gamma)]^2$, определённых в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega = \Gamma$, а также для оператора следа γ , определённого законом (2.86) справедлива следующая формула Грина:

$$\langle \eta, \Delta^2 u + u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^2(\Omega)} + \langle \eta, \frac{\partial}{\partial n} \Delta u \rangle_{L_2(\Gamma)} - \langle \frac{\partial}{\partial n}, \Delta u \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^2(\Omega). \quad (2.102)$$

Здесь

$$\Delta^2 u \in (H^2(\Omega))^*, \quad \eta|_{\Gamma} \in H^{3/2}(\Gamma),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta u \right)_{\Gamma} \in (H^{3/2}(\Gamma))^*, \quad \frac{\partial \eta}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \Delta u \in (H^{1/2}(\Gamma))^*. \quad (2.103)$$

Формула (2.102) обобщает формулу (2.78) на случай, когда $\eta, u \in H^2(\Omega)$, а свойства (2.103) установлены в процессе доказательства теоремы.

3. О ФОРМУЛЕ ГРИНА ДЛЯ ЗАДАЧИ СТОКСА

Как и в п. 1.4., будем считать, что однородная вязкая несжимаемая тяжёлая жидкость заполняет в состоянии покоя сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ограниченный твёрдой стенкой S и горизонтальной своюодной поверхностью Γ , т.е. $\partial\Omega = \bar{S} \cup \Gamma$, причём $\partial\Omega$ — липшицева. При этом ось OX_3 направлена вверх, $O \in \Gamma$, $x_3 < 0$ для точек из Ω . Тогда при любых $\vec{u} \in C^2(\bar{\Omega}) \cap \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, $\vec{\eta} \in \vec{C}(\bar{\Omega}) \cap \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ и $\nabla p \in \vec{G}(\Omega)$ (см. обозначения в п. 1.4) справедлива формула Грина (1.54).

Сейчас будет получено обобщение этой формулы на случай произвольных полей $\vec{\eta}$ и \vec{u} из $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ и $\nabla p \in (\vec{G}(\Omega))^*$.

3.1. Оператор гильбертовой пары соленоидальных подпространств. Как указано в п. 1.4, гильбертово пространство $F := \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ плотно вложено в пространство $E := \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и потому эти пространства образуют гильбертову пару $(F; E) = (\vec{J}_{0,S}^1(\Omega); \vec{J}_{0,S}(\Omega))$. Найдём порождающий оператор A этой гильбертовой пары.

Из (1.54) и определения (2.14) оператора A имеем для гладких функций $\vec{\eta}(x)$ и $\vec{u}(x)$ из $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$:

$$E(\vec{\eta}, \vec{u}) = - \int_{\Omega} \vec{\eta} \cdot \Delta \vec{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \left(\sum_{i=1}^3 \eta_i \tau_{i3}(\vec{u}) \right) d\Gamma = \int_{\Omega} \vec{\eta} \cdot A \vec{u} \, d\Omega. \quad (3.1)$$

Для финитного поля $\vec{\eta}$ отсюда получаем, что

$$\int_{\Omega} \vec{\eta} \cdot (A \vec{u} + \Delta \vec{u}) d\Omega = 0.$$

Пусть $P_{0,S}$ — ортопроектор на подпространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Тогда $\vec{\eta} = P_{0,S} \vec{\eta}$, и предыдущее соотношение переписывается в виде

$$\int_{\Omega} \vec{\eta} \cdot (A \vec{u} + P_{0,S} \Delta \vec{u}) d\Omega = 0, \quad \vec{\eta} \in \vec{J}_0(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega). \quad (3.2)$$

$\vec{J}_{0,S}(\Omega) \ominus \vec{J}_0(\Omega) = \vec{G}_{h,S}(\Omega)$ (см. (1.42)), а совокупность финитных соленоидальных полей $\vec{\eta}(x)$ плотна в $\vec{J}_0(\Omega)$, то из (3.2) следует, что для гладких $\vec{u}(x)$

$$A \vec{u} = -P_{0,S} \Delta \vec{u} + \nabla p, \quad \nabla p \in \vec{J}_{0,S}(\Omega). \quad (3.3)$$

При этом

$$\Delta p = 0 \quad (\Omega), \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (S). \quad (3.4)$$

Подставляя в (3.1) выражение (3.3) для $A \vec{u}$, приходим к тождеству

$$\int_{\Omega} \vec{\eta} \cdot \nabla p \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\sum_{i=1}^3 \eta_i \tau_{i3}(\vec{u}) \right) d\Gamma, \quad (3.5)$$

что даёт соотношение (с помощью формулы Гаусса-Остроградского)

$$\int_{\Gamma} \left(\sum_{i=1}^2 \eta_i \tau_{i3}(\vec{u}) + \eta_3(-p + \tau_{33}(\vec{u})) \right) d\Gamma = 0. \quad (3.6)$$

Покажем, что отсюда следуют граничные условия

$$\tau_{i3}(\vec{u}) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad -p + \tau_{33}(\vec{u}) = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad (3.7)$$

связанные с заданием области определения оператора A .

Возьмём в качестве $\vec{\eta}$ в (3.6) поле вида

$$\eta_1 = \psi(x_3)\varphi(x_1, x_2), \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = -\Psi(x_3)\frac{\partial\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \quad (3.8)$$

$$\Psi(x_3) = \int_{-a}^{x_3} \psi(\xi)d\xi, \quad \psi(0) = 0, \Psi(0) \neq 0.$$

Здесь a — достаточно малая положительная величина, $\varphi(x_1, x_2)$ — произвольная финитная в Γ функция и Γ_0 — открытое множество, содержащее носитель функции φ и содержащееся вместе с замыканием внутри Γ . Если $C_a := \Gamma_0 \times [-a; 0]$ — цилиндр, лежащий при достаточно малом $a > 0$ в области Ω , а $\psi(x_3)$ — гладкая функция, то поле $\vec{\eta} = \vec{\eta}(x_1, x_2, x_3)$, определённое формулами (3.8), принадлежит пространству $\vec{J}_{0,S}^1$.

Для такого поля $\vec{\eta}$ формула (3.6) даёт соотношение

$$\int_{\Gamma} (-p + \tau_{33}(\vec{u}))\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}d\Gamma = 0. \quad (3.9)$$

Это означает, что обобщённая производная по x_1 от функции $-p + \tau_{33}(\vec{u})$ на Γ равна нулю. Аналогично устанавливается, что производная по x_2 также равна нулю. Поэтому

$$-p + \tau_{33}(\vec{u}) = const \quad (\text{на } \Gamma). \quad (3.10)$$

Так как $\nabla p \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$, то (см. (1.41))

$$\int_{\Gamma} pd\Gamma = 0. \quad (3.11)$$

Можно проверить также (см. [1], с.115), что

$$\int_{\Gamma} \tau_{33}(\vec{u})d\Gamma = 0. \quad (3.12)$$

Поэтому из (3.10) окончательно имеем третье условие (3.7).

Выберем теперь в качестве $\vec{\eta}$ в (3.6) поле вида (3.8) с $\psi(0) = 1$. Тогда с учётом (3.9) имеем

$$\int_{\Gamma} \tau_{13}(\vec{u})\varphi d\Gamma = 0.$$

Отсюда следует первое условие (3.7). Аналогично устанавливается, что выполнено второе условие (3.7).

Подводя итоги этим рассуждениям и опираясь на формулы (3.3), (3.4), (3.6), приходим к следующим выводам.

Теорема 5. (см. также [10]). Оператор A гильбертовой пары $(\vec{J}_{0,S}^1(\Omega); \vec{J}_{0,S}(\Omega))$ является оператором краевой задачи

$$\begin{aligned} A\vec{u} &:= -P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \\ \tau_{iz}(\vec{u}) - p\delta_{iz} &= 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad i = 1, 2, 3, \\ \Delta p &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Если эта задача имеет решение $\vec{u} \in \vec{H}^2(\Omega) \cap \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, то $\nabla p \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$. При любой $\vec{f} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ задача (3.13) имеет единственное обобщённое решение \vec{u} из $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, причём $\vec{u} \in \mathcal{D}(A)$.

При любой $\vec{f} \in (\vec{J}_{0,S}^1(\Omega))^*$ задача (3.13) имеет единственное слабое решение $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, обратно, любой элемент $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ является слабым решением задачи (3.13) при некотором $\vec{f} \in (\vec{J}_{0,S}^1(\Omega))^*$.

Замечание 2. Так как $\nabla p \in (\vec{J}_{0,S}^1(\Omega))^*$, то в силу третьего граничного условия на Γ (а также последних соотношений (3.13)) поле ∇p однозначно определяется полем $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$. Поэтому коротко задачу (3.13) можно записать в виде

$$A\vec{u} = \vec{f}, \quad (3.14)$$

а оператор A , заданный первоначально на множестве $\vec{C}^2(\Omega) \cap \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, затем расширен по Фридрихсу до самосопряжённого оператора, действующего в пространстве $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ и заданного на соответствующей области определения $\mathcal{D}(A)$ (на совокупности обобщённых решений задачи (3.13)). Наконец, его дальнейшее расширение на всё $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ приводит к оператору, у которого $\mathcal{D}(A) = \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) = F$, а $\mathcal{R}(A) = (\vec{J}_{0,S}^1(\Omega))^* = F^*$.

3.2. Оператор следа и подпространство «гармонических» вектор-функций.

Переходя к дальнейшему применению абстрактных построений из параграфа 2 к задачам гидромеханики вязкой жидкости, введём оператор γ и рассмотрим связанные с ним проблемы.

Будем считать, что

$$\gamma\vec{u} := \vec{u}|_{\Gamma}, \quad \forall \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega). \quad (3.15)$$

Так как выполнено условие

$$\int_{\Gamma} u_3 d\Gamma = 0, \quad (3.16)$$

а $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \subset \vec{H}^1(\Omega)$, то, в силу теорем вложения в областях с липшицевой границей (см., например, [7]), оператор γ ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ в пространство

$$G_+ := H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H_\Gamma^{1/2}, \quad H_\Gamma^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}, \quad (3.17)$$

где $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus 1_\Gamma$ (см. условие (3.16)). Очевидно, G_+ плотно и компактно вложено в пространство

$$G := L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma}, \quad (3.18)$$

и потому для оператора γ из (3.15) выполнено общее условие (2.2) из п. 2.1.

В рассматриваемом случае

$$\text{Ker } \gamma := \vec{N}(\Omega) = \{ \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) : \vec{u} = \vec{0} \text{ (на } \Gamma) \} = \vec{J}_0^1(\Omega), \quad (3.19)$$

(см. (1.48)), причём $\vec{N}(\Omega)$ не плотно в $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, т.е. не выполнено условие (2.3) из п. 2.1.

Таким образом, описываемая ситуация не отвечает случаю, разобранным в общем виде в работе [2], однако, поскольку выполнены условия (2.1) и (2.2), то справедлива теорема 1 применительно к пространствам $E = \vec{J}_{0,S}(\Omega)$, $F = \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, $G := L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma}$ и оператора γ из (3.15).

Найдём ортогональное дополнение

$$\vec{M}(\Omega) = \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \ominus \vec{N}(\Omega). \quad (3.20)$$

Если $\vec{\eta} \in \vec{N}(\Omega)$, $\vec{u} \in \vec{M}(\Omega)$, то $E(\vec{\eta}, \vec{u}) = 0$. Пусть \vec{u} — дважды непрерывно дифференцируемая функция, а $\vec{\eta}$ — непрерывно дифференцируемая. Тогда по формуле Грина (1.54)

$$0 = E(\vec{\eta}, \vec{u}) = - \int_{\Omega} \vec{\eta} \cdot \Delta \vec{u} \, d\Omega, \quad (3.21)$$

где P_0 — ортопроектор на $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Так как $\vec{N}(\Omega)$ плотно в $\vec{J}_0(\Omega)$, то из (3.21) следует, что

$$-P_0 \Delta \vec{u} = \vec{0}, \quad \vec{u} \in \vec{M}(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}^1(\Omega). \quad (3.22)$$

Уравнение (3.22) равносильно соотношению

$$-P_{0,S} \Delta \vec{u} + P_{h,S} \Delta \vec{u} = -P_{0,S} \Delta \vec{u} + \nabla p_M = \vec{0}, \quad \nabla p_M \in \vec{G}_{h,S}(\Omega), \quad (3.23)$$

где $P_{h,S}$ — ортопроектор на подпространство $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ из ортогонального разложения (1.22). В (3.23) левая часть имеет тот же вид, что и в первом уравнении задачи (3.13), причём ∇p_M однозначно определяются по полю $\vec{u} \in \vec{M}(\Omega)$.

Теорема 6. Подпространство $\vec{M}(\Omega)$ состоит из элементов («гармонических» вектор-функций) вида

$$\vec{M}(\Omega) = \{ \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1 : -P_{0,S} \Delta \vec{u} + \nabla p_M = \vec{0} \text{ (в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \text{ (на } S) \}. \quad (3.24)$$

При этом оператор $(\gamma_M)^{-1} := (\gamma|_{\vec{M}(\Omega)})^{-1}$ даёт слабое решение задачи

$$-P_{0,S}\Delta \vec{u} + \nabla p_M = \vec{0}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \quad (3.25)$$

$$\gamma_M \vec{u} = \vec{u}|_{\Gamma} = \vec{\varphi} \in G_+,$$

т.е. $\vec{u} = (\gamma_M)^{-1} \vec{\varphi} \in \vec{M}(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$. Обратно, любая вектор-функция из $\vec{M}(\Omega)$ является слабым решением задачи (3.25) при некотором $\vec{\varphi} \in G_+$.

3.3. Оператор ∂ и связанные с ним краевые задачи. Получим теперь, опираясь на абстрактную схему пп. 2.2 – 2.3, выражение для операторов ∂_M и ∂_N , а потому и для оператора ∂ в рассматриваемом гидродинамическом случае.

Для гладких элементов $\vec{\eta}$ и \vec{u} из $\vec{M}(\Omega)$, согласно определению (2.13) оператора ∂_M , формуле (2.45) и уравнения (3.23), имеем

$$\begin{aligned} E(\vec{\eta}, \vec{u}) &= \int_{\Gamma} \left(\sum_{i=1}^3 (\gamma_M \vec{\eta})_i (\partial_M \vec{u})_i \right) d\Gamma = \\ &= - \int_{\Omega} \vec{\eta} \cdot P_{0,S} \Delta \vec{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \left(\sum_{i=1}^3 (\gamma_M \vec{\eta})_i \tau_{i3}(\vec{u}) \right) d\Gamma = \\ &= - \int_{\Omega} \vec{\eta} \cdot \nabla p_M \, d\Omega + \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 ((\gamma_M \vec{\eta})_i \tau_{i3}(\vec{u})) \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 (\gamma_M \vec{\eta})_i ((\partial_M \vec{u})_i - \tau_{i3}(\vec{u}) + p_M \delta_{i3}) \, d\Gamma = 0, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{M}(\Omega). \quad (3.27)$$

Рассуждениями, аналогичными приведённым выше при выводе из тождества (3.6) соотношений (3.7) с использованием полей вида (3.8) устанавливается, что из (3.27) следует аналогичное выражение для оператора ∂_M :

$$\partial_M \vec{u} = \sum_{i=1}^3 (\tau_{i3}(\vec{u}) - p_M \delta_{i3}) \vec{e}_i, \quad (3.28)$$

где p_M — функция из уравнения (3.23) или задачи (3.25), связывающая элементы \vec{u} из $\vec{M}(\Omega)$.

Следствием полученного результата (3.28) является такой вывод.

Теорема 7. Задача

$$\begin{aligned} -P_{0,S}\Delta \vec{u} + \nabla p_M &= \vec{0}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \\ \partial_M \vec{u} &= \vec{\psi} \quad (\text{на } \Gamma), \end{aligned} \quad (3.29)$$

называемая второй вспомогательной задачей С.Г. Крейна (см. [1], с. 119), тогда и только тогда имеет единственное решение \vec{u} из $\vec{M}(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, когда выполнено условие

$$\vec{\psi} \in (G_+)^* = (H^{1/2}(\Gamma))^* \times (H^{1/2}(\Gamma))^* \times (H_\Gamma^{1/2})^*. \quad (3.30)$$

С целью получения аналитического выражения для $\partial_N \vec{u}$ при $\vec{u} \in \vec{N}(\Omega)$ повторим рассуждения из общей схемы п. 2.4, приводящие к формуле (2.18). $\vec{\eta} \in \vec{M}(\Omega)$, $\vec{u} \in \vec{N}(\Omega)$, причём эти элементы гладкие, то, с учётом формул (2.15), (2.18), (1.54) и (3.13), получаем

$$\begin{aligned} \langle \vec{\eta}, L\vec{u} \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \vec{\eta} \cdot (-P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p_N) d\Omega = E(\vec{\eta}, \vec{u}) - \\ &- \int_{\Gamma} \left(\sum_{i=1}^3 \eta_i (\tau_{i3}(\vec{u}) - p_N \delta_{i3}) \right) d\Gamma = - \int_{\Gamma} \left(\sum_{i=1}^3 \eta_i (\partial_N \vec{u})_i \right) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.31)$$

С учётом равенства $E(\vec{\eta}, \vec{u}) = 0$ отсюда следует тождество

$$\int_{\Gamma} \left(\sum_{i=1}^3 \eta_i ((\partial_N \vec{u})_i - \tau_{i3}(\vec{u}) + p_N \delta_{i3}) \right) d\Gamma = 0, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{M}(\Omega). \quad (3.32)$$

Так как для элементов $\vec{\eta}$ из $\vec{M}(\Omega)$ значения $\gamma_M \vec{\eta}$ могут быть произвольными элементами из G_+ (см. (3.15), (3.17) и (3.25)) то из (3.32) следует, что

$$\partial_N \vec{u} = \sum_{i=1}^3 (\tau_{i3}(\vec{u}) - p_N \delta_{i3}) \vec{e}_i, \quad (3.33)$$

т.е. выражается такой же формулой, как (3.28).

Окончательно, для $\vec{u} = \vec{u}_M + \vec{u}_N$ получаем

$$\partial \vec{u} = \partial_M \vec{u}_M + \partial_N \vec{u}_N = \sum_{i=1}^3 (\tau_{i3}(\vec{u}) - p_N \delta_{i3}) \vec{e}_i, \quad p := p_M + p_N. \quad (3.34)$$

Опираясь на эту формулу, а также абстрактную теорему 2, рассмотрим краевую задачу Стокса

$$\begin{aligned} -P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p_u &= \vec{f}, \quad \text{div } \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \\ \sum_{i=1}^3 (\tau_{i3}(\vec{u}) - p_u \delta_{i3}) \vec{e}_i &= \vec{\psi} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \Delta p_u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p_u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \end{aligned} \quad (3.35)$$

возникающую в проблеме движений вязкой жидкости в открытом сосуде.

Теорема 8. Если выполнены условия

$$\vec{f} \in (\vec{J}_{0,S}^1(\Omega))^*, \quad \vec{\psi} \in (\vec{H}^{1/2}(\Gamma))^* = (H^{1/2}(\Gamma))^* \times (H^{1/2}(\Gamma))^* \times (H_\Gamma^{1/2})^*, \quad (3.36)$$

то задача (3.35) имеет единственное слабое решение $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ представимое в виде

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}, \quad \nabla p_u = \nabla p_v + \nabla p_w, \quad (3.37)$$

где функции \vec{v} и \vec{w} являются слабыми решениями задачи (первая вспомогательная задача С.Г. Крейна)

$$\begin{aligned} A\vec{v} := -P_{0,S}\Delta\vec{v} + \nabla p_v = \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \\ \sum_{i=1}^3 (\tau_{i3}(\vec{v}) - p_v \delta_{i3}) \vec{e}_i = \vec{0} \quad (\text{на } \Gamma), \\ \Delta p_v = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p_v}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \end{aligned} \quad (3.38)$$

и задачи (вторая вспомогательная задача С.Г. Крейна)

$$\begin{aligned} -P_{0,S}\Delta\vec{w} + \nabla p_w = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{w} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{w} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \\ \sum_{i=1}^3 (\tau_{i3}(\vec{w}) - p_w \delta_{i3}) \vec{e}_i = \vec{\psi} \quad (\text{на } \Gamma), \\ \Delta p_w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p_w}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Обратно, любое поле $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ представимо в виде суммы (3.37), где \vec{v} и \vec{w} — слабые решения задач (3.38), (3.39) при некоторых \vec{f} и $\vec{\psi}$, удовлетворяющих условиям (3.36).

3.4. Общий вид формулы Грина для задачи Сткса. Подведём итоги проведённым выше построениям в гидродинамическом случае, отвечающем пространствам $E = \vec{J}_{0,S}(\Omega)$, $F = \vec{J}_{0,S}(\Omega)$, $G = \vec{L}_2 = L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma}$ и оператору $\gamma\vec{u} = \vec{u}|_\Gamma$.

Заметим прежде всего, что выражение $L\vec{u} = AP_N\vec{u}$ для любого поля $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ имеет вид (см. (3.13), (3.34))

$$L\vec{u} := -P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p_u \in \left(\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)\right)^*, \quad (3.40)$$

причём $L\vec{w} = \vec{0}$ для элементов из $\vec{M}(\Omega)$. Представим согласно теореме 8 любой элемент $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ в виде (3.37) и воспользуемся определениями (1.15), (2.12) слабых решений применительно к задачам (3.38), (3.39). Так как (3.38) коротко можно записать в виде

$$L\vec{v} = \vec{f}, \quad \partial\vec{v} = \vec{0},$$

а (3.39) — в виде

$$L\vec{w} = \vec{f}, \quad \partial\vec{w} = \vec{0},$$

то для этих задач имеем тождества (см. также (2.31), (2.35))

$$E(\vec{\eta}, \vec{v}) = \langle \vec{\eta}, L\vec{v} \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = \langle \vec{\eta}, L\vec{u} \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)}, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega),$$

$$E(\vec{\eta}, \vec{w}) = \langle \gamma_M \vec{\eta}, \partial_M \vec{w} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)} = \langle \gamma_M \vec{\eta}, \partial \vec{u} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{M}(\Omega). \quad (3.41)$$

Из второго тождества следует, что

$$E(\vec{\eta}, \vec{w}) = \langle \gamma_M \vec{\eta}, \partial \vec{u} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega). \quad (3.42)$$

Теорема 9. Пусть область Ω удовлетворяет сформулированным в начале параграфа условиям. Тогда для любых функций $\vec{\eta}, \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ имеет место следующая формула Грина для задачи Стокса:

$$\langle \vec{\eta}, -P_{0,S} \Delta \vec{u} + \nabla p_u \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = E(\vec{\eta}, \vec{u}) - \langle \gamma \vec{\eta}, \sum_{i=1}^3 (\tau_{i3}(\vec{u}) - p_u \delta_{i3}) \vec{e}_i \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)}, \quad (3.43)$$

причём

$$-P_{0,S} \Delta \vec{u} + \nabla p_u = L\vec{u} \in \left(\vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \right)^*, \quad \gamma \vec{\eta} = \vec{\eta}|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H_{\Gamma}^{1/2},$$

$$\partial \vec{u} = \sum_{i=1}^3 (\tau_{i3}(\vec{u}) - p_u \delta_{i3}) \vec{e}_i \in (H^{1/2}(\Gamma))^* \times (H^{1/2}(\Gamma))^* \times (H_{\Gamma}^{1/2})^*.$$

Доказательство. Формула (3.43) следует из (3.37), (3.41) и (3.42), а также определений (3.40) и (3.34) выражений для L и ∂ .

Замечание 3. в формуле (3.43) поле p_u связано с \vec{u} (см. (3.37)). Иногда её записывают в в форме, содержащей независимо от \vec{u} поле p . Тогда она принимает вид

$$\langle \vec{\eta}, -P_{0,S} \Delta \vec{u} + \nabla p_u + \nabla p \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = E(\vec{\eta}, \vec{u}) -$$

$$- \langle \gamma \vec{\eta}, \sum_{i=1}^3 (\tau_{i3}(\vec{u}) - (p_u + p) \delta_{i3}) \vec{e}_i \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \quad (3.44)$$

$$\forall \vec{\eta}, \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega), \quad \forall \nabla p \in \left(\vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \right)^*. \quad (3.45)$$

В самом деле, если $\nabla p \in \vec{G}_{h,S}(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, то

$$\langle \vec{\eta}, \nabla p \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = \langle \vec{\eta}, \nabla p \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = \int_{\Gamma} \eta_3 p \, d\Gamma = \langle (\gamma \vec{\eta})_3, p \rangle_{L_2(\Gamma)} =$$

$$= - \langle \gamma \vec{\eta}, \sum_{i=1}^3 (-p \delta_{i3}) \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}. \quad (3.46)$$

Здесь левая часть имеет смысл не только при $\nabla p \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, но и при $\nabla p \in \left(\vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \right)^*$. Поэтому смысл имеет и правая часть (3.46) при таких ∇p .

отметим в заключении, что в монографии [1] используется оператор следа не в форме (3.15), а оператор нормального следа, определяемый по закону

$$\gamma_n \vec{u} := (\vec{u} \cdot \vec{n})_\Gamma = u_3|_\Gamma. \quad (3.47)$$

Для этого оператора можно ввести соответствующие подпространства $\vec{N}(\Omega)$ и $\vec{M}(\Omega)$. При этом оператор A будет тот же, а выражения L , ∂_M и ∂_N — другие. Однако формула Грина для задачи Стокса в форме (3.44), (3.45) снова имеет место.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
2. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи. // Украинский матем. вестник, Т. 1, № 1 (2004). — с. 69 – 97.
3. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семёнов Е.М. Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
4. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов. — Киев: Наукова думка, 1965. — 800 с.
5. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. — М.: Мир, 1981. — 408 с.
6. Ладженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1961. — 204 с.
7. Gagliardo E. Caratterizzazioni delle tracce sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni in n variabili. // Rend.Sem.mat.Univ.Padova. — 1957. — 27, p. 284 – 305. С. 289-294.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. — М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит., 1960, т.5. — 656 с.
9. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971 — 372 с.
10. Azizov T. Ya., Hardt V., Kopachevsky N.D., Mennicken R. On the problem of small notions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container. Math. Nachr., **248** – **249**, 2003, pp. 3 – 39.