УДК 513.88, 517.98

О $*$-ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ АЛГЕБР $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$, АССОЦИИРОВАННЫХ С ГРАФАМИ ДЫНКИНА

[1]

М. В. Заводовский, Ю. С. Самойленко

Институт математики НАН Украины

ул. Терещенковская, 3, 01601, Киев-4, Украина

e-mail: *mzv@imath.kiev.ua, yurii_sam@imath.kiev.ua*

Abstract

For algebras $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ associated with Dynkin graphs Γ, we describe the set $\Sigma_\Gamma = \{\chi \mid$ exist $*$-representation of algebra $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}\}$.

Введение

1. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^n$ множество самосопряженных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H, для которых выполняется равенство $\sum_{k=1}^n A_k = \gamma I_H$ ($\gamma \in \mathbb{R}$) и спектр каждого оператора A_k является конечным множеством $M_k \subset \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$). Такие операторы играют важную роль в математическом анализе, алгебраической геометрии, теории операторов и математической физике (см., например, [1]-[4]).

2. Эти множества операторов естественно рассматривать как операторы $*$-представления образующих в соответствующих алгебрах. Рассмотрим алгебру

$$\mathcal{P}_{R_1,\ldots,R_n;\gamma} = \mathbb{C}\langle a_1, \ldots, a_n \mid R_k(a_k) = 0,\ k = 1, \ldots, n,\ \sum_{k=1}^n a_k = \gamma e\rangle,$$

где R_k $(k = 1, \ldots, n)$ полиномы с комплексными коэффициентами и $\gamma \in \mathbb{C}$. В работах [4, 5] и др. изучались алгебры, порожденные образующими с заданным спектром, которые связаны между собой линейными соотношениями. Пусть корни всех полиномов R_k $(k = 1, \ldots, n)$ простые и вещественные и $\gamma \in \mathbb{R}_+$. Тогда эти алгебры изоморфны (см. [6]) алгебрам

$$\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_n;\gamma} = \mathbb{C}\langle p_1^{(1)}, \ldots, p_{m_1}^{(1)}, \ldots, p_1^{(n)}, \ldots, p_{m_n}^{(n)} \mid p_k^{(i)2} = p_k^{(i)},\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \alpha_k^{(i)} p_k^{(i)} = \gamma e,$$

$$\sum_{k=1}^{m_i} p_k^{(i)} = e,\ p_j^{(i)} p_k^{(i)} = 0,\ j, k = 1, \ldots, m_i,\ j \neq k,\ i = 1, \ldots, n\rangle.$$

Все алгебры $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_n;\gamma}$ можно рассматривать как $*$-алгебры, считая образующие ортопроекторами.

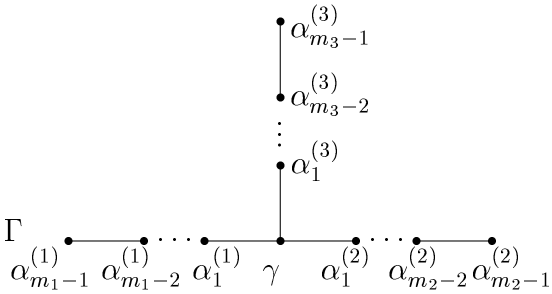
[1]Работа выполнена при поддержке фонда DFG (Германия), проект 436UKR 113/71, а также Государственного фонда фундаментальных исследований Украины, проект 01.07/071

3. Далее мы всегда предполагаем, что $M_i = \left\{0 = \alpha_{m_i}^{(i)} < \ \ldots\ < \alpha_1^{(i)}\right\}$. С алгеброй $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_n;\gamma}$ можно связать неориентированный граф без циклов Γ с n ветками, которые выходят из одного корня, длины m_i $i = 1, \ldots, n$ (т.е. на i-й ветке m_i вершин, включая корень). Алгебра $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_n;\gamma}$ однозначно задается графом Γ с вершинами на i-й ветке $p_k^{(i)}$, наборами чисел $\left\{\alpha_k^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$ $k = 1, \ldots, m_i - 1$ (т.е. положительной функцией χ на графе Γ : $\chi\left(p_k^{(i)}\right) = \alpha_k^{(i)}$ при $i = 1, \ldots, n$ и $k = 1, \ldots, m_i - 1$) и параметром γ (равным значению χ в корне графа Γ). Тогда алгебру $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_n;\gamma}$ можно обозначить через $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$:

$$\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_n;\gamma} = \mathcal{P}_{\Gamma,\chi} = \mathbb{C}\langle p_1^{(1)}, \ldots, p_{m_1-1}^{(1)}, \ldots, p_1^{(n)}, \ldots, p_{m_n-1}^{(n)} \,|\, p_k^{(i)2} = p_k^{(i)},$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} \alpha_k^{(i)} p_k^{(i)} = \gamma e,\ p_j^{(i)} p_k^{(i)} = 0,\ j, k = 1, \ldots, m_i,\ j \neq k,\ i = 1, \ldots, n\rangle,$$

здесь $p_{m_i}^{(i)} = e - \sum_{k=1}^{m_i-1} p_k^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$. В дальнейшем функцию χ на графе Γ будем называть характером алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$.

Иногда алгебру $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ мы будем задавать рисунком, на котором изображен граф Γ, у его вершин $p_k^{(i)}$ написаны числа $\alpha_k^{(i)}$ ($k = 1, \ldots, m_i - 1$, $i = 1, \ldots, n$), у корня — число γ. Например, алгебра $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi} = \mathcal{P}_{\{0=\alpha_{m_1}^{(1)}<\alpha_{m_1-1}^{(1)}<\ldots<\alpha_1^{(1)}\},\{0=\alpha_{m_2}^{(2)}<\alpha_{m_2-1}^{(2)}<\ldots<\alpha_1^{(2)}\},\{0=\alpha_{m_3}^{(3)}<\alpha_{m_3-1}^{(3)}<\ldots<\alpha_1^{(3)}\};\gamma}$ задается следующим рисунком:



4. Алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$, ассоциированные с графом Дынкина, устроены проще, чем алгебры, ассоциированные с другими графами. В частности, алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ конечномерны тогда и только тогда, когда они ассоциированы с графами Дынкина A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$), E_6, E_7 и E_8 (см. [5]).

5. $*$-представление π алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ — набор ортопроекторов $P_k^{(i)} = \pi(p_k^{(i)})$ $i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m_i$ в гильбертовом пространстве H ($P_k^{(i)2} = P_k^{(i)*} = P_k^{(i)}$, при $i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m_i$), удовлетворяющий условиям: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} \alpha_k^{(i)} P_k^{(i)} = \gamma I_H$ и $\sum_{k=1}^{m_i} P_k^{(i)} = I_H$ для всех $i = 1, \ldots, n$ (I_H — единичный оператор в H).

Из условия $\sum_{k=1}^{m_i} P_k^{(i)} = I_H$, непосредственно следует, что $P_j^{(i)} P_k^{(i)} = 0$ при $j,\, k = 1, \ldots, m_i,\ j \neq k,\ i = 1, \ldots, n$.

Если π — конечномерное $*$-представление алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ в пространстве H и $d_0 = \dim H$, $d_k^{(i)} = \dim \mathrm{Im} P_k^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m_i - 1$, то вектор $(d_0; d_1^{(1)}, \ldots, d_{m_1-1}^{(1)}; \ldots; d_1^{(n)}, \ldots, d_{m_n-1}^{(n)})$ будем называть обобщенной размерностью $*$-представление π. Представления алгебр $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$, ассоциированных с графами Дынкина также устроены проще, чем представления алгебр, ассоциированных с другими графами (см. [7, 8]).

6. В п. настоящей работы для алгебр $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$, ассоциированных с графами Дынкина, используя результаты [7, 8] и приведенные в п.1 сведения о невырожденных $*$-представлениях $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$, *описано множество* $\sum_\Gamma = \{\chi \mid$ *существует* $*$*-представление алгебры* $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}\}$.

1. О невырожденных $*$-представлениях алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$

1. Следуя [8], $*$-представление π алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ будем называть невырожденным, если $\pi(p_k^{(i)}) \neq 0$ при $1 \leq k \leq m_i$, $i = 1, \ldots, n$ и $\sum_{k=1}^{m_i} \pi(p_k^{(i)}) \neq I$ для $i = 1, \ldots, n$. Пусть Δ — подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Будем называть $*$-представление π алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ Δ-невырожденным, если $\pi(p_k^{(i)}) \neq 0$ при $1 \leq k \leq m_i - 1$, $i = 1, \ldots, n$ и $\sum_{k=1}^{m_i-1} \pi(p_k^{(i)}) \neq I$ для $i \in \Delta \subset \{1, \ldots, n\}$ и $\sum_{k=1}^{m_i-1} \pi(p_k^{(i)}) = I$ для $i \notin \Delta$. В дальнейшем, для Δ-невырожденных $*$-представлений множества Δ называем невырожденными по направлениям, а точки множества $\{1, \ldots, n\} \backslash \Delta$ — направлениями вырождения. При $\Delta = \{1, \ldots, n\}$ Δ-невырожденное $*$-представление является невырожденным.

Обозначим через $Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ категорию $*$-представлений π алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$, irr-$Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ — категория неприводимых $*$-представлений, n-d-$Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ — категория невырожденных $*$-представлений, n-d, irr-$Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ — категория неприводимых невырожденных $*$-представлений, а также Δ-$Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ — категория Δ-невырожденных $*$-представлений, Δ-irr-$Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ — категория неприводимых Δ-невырожденных $*$-представлений. Имеют место включения:

$$\begin{gathered} n\text{-}d, irr\text{-}Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi} \subset irr\text{-}Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi} \subset Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}, \\ n\text{-}d, irr\text{-}Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi} \subset n\text{-}d\text{-}Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi} \subset Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}, \\ \Delta\text{-}irr\text{-}Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi} \subset \Delta\text{-}Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi} \subset Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}. \end{gathered}$$

2. Пусть Γ' поддерево в Γ и $\chi|_{\Gamma'} = \chi'$ — сужение характера χ на вершины графа Γ'. Тогда алгебра $\mathcal{P}_{\Gamma',\chi'}$ есть фактор-алгебра алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$. Обозначим $j_{\Gamma,\chi}^{\Gamma',\chi'} : Rep\mathcal{P}_{\Gamma',\chi'} \longrightarrow Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ функтор вложения соответствующих категорий.

Предложение 1. 1) *Для любого $*$-представления π алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ существуют единственные Γ', Δ и Δ-невырожденное $*$-представление $\tilde{\pi}$ алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma',\chi'}$ такие, что $j_{\Gamma,\chi}^{\Gamma',\chi'} \tilde{\pi} = \pi$.*

2) *Представления π неприводимо тогда и только тогда, когда $\tilde{\pi}$ неприводимо.*

3) *Имеют место равенства*

$$Rep\mathcal{P}_{\Gamma,\chi} = \bigcup_{\Gamma'\subset\Gamma}\ \bigcup_{\Delta\subset\{1,\dots,n\}} j_{\Gamma,\chi}^{\Gamma',\chi'}(\Delta\text{-}Rep\mathcal{P}_{\Gamma',\chi'})$$

$$irr\text{-}Rep\mathcal{P}_{M_1,\dots,M_n;\gamma} = \bigcup_{\Gamma'\subset\Gamma}\ \bigcup_{\Delta\subset\{1,\dots,n\}} j_{\Gamma,\chi}^{\Gamma',\chi'}(\Delta\text{-}irr\text{-}Rep\mathcal{P}_{\Gamma',\chi'}).$$

Доказательство. Для каждого $*$-представления π алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ положим $V\Gamma' = \{p_k^{(i)} \in V\Gamma \mid \pi(p_k^{(i)}) \neq 0\}$ ($V\Gamma$ — множество вершин графа Γ). Множество Δ строится следующим образом: если $\pi(p_k^{(i)}) \neq 0$ при $1 \le k \le m_i - 1$, $i = 1,\dots,n$ и $\sum_{k=1}^{m_i-1}\pi(p_k^{(i)}) \neq I$, то $i \in \Delta \subset \{1,\dots,n\}$, а если $\sum_{k=1}^{m_i-1}\pi(p_k^{(i)}) = I$, то $i \notin \Delta$. Тогда для представления $\tilde{\pi}$ алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma',\chi'}$ такого, что $\pi(p_j^{(k)}) = \tilde{\pi}(p_j^{(k)})$ при $\pi(p_j^{(k)}) \in \Gamma'$ и $\pi(p_k^{(i)}) = 0$ при $\pi(p_k^{(i)}) \notin \Gamma'$ имеет место равенство $j_{\Gamma,\chi}^{\Gamma',\chi'}\tilde{\pi} = \pi$. □

3. Если представление π приводимо, то оно, вообще говоря, неоднозначно раскладывается в прямую сумму невырожденных (Δ-невырожденных) на фактор-алгебрах подпредставлений. Но если π раскладывается в прямую сумму фактор-представлений типа I, т.е. имеет место разложение пространства H на инвариантные относительно π подпространства $H = \sum_k H_k$, где $H_k = \mathcal{H}_k \otimes \tilde{\mathcal{H}}_k$ и $\pi = \sum_k(\pi_k \otimes I_k)$ и π_k неприводимое $*$-представление (вообще говоря, вырожденное), то разложению π можно придать стандартную форму: $\pi = \Sigma_k(\pi_k \otimes I_k) = \sum_{\Gamma'\subset\Gamma,\ \Delta\subset\{1,\dots,n\}}\sum_k(j_{\Gamma,\chi}^{\Gamma',\chi'}\tilde{\pi}_k \otimes I_k)$, где $\tilde{\pi}_k$ ($k = 1,\dots,n$) Δ-невырожденные $*$-представления алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma',\chi'}$.

4. Пусть Γ — граф Дынкина. Так как алгебра $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$, ассоциированная с графом Дынкина, имеет конечное число m_Γ неприводимых $*$-представлений, то имеет место следующее предложение.

Предложение 2. *Любое представление π алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$ однозначно раскладывается в прямую сумму $\pi = \sum_{k=1}^{m_\Gamma}(\pi_k \otimes I_k) = \sum_{\Gamma'\subset\Gamma,\ \Delta\subset\{1,2,3\}}\sum_{k=1}^{m_\Gamma}(j_{\Gamma,\chi}^{\Gamma',\chi'}\tilde{\pi}_k \otimes I_k)$ (π_k— неприводимые неэквивалентные $*$-представления алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$, такие, что $\pi = j_{\Gamma,\chi}^{\Gamma',\chi'}\tilde{\pi}$, $\tilde{\pi}_k$ — Δ-невырожденные $*$-представления алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma',\chi'}$) по всем подграфам Γ' и подмножествам $\Delta \subset \{1,2,3\}$.*

Таким образом, описание всех $*$-представлений алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$, ассоциированной с графом Дынкина Γ сводится к описанию неприводимых $*$-представлений, а описание неприводимых $*$-представлений сводится к описанию всех Δ-невырожденных неприводимых $*$-представлений фактор-алгебр, связанных с подграфами $\Gamma' \subset \Gamma$.

Сведем ещё описание Δ-невырожденных неприводимых $*$-представлений алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma',\chi'}$ к описанию невырожденных неприводимых $*$-представлений алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma'',\chi''}$, ассоциированной с другим графом Γ'' и заданной другим характером χ''. Введем граф Γ'', который получается из Γ' удалением по одному звену в каждом направлении вырождения. Пусть $\widetilde{p^{(i)}}_k$ вершины графа Γ'' ($k = 1,\dots,m_i - 1$, $i = 1,2,3$) в невырожденных направлениях и

$k = 1, \ldots, m_i - 2$ в направлениях вырождения. Пусть χ'' соответствующий характер алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma'',\chi''}$, который получается из характера χ' следующим образом: положим $\chi''(\tilde{p}_k^{(i)}) = \chi'(p_k^{(i)}) = \alpha_k^{(i)}$ для вершин на невырожденных направлениях ($i \in \Delta$), $\chi''(\tilde{p}_k^{(j)}) = \chi'(p_k^{(j)}) - \chi'(p_{m_j-1}^{(j)}) = \alpha_k^{(j)} - \alpha_{m_j-1}^{(j)}$ в вершина вырожденных направлений ($i \in \Delta$), $\chi''(\gamma) = \gamma - \sum_{i \notin \Delta} \chi'(p_{m_i-1}^{(i)})$. Построим функтор Φ_Δ из Δ-$Rep\mathcal{P}_{\Gamma',\chi'}$ в n-d-$Rep\mathcal{P}_{\Gamma'',\chi''}$. Пусть $\pi' \in \Delta$-$Rep\mathcal{P}_{\Gamma',\chi'}$, $\pi'(p_k^{(i)}) = P_k^{(i)}$ и $\chi'(p_k^{(i)}) = \alpha_k^{(i)}$. Положим $\Phi_\Delta(\pi') = \pi'' \in n$-$d$-$Rep\mathcal{P}_{\Gamma'',\chi''}$. На морфизмах Φ_Δ задается естественным образом.

Предложение 3. Φ_Δ — *изоморфизм категорий Δ-$Rep\mathcal{P}_{\Gamma',\chi'}$ и n-d-$Rep\mathcal{P}_{\Gamma'',\chi''}$.*

2. Описание множества Σ_Γ

1. Опишем множество $\Sigma_\Gamma = \{\chi \mid$ существует $*$-представление алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}\}$, $\Sigma_\Gamma \subset \mathbb{R}_+^{m_1-1} \times \mathbb{R}_+^{m_2-1} \times \mathbb{R}_+^{m_3-1} \times \mathbb{R}_+$ для графов Дынкина Γ. Введем множества $\Sigma_\Gamma^{irr} = \{\chi \mid$ существует неприводимое $*$-представление алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}\}$, $\Sigma_\Gamma^{n-d,irr} = \{\chi \mid * \text{ - } \mathcal{P}_{\Gamma,\chi}\}$, $\Sigma_\Gamma^{\Delta,irr} = \{\chi \mid \Delta \text{ - } * \text{ - } \mathcal{P}_{\Gamma,\chi}\}$.

Предложение 4. *Характер $\chi \in \Sigma_\Gamma = \Sigma_\Gamma^{irr}$ тогда и только тогда, когда существует подграф Γ' и подмножество $\Delta \subset \{1,2,3\}$ такие, что $\chi' \in \Sigma_{\Gamma'}^{\Delta,irr}$, т.е. когда $\chi \in \bigcup_{\Gamma' \subset \Gamma,\ \Delta \subset \{1,2,3\}} (\mathbb{R}_+^l \times \Sigma_{\Gamma'}^{\Delta,irr})$, где $l = |V\Gamma \backslash V\Gamma'|$.*

Доказательство. Пусть $\chi \in \Sigma_\Gamma$, тогда существует его разложение в прямую сумму неприводимых подпредставлений, следовательно, $\Sigma_\Gamma = \Sigma_\Gamma^{irr}$.

Далее доказательство следует из предложения 1. Множество Σ_Γ^{irr} является объединением подмножеств характеров χ по $\Gamma' \subset \Gamma$ и $\Delta \subset \{1,2,3\}$ таких, что $\chi|_{\Gamma'} \in \Sigma_{\Gamma'}^{\Delta,irr}$, а на подграфе $\Gamma \backslash \Gamma'$ значения χ могут быть произвольными, задающими характер χ на Γ. $\square$

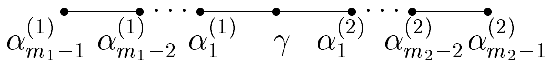
Предложение 4 сводит описание множества Σ_Γ к описанию $\Sigma_{\Gamma'}^{\Delta,irr}$ для графов Дынкина Γ'. Опишем множество $\Sigma_{\Gamma'}^{\Delta,irr}$ при $\Delta \neq \{1,2,3\}$. Для любого характера χ' на графе Γ' введем отображение φ_Δ, положив $\varphi_\Delta(\chi') = \chi''$, где характер χ'' на графе Γ'' был построен выше (см. 1.4). Из предложения 3 непосредственно следует следующее предложение.

Предложение 5. 1) *φ_Δ отображает $\Sigma_{\Gamma'}^{\Delta,irr}$ в $\Sigma_{\Gamma''}^{n-d,irr}$.*
2) *Характер $\chi' \in \Sigma_{\Gamma'}^{\Delta,irr}$ тогда и только тогда, когда $\chi' \in \phi_\Delta^{-1}(\Sigma_{\Gamma''}^{n-d,irr})$.*

2. Конкретизируем описание множества Σ_Γ последовательно для графов Дынкина A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$), E_6, E_7 и E_8.

2.1. **Множества Σ_{A_n} $(n \geq 1)$.** Алгебра $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$

A_n



коммутативна и имеет только одномерные неприводимые $*$-представления. Невырожденные $*$-представления существуют только у графа вида:

$$\gamma = 0, \Delta = \{1, 2\}.$$

Другие Δ-невырожденные $*$-представления существуют только у графов вида :

$$\gamma = \alpha^{(2)}_i, \Delta = \{1\}; \qquad \gamma = \alpha^{(1)}_j, \Delta = \{2\}; \quad \gamma = \alpha^{(1)}_k + \alpha^{(2)}_l, \Delta = \emptyset.$$

Пусть характер $\chi = (\alpha^{(1)}_1, \ldots, \alpha^{(1)}_{m_1-1}; \alpha^{(2)}_1, \ldots, \alpha^{(2)}_{m_2-1}; \gamma) \in \mathbb{R}^{m_1-1}_+ \times \mathbb{R}^{m_2-1}_+ \times \mathbb{R}_+$. Имеет место следующая теорема.

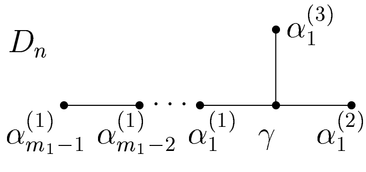
Теорема 1. *Характер* $\chi \in \sum_{A_n}$, *тогда и только тогда, когда*

$$\chi \in (\mathbb{R}^{m_1-1}_+ \times \mathbb{R}^{m_2-1}_+ \times \{0\}) \bigcup (\bigcup_{k=1}^{m_2-1} (\mathbb{R}^{m_1-1}_+ \times \mathbb{R}^{m_2-1}_+ \times \{\alpha^{(2)}_k\})) \bigcup$$
$$\bigcup_{j=1}^{m_1-1} (\mathbb{R}^{m_1-1}_+ \times \mathbb{R}^{m_2-1}_+ \times \{\alpha^{(1)}_j\}) \bigcup (\bigcup_{k=1}^{m_1-1} \bigcup_{l=1}^{m_2-1} (\mathbb{R}^{m_1-1}_+ \times \mathbb{R}^{m_2-1}_+ \times \{\alpha^{(1)}_k + \alpha^{(2)}_l\})).$$

Далее множество характеров на графе Γ, соответствующих всем неприводимым Δ-невырожденным $*$-представлениям фактор-алгебр, связанных с подграфами типа A_k $(k \geq 1)$ обозначим через $\Sigma^{irr}_{\Gamma,A}$.

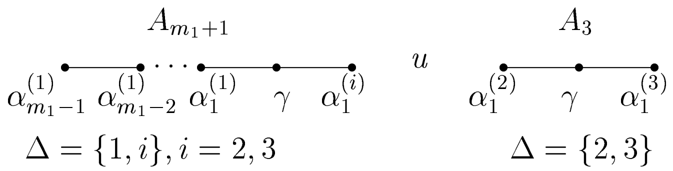
2.2. **Множества** Σ_{D_n} $(n \geq 4)$**.** Рассмотрим алгебру $\mathcal{P}_{D_n,\chi}$

D_n



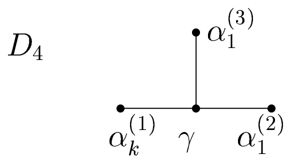
и опишем все её Δ-невырожденные неприводимые $*$-представления для всех $\Gamma' \subset D_n$ и $\Delta \subset \{1,2,3\}$.

Описание Δ-невырожденных $*$-представлений фактор-алгебр $\mathcal{P}_{D_n,\chi}$, ассоциированных с подграфами типа A_k см. в п. 2.1. Обозначим через $\sum_{A_{m_1+1}}^{\{1,2\},irr}$, $\sum_{A_{m_1+1}}^{\{1,3\},irr}$ и $\sum_{A_3}^{\{2,3\},irr}$ характеры, отвечающие всем Δ-невырожденным неприводимым $*$-представлениям фактор-алгебр



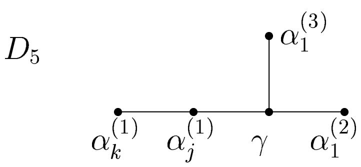
Тогда $\Sigma_{D_n,A}^{irr} = \Sigma_{A_{m_1+1}}^{\{1,2\},irr} \bigcup \Sigma_{A_{m_1+1}}^{\{1,3\},irr} \bigcup \Sigma_{A_3}^{\{2,3\},irr}$.

Так как неприводимые $*$-представления алгебры $\mathcal{P}_{D_n,\chi}$ не более чем двумерны, то её неприводимые невырожденные ($\Delta = \{1,2,3\}$) $*$-представления существуют только для фактор-алгебр $\mathcal{P}_{D_4,\chi_k'}$:



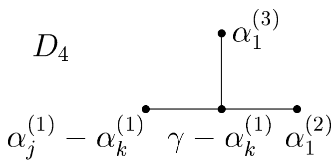
Множество $\Sigma_{D_4,k}^{n-d,irr}$ задается следующими условиями: $\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > \alpha_k^{(1)}$, $\alpha_k^{(1)} + \alpha_1^{(2)} > \alpha_1^{(3)}$, $\alpha_k^{(1)} + \alpha_1^{(3)} > \alpha_1^{(2)}$, $\alpha_k^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)} = 2\gamma$. В этом случае невырожденные неприводимые $*$-представления существуют только в обобщенной размерности $(2;1;1;1)$ (см. [8]).

Другие Δ-невырожденные $*$-представления алгебры $\mathcal{P}_{D_n,\chi}$ существуют только для подграфа D_5. Алгебра $\mathcal{P}_{D_5,\chi_{k,j}'}$



имеет Δ-невырожденные $*$-представления только при $\Delta = \{2,3\}$. В силу предложения 3, они находятся во взаимно однозначном соответствии с невырожденными $*$-представлениями алгебры $\mathcal{P}_{D_4,\chi_{k,j}''}$

D_4



Множество $\Sigma_{D_5,k,j}^{\{2,3\},irr}$ задается следующими условиями: $\alpha_j^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > \gamma$, $\alpha_k^{(1)} + \alpha_1^{(2)} > \alpha_j^{(1)} + \alpha_1^{(3)}$, $\alpha_k^{(1)} + \alpha_1^{(3)} > \alpha_j^{(1)} + \alpha_1^{(2)}$, $\alpha_k^{(1)} + \alpha_j^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)} = 2\gamma$ и существуют только в обобщенной размерности $(2;1;1;1)$.

Пусть характер $\chi = (\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_{m_1-1}^{(1)}; \alpha_1^{(2)}; \alpha_1^{(3)}; \gamma) \in \mathbb{R}_+^{m_1-1} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Имеет место следующая теорема.

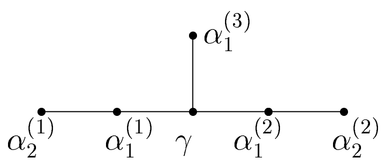
Теорема 2. *Характер $\chi \in \Sigma_{D_n}$, тогда и только тогда, когда*

$$\chi \in (\bigcup_k \Sigma_{D_4,k}^{n-d,irr}) \bigcup (\bigcup_{k,j} \Sigma_{D_5,k,j}^{\{2,3\},irr}) \bigcup \Sigma_{A_{m_1+1}}^{\{1,2\},irr} \bigcup \Sigma_{A_{m_1+1}}^{\{1,3\},irr} \bigcup \Sigma_{A_3}^{\{2,3\},irr} =$$
$$= (\bigcup_k \Sigma_{D_4,k}^{n-d,irr}) \bigcup (\bigcup_{k,j} \Sigma_{D_5,k,j}^{\{2,3\},irr}) \bigcup \Sigma_{D_n,A}^{irr}$$

Множество характеров на графе Γ, соответствующее всем неприводимым Δ-невырожденным $*$-представлениям фактор-алгебр, связанных с подграфами типа D_n $(n \geq 4)$ обозначим через $\Sigma_{\Gamma,D}^{irr}$.

2.3. **Множество Σ_{E_6}.** Рассмотрим алгебру $\mathcal{P}_{E_6,\chi}$

E_6

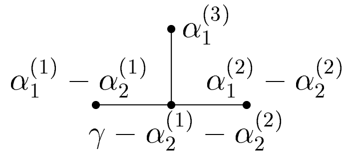


Множество $\Sigma_{E_6}^{n-d,irr} = \Sigma_{E_6}^{\{1,2,3\},irr}$ определяется следующими условиями(см. [8]):

1. В обобщенной размерности $(3;1;1;1;1;1)$: $\gamma > \alpha_1^{(1)}$, $\gamma > \alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} > \gamma$, $\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} > \gamma$, $\gamma > \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}$, $\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_1^{(3)} = 3\gamma$.
2. В обобщенной размерности $(3;1;1;1;1;2)$: $\alpha_1^{(3)} + \alpha_1^{(2)} > \gamma$, $\gamma > \alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(1)}$, $\gamma > \alpha_2^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(3)} > \gamma$, $\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > \gamma$, $\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_1^{(3)} = 3\gamma$.

Описание других Δ-невырожденных $*$-представлений алгебры $\mathcal{P}_{E_6,\chi}$ $(\Delta \neq \{1,2,3\})$ сводится к описанию невырожденных $*$-представлений алгебр, ассоциированных с графами типа D_k $(k = 4,5)$, A_j $(j = 3,4,5)$. Например, при $\Delta = \{3\}$ они находятся во взаимно однозначном соответствии с $*$-представлениями алгебры

D_4



Множество соответствующих характеров на E_6 обозначим через $\Sigma_{E_6}^{\{3\},irr}$. Оно определяется следующими условиями: $\alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)}$, $\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)} > \alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(2)}+\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(2)}+\alpha_1^{(3)} > \alpha_2^{(1)}+\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+\alpha_2^{(2)}+\alpha_1^{(3)} = 2\gamma$.

Все остальные Δ-невырожденные $*$-представления фактор-алгебр, связаны с подграфами типа D_k $(k \geq 4)$, A_j $(j \geq 1)$.

Пусть характер $\chi = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}; \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}; \alpha_1^{(3)}; \gamma) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Имеет место следующая теорема.

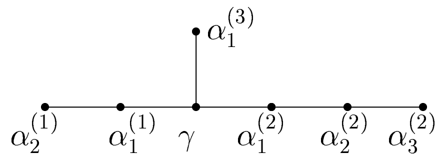
Теорема 3. *Характер $\chi \in \Sigma_{E_6}$, тогда и только тогда, когда*

$$\chi \in \bigcup_{\Delta \subset \{1,2,3\}} \Sigma_{E_6}^{\Delta,irr} \bigcup \Sigma_{E_6,D}^{irr} \bigcup \Sigma_{E_6,A}^{irr}.$$

Далее множество характеров на графе Γ, соответствующее всем неприводимым Δ-невырожденным $*$-представлениям фактор-алгебр, связанных с подграфами типа E_6 обозначим через $\Sigma_{\Gamma,E_6}^{irr}$.

2.4. **Множество Σ_{E_7}.** Рассмотрим алгебру $\mathcal{P}_{E_7,\chi}$

E_7

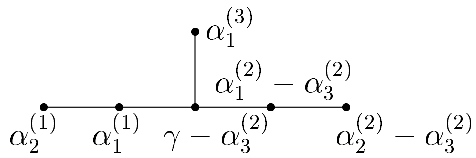


имеет три неприводимые невырожденные $*$-представления (см. [8]):

1. В размерности $(4;1;1;1;1;1;1)$: $\gamma > \alpha_3^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > \gamma$, $\alpha_2^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > \gamma$, $2\gamma > \alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $\gamma > \alpha_1^{(2)}, 2\gamma > \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} + 2\alpha_1^{(3)} = 4\gamma$.
2. В размерности $(4;1;2;1;1;1;2)$: $\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} > \gamma$, $2\gamma > \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $\gamma > \alpha_1^{(1)}+\alpha_3^{(2)}, 2\gamma > \alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(2)}+\alpha_3^{(2)}+\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(3)} > \gamma, \alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+\alpha_3^{(2)}+\alpha_1^{(3)} > 2\gamma$, $2\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} + \alpha_1^{(3)} = 4\gamma$.
3. В размерности $(4;2;1;1;1;1;2)$: $\gamma > \alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(2)}$, $\alpha_2^{(1)}+\alpha_3^{(2)}+\alpha_1^{(3)} > \gamma, \alpha_2^{(1)}+\alpha_1^{(2)} > \gamma$, $\alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > 2\gamma$, $\gamma > \alpha_2^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $2\gamma > \alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_3^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} + 2\alpha_1^{(3)} = 4\gamma$.

Описание других Δ-невырожденных $*$-представлений алгебры $\mathcal{P}_{E_7,\chi}$ $(\Delta \neq \{1,2,3\})$ сводится к описанию невырожденных $*$-представлений алгебр, ассоциированных с графами типа E_6, D_k $(k = 5,6)$, A_j $(j = 4,5,6)$. Например, множество $\Sigma_{E_6}^{\{1,3\}irr}$ определяется невырожденными неприводимыми $*$-представлениями алгебры

E_6



При этом

1. $\gamma > \alpha_1^{(1)} + \alpha_3^{(2)}$, $\gamma > \alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} > \gamma$, $\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} > \gamma$, $\gamma > \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}$, $\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} + \alpha_1^{(3)} = 3\gamma$. В этом случае представления существуют в обобщенной размерности $(3;1;1;1;1;1)$:
2. $\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > \gamma$, $\gamma > \alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $\gamma > \alpha_2^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $\alpha_1^{(1)} + \alpha_3^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > \gamma$, $\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > \gamma$, $\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} + 2\alpha_1^{(3)} = 3\gamma$. В этом случае представления существуют в обобщенной размерности $(3;1;1;1;1;2)$:

Все остальные Δ-невырожденные $*$-представления фактор-алгебр, связаны с подграфами типа E_6, D_k $(k \geq 4)$, и A_j $(j \geq 1)$.

Пусть характер $\chi = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}; \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}; \alpha_1^{(3)}; \gamma) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Имеет место следующая теорема.

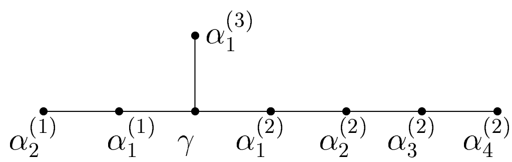
Теорема 4. *Характер $\chi \in \Sigma_{E_7}$, тогда и только тогда, когда*

$$\chi \in \bigcup_{\Delta \subset \{1,2,3\}} \Sigma_{E_7}^{\{1,3\},irr} \bigcup \Sigma_{E_7,E_6}^{irr} \bigcup \Sigma_{E_6,D}^{irr} \bigcup \Sigma_{E_7,A}^{irr}.$$

Далее множество характеров на графе Γ, соответствующее всем неприводимым Δ-невырожденным $*$-представлениям фактор-алгебр, связанных с подграфами типа E_7 обозначим через $\Sigma_{\Gamma,E_7}^{irr}$.

2.5. **Множество Σ_{E_8}.** Рассмотрим алгебру $\mathcal{P}_{E_8,\chi}$

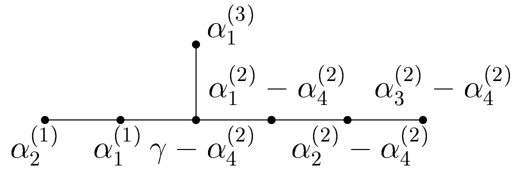
E_8



Множество характеров, для которых существуют неприводимые невырожденные $*$-представления алгебры $\mathcal{P}_{E_8,\chi}$, обозначим через $\Sigma_{E_8}^{n-d,irr} = \Sigma_{E_8}^{\{1,2,3\},irr}$. Описание одиннадцати типов таких $*$-представлений см. в [8].

Описание других Δ-невырожденных $*$-представлений алгебры $\mathcal{P}_{E_8,\chi}$ ($\Delta \neq \{1,2,3\}$) сводится к описанию невырожденных $*$-представлений алгебр, ассоциированных с графами типа E_7, D_k (k = 6, 7) или A_j (j = 5, 6, 7). Например, множество $\Sigma_{E_8}^{\{1,3\}irr}$ определяется невырожденными неприводимыми $*$-представлениями алгебры

E_7



При этом они существуют только:

1. В размерности $(4;1;1;1;1;1;2)$, когда выполняются условия: $\gamma > \alpha_3^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > \gamma$, $\alpha_2^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > \gamma$, $2\gamma > \alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_4^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $\gamma > \alpha_1^{(2)}$, $2\gamma > \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_4^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} + \alpha_4^{(2)} + 2\alpha_1^{(3)} = 4\gamma$.
2. В размерности $(4;1;2;1;1;1;2)$, когда выполняются условия: $\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} > \gamma$, $2\gamma > \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_4^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $\gamma > \alpha_1^{(1)} + \alpha_3^{(2)}$, $2\gamma > \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $\alpha_1^{(1)} + \alpha_4^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > \gamma$, $\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_3^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > 2\gamma$, $2\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} + \alpha_4^{(2)} + \alpha_1^{(3)} = 4\gamma$.
3. В размерности $(4;2;1;1;1;1;2)$, когда выполняются условия: $\gamma > \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}$, $\alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > \gamma$, $\alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_4^{(2)} > \gamma$, $\alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_1^{(3)} > 2\gamma$, $\gamma > \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)}$, $2\gamma > \alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_3^{(2)} + \alpha_1^{(3)}$, $\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} + \alpha_4^{(2)} + 2\alpha_1^{(3)} = 4\gamma$.

Все остальные Δ-невырожденные $*$-представления фактор-алгебр, связанные с подграфами типа $E_7, E_6, D_k (k \geq 4)$, и $A_j (j \geq 1)$.

Пусть характер $\chi = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}; \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}; \alpha_1^{(3)}; \gamma) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^4 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Характер $\chi \in \Sigma_{E_8}$, тогда и только тогда, когда*

$$\chi \in \bigcup_{\Delta \subset \{1,2,3\}} \Sigma_{E_7}^{\{1,3\},irr} \bigcup \Sigma_{E_8,E_7}^{irr} \bigcup \Sigma_{E_8,E_6}^{irr} \bigcup \Sigma_{E_8,D}^{irr} \bigcup \Sigma_{E_8,A}^{irr}.$$

Заключение

Для алгебр $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$, ассоциированных с графами Дынкина Γ, мы описали множество характеров $\Sigma_\Gamma = \{\, \chi \mid$ существует $*$-представление алгебры $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}\}$.

Список литературы

1. *D.Ewans, Y.Kawahigashi* Quantum symmetries on operator algebras // Oxford Univ. Press. New York. - 1998.
2. *A.A.Klyachko* Stable bundels, representation theory and Hermitian operators // Selecta Math. - 1998. - 4. - P. 419-445.
3. *W.Fulton* Eigenvalues, infactors, highest weights, and Schubert calculus // Bull. of the AMS. - 2000. - 37. no.3. - P. 209-249
4. *W.Crawlay-Boevey, M.Holland* Noncommutative deformations of Kleinian singularities // Duke Math. Journ. - 1998. - 92 (3). - P. 605-635.
5. *М.С.Власенко, А.С.Меллит, Ю.С.Самойленко* Об алгебрах, порожденных линейно связанными образующими с заданным спектром //Функциональный анализ и его приложения. - 2004. Т.38. - Вып.4.
6. *С.В.Попович, Ю.С.Самойленко* О гомоморфизмах алгебр, порожденных проекторами, и функторах Кокстера // Укр. Мат. Жур. - 2003. - Т.55. - №9. - С. 1224-1237.
7. *С.А.Кругляк, А.В.Ройтер* Локально-скалярные представления графов // Функциональный анализ и его приложения.- 2004. - Т.38. - Вып.3.
8. *S.A.Kruglyak, S.V.Popovich, Yu.S.Samoilenko* $*$-Representation of algebras assosiated with Dynkin graphs and Horn's problem // Ученые записки Таврич. Нац. Ун. им. В.И.Вернадского сер."Математика. Механика. Информатикаи кибернетика". - Т.16(55). - №2. - Р. 132-139.