УДК 62-50

ПОСТРОЕНИЕ И МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЕЙ

П.И. Бидюк, А.Н. Терентьев

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»,
кафедра математических методов системного анализа,
пр. Победы,37,корп. 35, Киев, Украина, 03056
e-mail: *peterb@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua*
paladin@astral.ntu-kpi.kiev.ua

Abstract

This analytical literature review discusses different methods under the general rubric of learning Bayesian networks from data. The basic concepts of Bayesian networks and their learning methods are introduced and reviewed. The methods are discussed for learning parameters of a probabilistic network, for laerning the structure, and for learning hidden variables. Basic definition and key concepts with appropriate illustrative examples are presented.

Введение

Байесовские сети (БС) представляют собой графические модели событий и процессов на основе объединения некоторых результатов теории вероятностей и теории графов. Они тесно связаны с диаграммами влияния, которые можно использовать для приятия решений. Несмотря на свое название, эти сети не обязательно подразумевают тесную связь с байесовскими методами. Название связано, прежде всего, с байесовским правилом вероятного вывода [1]. БС представляют собой удобный инструмент для описания достаточно сложных процессов и событий с неопределенностями. Они оказались особенно полезными при разработке и анализе машинных алгоритмов обучения. Основной идеей построения графической модели есть понятие модульности, то есть разложение сложной системы на простые элементы. Для объединения отдельных элементов в систему используются результаты теории вероятностей, которые обеспечивают модели состоятельность в целом, а также дают возможность, графические модели с базами данных. Такой граф-теоретический подход к построению графической модели обеспечивает исследователю возможность строить модели процессов с множеством сильно взаимодействующих переменных, а также создавать структуры данных для последующих разработки эффективных алгоритмов их обработки и принятия решений.

Формализм построения обобщенных графических моделей объединяет в себе много методов статистического моделирования, таких как факторный анализ, анализ

распределений, модели смесей распределений, скрытые марковские модели, фильтры Калмана, модели Айзинга и некоторые другие. Все указанные модели можно рассмотреть в рамках графических моделей байесовского типа как частные примеры общего формализма [2, 3, 4, 6]. Преимуществом такого подхода есть то, что методы исследования процессов и обработки данных, разработанные в одной области, могут быть успешно перенесены в другие.

Несмотря на то, что байесовским сетям уделяется много внимания в зарубежной литературе, принципы их построения, обучения и использования еще недостаточно освещены в отечественных публикациях, что существенно затрудняет их понимание и применение.

Постановка задачи. *Целью данной работы является исследование общих принципов построения байесовских сетей, анализ методов их обучения и возможностей применения; иллюстрация применения на некоторых примерах.*

1. Понятие Байесовской сети

Графические модели представляются собой графы, узлы которых соответствуют случайным переменным. Если узлы (переменные) не соединены дугами, то их считают условно независимыми. Ненаправленные графические модели называют также марковскими случайными полями (МСП). Для МСП независимость можно сформулировать следующим образом: два множества (узлов) A и B являются условно независимыми при наличии в модели третьего множества C, если все пути между узлами множеств A и B разделены узлами множества C.

Байесовская сеть (БС) доверия – это направленный ациклический граф. Байесовская сеть – это пара, в которой первый компонент G, является направленным нециклическим графом, соответствующий случайным переменным. С байесовскими сетями связано более сложное понятие независимости, которое учитывает направленность дуг. Граф записан как набор условий независимости: каждая переменная независима от ее родителей G. Вторая компонента пары, представляет собой набор параметров, который определяет сеть. Он содержит параметр $\Theta_{x_i|pa(X_i)} = P(x_i|pa(X_i))$ для каждого возможного значения x_i из X_i и $pa(X_i)$ из $Pa(X_i)$. $Pa(X_i)$ обозначает набор родителей X_i в G и $pa(X_i)$ - родителей. Если смотреть больше чем один граф, тогда мы используем $Pa^G(X_i)$ чтобы определить X_i родителей в графе G. Байесовская сеть B определяет распределение вероятности $D = \{x^1, \ldots, x^N\}$ по X, $P_B(X_1, \ldots, X_n) = \Pi_{i=1}^n P_B(X_i|Pa(X_i))$.

С математической точки зрения БС — это модель для представления вероятностных зависимостей, а также отсутствия этих зависимостей. При этом связь $A \to B$ является причиной, когда событие A является причиной возникновения B, влияет на значение, принятое B. БС называют причиной (каузальной), когда все ее связи

являются причинными. Есть и ряд следующих причин использования причинных моделей в искусственном интеллекте:

- как правило, человек интерпретирует события с точки зрения причина-следствие, что упрощает понимание причинных моделей пользователем;
- идентификация инвариантных причинных связей в конкретной задаче, позволяет спрогнозировать эффекты, возникающие вследствие случайных событий (случайных переменных), и эффекты, обусловленные предопределенными действиями (то есть, различными манипуляциями или интервенциями);
- причинность и вероятность тесно связаны между собой, потому что причинность обычно предусматривает существование вероятностных взаимозависимостей, обеспечивающих понимание причинности; фактически, необходимым условием существования причинности есть корреляция;
- аксиоматические свойства БС (d-разделение и марковость) соответствуют вероятностным зависимостям и случаям их отсутствия, возникающим в причинной области;
- существуют канонические вероятностные модели (зашумленные И, ИЛИ, МАКС и другие), которые базируются на интерпретации родителей узла как причин или условий для этого узла, а также на предположении независимости причинных взаимодействий; эти модели снижают число параметров сети, упрощают получение знаний и даже способствуют снижению вычислительных затрат [5];
- причинные БС поддерживают некоторые качественные аспекты приятия решений, которые можно идентифицировать с целью объяснения результатов вывода; некоторые из этих аспектов присущи определенным каноническим моделям, например, генерирование разъяснений — явление, типичное для зашумленного ИЛИ;
- наконец концепция разъяснения очень близка понятию причинности; фактически, одним из элементов разъяснения является выяснение причины зарегистрированных фактов.

Некоторые методы объяснения, используемые в БС, разработаны специально для причинных сетей или даже для конкретных канонических моделей, а другие методы являются общими в том смысле, что они не предполагают причинной интерпретации сети.

Самой распространенной задачей, которая решается с помощью байесовской сети, есть вероятностный вывод. Например, рассмотрим простую сеть, описывающую функционирование оросителя травы [5].

C	P(S=F)	P(S=T)
F	0,5	0,5
T	0,9	0,1

P(C=F)	P(C=T)
0,5	0,5

C	P(R=F)	P(R=T)
F	0,8	0,2
T	0,2	0,8

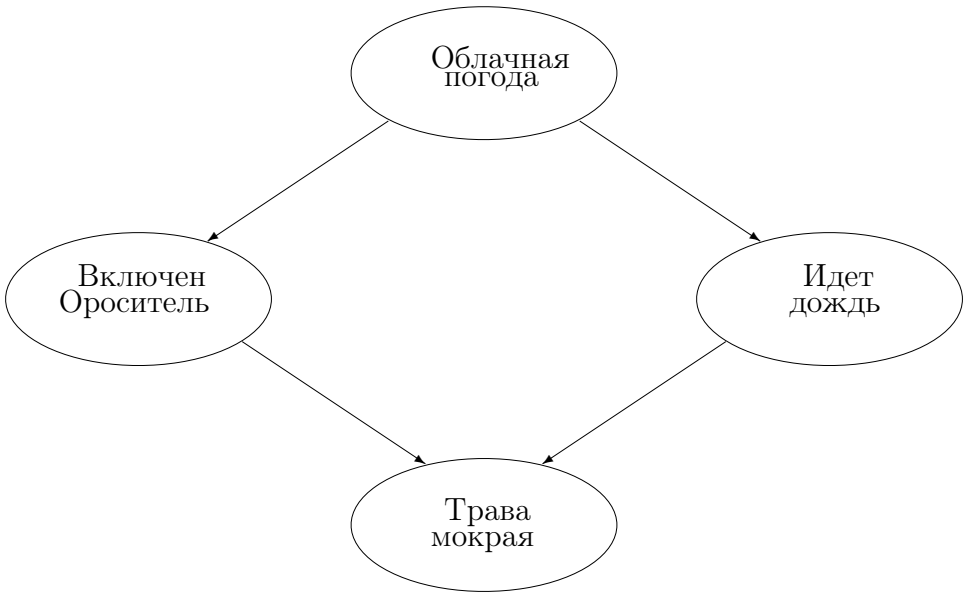


Рис. 1. Байесовская сеть «Дождевая установка»

S	R	P(W=F)	P(W=T)
F	F	1,0	0
T	F	0,1	0,9
F	T	0,1	0,9

Предположим, что в результате наблюдения мы получаем информацию, что трава мокрая. Такому состоянию травы есть две причины: идет дождь или включен ороситель. Какое из этих событий имеет более высокую вероятность? Для вычисления апостериорной вероятности каждого из событий можно воспользоваться правилом Байеса (введем обозначения: истина = 1; ложь = 0; W — трава мокрая; S — ороситель; R — дождь). Соответственно, $W = 1$ означает, что трава мокрая; $S = 1$ означает, что ороситель включен; $R = 1$ означает, что идет дождь. Используя правило Байеса, получим:

$$p(S = 1|W = 1) = \frac{p(S = 1, W = 1)}{p(W = 1)} = \frac{\sum_{c,r} p(C = c, S = 1, R = r, W = 1)}{p(W = 1)} =$$

$$= \frac{0,2781}{0,6471} = 0,4298,$$

$$p(R=1|W=1)=\frac{p(R=1,W=1)}{p(W=1)}=\frac{\sum_{c,s}p(C=c,S=s,R=1,W=1)}{p(W=1)}=$$
$$=\frac{0,4581}{0,6471}=0,7079,$$

где $P(W=1)=\sum\limits_{c,r,s}P(C=c,S=s,R=r,W=1)=0,6471.$

2. Последовательность построения Байесовской сети

1. Анализ процесса. Сбор данных и экспертных оценок.
2. Формирование базы данных
3. Генерация топологии сети (узлы и дуги).
4. Определение априорных вероятностей и оптимизация топологии сети.
5. Обучение сети.
6. Использование сети для классификации.
7. Представление результатов пользователю.

3. Типы Байесовских сетей

3.1. **Дискретные БС.** Дискретные БС — сети, у которых переменные узлы являются дискретными величинами. Дискретные БС обладают следующими свойствами:

- каждая вершина представляет собой собой событие, описываемое случайной величиной, которая может иметь несколько состояний;
- все вершины, связанные с «родительскими» определяются таблицей условных вероятностей или функцией условных вероятностей;
- для вершин без «родителей» вероятности ее состояний являются безусловными (маргинальными).

Другими словами, в байесовских сетях доверия вершины представляют собой случайные переменные, а дуги — вероятностные зависимости, которые определяются через таблицы условных вероятностей. Таблица условных вероятностей каждой вершины содержит вероятности состояний этой вершины при условии состояний ее «родителей» [12]. На рис.1 приведен пример дискретной БС.

3.2. **Динамические БС.** Динамические БС — сети, у которых значения узлов изменяется со временем. Динамические БС идеально подходят для моделирования временных процессов. Их преимущество в том, что они используют табличное представления условных вероятностей что облегчает представление различных нелинейных явлений [7]. Стоит заметить что термин «временная Баейсовская сеть»(temporal Bayesian network) лучше подходит чем «динамическая Байесовская сеть»(dynamic Bayesian network), так как предполагается, что структура модели не изменятся. Также обычно параметры модели не изменяются со временем, однако всегда можно добавить дополнительные скрытые узлы, чтобы описать текущее состояние [1].

Самый простой тип динамической БС — это скрытая модель Марковы (Hidden Markov Model), у которой в каждом слое есть один дискретный скрытый узел и один дискретный или непрерывный наблюдаемый узел. Иллюстрация модели ниже. Круглые вершины обозначают непрерывные узлы, квадратные обозначают дискретные. X — скрытые узлы, а Y — наблюдаемые. Для задания динамической БС, нужно определить начальное распределение $P(X(t))$, топологию внутри слоя $P(X(t+i)|X(t+i-1))$ и межслойную топологию (между двумя слоями) $P(Y(t)|X(t))$ [8].

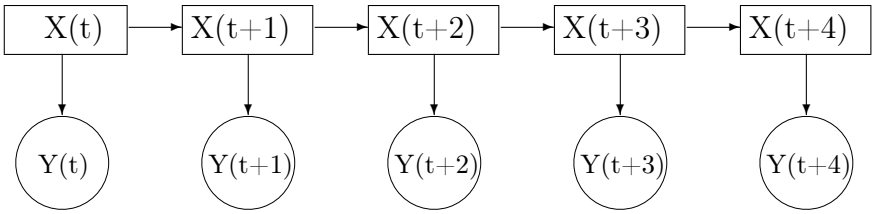


Рис. 2. Скрытая двухслойная модель Маркова, в которой X — скрытые дискретные узлы, а Y — дискретный или непрерывный наблюдаемые

Сети такого вида используют при распознавании речи. В этом случае узлы $Y(t), Y(t+1), Y(t+2), \ldots$ представляют собой фонемами при произношении слов, а узлы $X(t), X(t+1), X(t+2), \ldots$ — это буквы из которых состоит произносимое слово. Такая модель будет динамической в том смысле, что данная сеть будет представлять собой множество повторяющихся блоков в разные моменты времени [13].

3.3. **Непрерывные БС.** Непрерывные БС — переменные узлов сети являются непрерывными величинами. Во многих случаях события могут принимать любые состояния из некоторого диапазона. То есть переменная X будет являться непрерывной случайной величиной, пространством возможных состояния которой будет весь диапазон допустимых её значений $X = \{x|a \leqslant x \leqslant b\}$, содержащий бесконечное множество точек. При этом уже нельзя говорить о вероятности отдельного состояния, так как при бесконечно большом их числе вес каждого будет равен нулю. Поэтому распределение вероятности для непрерывной случайной величины определяются иначе, чем в дискретном случае и для их описания используются функции распределения вероятностей и плотности распределения вероятностей.

Непрерывные БС используются для моделирования стохастических процессов в пространстве состояний с непрерывным временем [11]. На рис. 3 приведён пример непрерывной БС, в данном случае используется распределение Гаусса. Пусть узел X имеет множество родителей $U = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ тогда условное распределение для X задается по формуле $f(X|U_i) = N(x; \mu_x + b_i \cdot \mu_i, \sigma_x)$, где коэффициент b_i показывает связь между X и его i-м родителем (его еще называют весовым коэффициентом) [9, 10]:

$$N(x; \mu_x + b_i \cdot \mu_i, \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \cdot exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(x - (\mu_x + b_i \cdot \mu_i)^2}{\sigma_x}\right),$$

где μ — математическое ожидание, σ — дисперсия, а коэффициент $\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma_x}}$ называется нормирующей константой, которая гарантирует что $\int\limits_x N(x;\mu_x + b_i \cdot x_i, \sigma_x) = 1$.

Связь между переменной X и её родителями $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ можно представить при помощи обычной регрессионной модели:

$$X = b_1 \cdot U_1 + b_2 \cdot U_2 + \ldots + b_n \cdot U_n + Q_x,$$

где Q_x — шумовая компонента, которая может быть записана в виде распределения Гаусса с нулевым математическим ожиданием, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ регрессионные коэффициенты, показывающие связь между переменной X и её предками $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

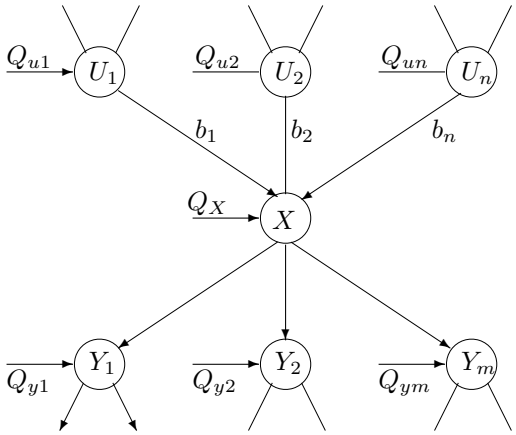


Рис. 3. Пример непрерывной БС. $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ — предки X, $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ — дочерние узлы переменной X, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — весовые коэффициенты, $Q_x, Q_{u1}, \ldots, Q_{un}, Q_{y1}, \ldots Q_{ym}$ — шумовые коэффициенты

3.4. **Гибридные БС.** Гибридные БС — сети, содержащие как узлы с дискретными переменными, так и с непрерывными. При использовании БС, содержащих как непрерывные, так и дискретные переменные существует ряд ограничений:

1. дискретные переменные не могут иметь непрерывных родителей;
2. непрерывные переменные должны иметь нормальный закон распределения, условный на значениях родителей;
3. распределение непрерывной переменной X с дискретными родителями Y и непрерывными родителями Z является нормальным распределением $P(X|Y = y, Z = z) = N\left(\mu_x(\mu_y, \mu_z), \sqrt{\sigma_x(\sqrt{\sigma}_y)}\right)$, где μ_x, μ_y, μ_z — математические ожидания, σ_x, σ_y — дисперсии, $\sqrt{\sigma}_x, \sqrt{\sigma}_y$ — среднеквадратические отклонения. μ_x линейно зависит от непрерывных родителей, σ_x вообще не зависит от непрерывных родителей. Однако, оба они (μ_x и σ_x) зависят от дискретных родителей. Это ограничение гарантирует возможность точного вывода.

В качестве примера рассмотрим гибридную БС, показанную на рис. 4, которая позволяет оценивать суммарные производственные затраты в зависимости от использования и загрузки трёх групп оборудования (например, трех станков) [12].

Известно, что в состав суммарных производственных затрат (без учёта зарплаты и начислений) входят:

- прямые производственные зарплаты на каждую группу оборудования за исследуемый календарный период, которые зависят как от количества используемых групп оборудования, так и от времени работы каждого из групп в течении исследуемого периода времени, т.е. от степени загрузки каждой из групп;
- расходы на амортизацию каждой из групп оборудования, зависящие как от её балансовой стоимости, так и установленных норм амортизации;
- арендная плата за участок при каждой из групп оборудования, используемый для складирования сырья и продукции, которая зависит как от площади участка, так и от ставок арендной платы.

Вершина «Загрузка оборудования» соответствует дискретному событию, которое характеризуется тремя возможными состояниями. Вероятность пребывания в каждом из них определяется степенью загрузки каждой из групп оборудования, при условии, что суммарная загрузка всего оборудования равна единице. Будем считать, что все группы оборудования загружены равномерно. На самом деле возможны и любые другие исходные распределения вероятностей, учитывающие различные варианты загрузки оборудования.

Пусть ставка аренды 1 га за земли в среднем составляет 2500 у.е. и колеблется в пределах $\pm 10\%$, то есть принимает значения 2500 ± 250 у.е. Следовательно этой вершине соответствуют параметры $\mu = 2500$ и $\sigma = 62500 = (250)^2$. А норма амортизации может находиться в пределах $5 - 10\%$ от балансовой стоимости, то есть принимать значения $7,5 \pm 2,5\%$ (или $0,075 \pm 0,025$ относительно единицы). То есть этой вершине соответствуют параметры $\mu = 0,075$ и $\sigma = 0,000625 = (0,025)^2$.

Что касается вершины «Производственные затраты», то она характеризуется случайной переменной, условно нормальной на значениях родителей (то есть на значениях трех других вершин нашего примера). Следует отметить, что в общем случае распределение вероятностей для вершин, аналогичных «Производственные затраты» является не просто нормальным, а смешанным нормальным распределением. То есть представляет собой весовую сумму распределений, для каждого из которых должен быть задан список его параметров:

1. Математические ожидания и дисперсии для распределений, описывающих степень влияния дискретных родителей;
2. Весовые коэффициенты, учитывающие степень влияния на математическое ожидание непрерывных родителей.

Предположим, что в нашем примере выполняются условия:

1. балансовая стоимость каждой из пилорам составляет 50000,40000 и 30000 у.е.;
2. площадь арендуемых участков, закрепляемая за ними равна 0,6; 0,5 и 0,4 га;
3. а оценка прямых затрат на поддержание нормальной работы каждой из пилорам в среднем составляет 3000, 3200 и 3500 у.е. и получена с 5% точностью.

То есть, степень влияния родительских вершин на «Производственные затраты» можно представить в виде таблицы 1.

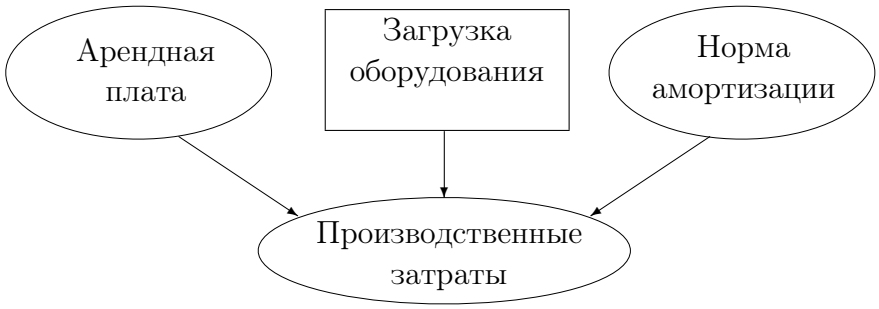
Таблица 1. Параметры, определяющие распределение вероятностей для вершины «Производственные затраты»

Загрузка оборудования	Станок 1	Станок 2	Станок 3
μ	3000	3200	3500
σ	22 500=150*150	25 600=160*160	30 625=175*175
Норма амортизации	50 000	40 000	30 000
Ставка аренды	0,6	0,5	0,4

P(Загрузка оборудования) = Станок 1	0,333
P(Загрузка оборудования) = Станок 2	0,333
P(Загрузка оборудования) = Станок 3	0,333

	Арендная плата
μ	2500
σ	62 500 = 250*250

	Норма амортизации
μ	0,075
σ	0,000625 = 0,025*0,025



	Производственные затраты
μ	7483,33
σ	1459505,06 = 1208,1*1208,1

Рис. 4. Пример гибридной БС с непрерывными и дискретными событиями. Квадратные вершины соответствуют дискретным событиям, а овальные — непрерывным событиям (гауссовским переменным)

Логический вывод в таких БСД заключается в распространении вероятностей и параметров гауссовых законов распределения по всей сети в зависимости от полученных свидетельств. В основе процесса логического вывода лежат довольно сложные математические алгоритмы, которые мы рассмотрим на простейшей двухуровневой сети для случая прямого распространения распределения вероятностей.

Пусть независимые дискретные случайные величины $X_1, \ldots, X_s$ и непрерывные случайные величины $Z_1, \ldots, Z_r$ оказывают влияние на результирующую случайную величину Y, как показано на рис. 5.

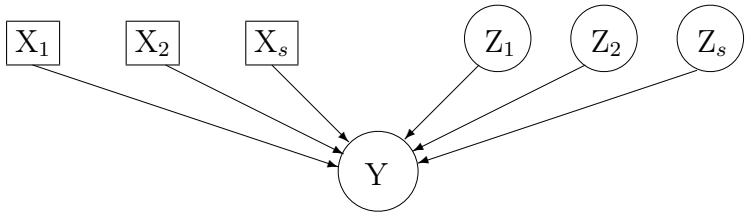


Рис. 5. Пример двухслойной гибридной БС с непрерывными и дискретными переменными. Квадратные вершины соответствуют дискретным событиям, а овальные — непрерывным событиям

Каждая из дискретных случайных величин $X_j (j = 1, \ldots, s)$ обладает своими исходами значения $X_i (i = 1, \ldots, n_j)$ с вероятностями P_{ij}, для которых $\sum\limits_{i=1}^{n_j} P_{ij} = 1$. Совместное влияние дискретных случайных величин на Y характеризуется математическим ожиданием $\mu_{i1}, \ldots, \mu_{is}$ и дисперсиями $\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{is}$. Каждая из непрерывных случайных величин Z_l имеет непрерывное нормальное распределение с параметрами (μ_l, σ_l), где $l = 1, \ldots, r$. Совместное влияние непрерывной случайной величины Z_l и исходов дискретных величин на результирующую случайную величину Y характеризуется весовыми коэффициентами $k_{l,i1,\ldots,is}$ для $l = 1, \ldots, r$.

Тогда характеристики результирующей величины Y могут быть вычислены по следующим выражениям:

$$\mu = \sum_{i1}^{n1} \ldots \sum_{is}^{ns} p_{1,\ i1} \ldots p_{s,\ is} \left(\mu_{i1,\ldots,\ is} + \sum_{l=1}^{r} K_{l,\ i1,\ldots,\ is} \cdot \mu_l \right),$$

$$\sigma = \sum_{i1}^{n1} \ldots \sum_{is}^{ns} p_{1,\ i1} \ldots p_{s,\ is} \cdot \left(\left(\mu_{i1,\ldots,\ is} + \sum_{l=1}^{r} K_{l,\ i1,\ldots,\ is} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \sigma_{i1,\ldots,\ is} + \sum_{l=1}^{r} K^2_{l,\ i1,\ldots,\ is} \cdot \sigma_l \right) - \mu^2.$$

Применительно к нашему примеру, содержащему две исходные непрерывные ($r = 2$) переменные и одну дискретную ($s = 1$) переменную, имеющую три исхода ($n1 = 3$), числовые характеристики случайной переменной «Производственные

затраты» будут равны:

$$\mu = \sum_{i=1}^{3} p_i \left(\mu_i + \sum_{i=1}^{2} k_{li} \cdot \mu i \right) = 0,333 \cdot (3000 + 50000 \cdot 0,075 + 0,6 \cdot 2500) +$$

$$+0,333 \cdot (3200 + 40000 \cdot 0,075 + 0,5 \cdot 2500) + 0,333 \cdot (3500 + 30000 \cdot 0,075 +$$

$$+0,4 \cdot 2500) = 0,333 \cdot (8250 + 7450 + 6750) = 7483,33;$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{3} p_i \left(\left(\mu_i + \sum_{l=1}^{2} k_{li} \cdot \mu_l \right)^2 + \sigma_i + \sum_{l=1}^{r} k_{li}^2 \cdot \sigma_l \right) - \mu^2 = 1459505,6;$$

$$\sqrt{\sigma} = 1208,1.$$

4. Обучение сети

Для описания Байесовской сети необходимо определить топологию графа и параметра каждого узла. Эту информацию мы можем получить из обучаемых данных, но получение правильной топологии сети является более сложной задачей, чем получение параметров узлов [14, 15, 16, 17]. Особого подхода требует случай, когда некоторые из узлов скрыты, или мы имеем дело с некорректными или недостаточными данными. Поэтому существует 4 случая, которые приведены в таблице 2.

Таблица 2. Четыре случая обучения сети

Структура	Наблюдение	Метод
Известна	Полное	Максимальная оценка правдоподобия
Известна	Частичное	Максимизация математического ожидания или жадный метод поиска экстремума
Неизвестна	Полное	Поиск в пространстве моделей
Неизвестна	Частичное	Структурный алгоритм максимизации математического ожидания или сжатия границ

4.1. **Известная структура, полная наблюдаемость.** В этом случае вычисляются значения параметров каждого условного вероятностного распределения, которые максимизируют правдоподобность обучающих данных. Нормализованое логарифмическое уравнение правдоподобия имеет вид:

$$L = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{s} \log(P(X_i | Pa(X_i), D_l)),$$

где $Pa(X_i)$ обозначает набор родителей X_i, D — обучающее множество, а D_l — это l–й элемент обучающего множества, N — количество событий в обучающем множестве.

Для дискретного случая показанного на рис. 1, оценка узла W вычисляется следующим образом. Пусть у нас есть данные для обучения, то есть информации о том сколько раз трава влажная, а причиной этого было то что шел дождь и был включен

разбрызгиватель был включен $N(W = 1,\ S = 0,\ R = 1)$ и так далее. Используя эти данные максимальная оценка правдоподобия узла W вычисляется как:

$$P(W = w|S = s,\ R = r) = \frac{N(W{=}w,\ S{=}s,\ R{=}r)}{N(S{=}s,\ R{=}r)} =$$

$$= \frac{N(W{=}w,\ S{=}s,\ R{=}r)}{N(W{=}0,\ S{=}s,\ R{=}r){+}N(W{=}1,\ S{=}s,\ R{=}r)}$$

Если вершины описаны функцией Гаусса, то можно посчитать выборочное среднее значение и дисперсию, а затем при помощи линейной регрессии посчитать матрицу весов. Для других видов распределений, используется более сложные процедуры.

4.2. **Известная структура, частичная наблюдаемость.** Когда некоторые из узлов скрыты, то можно применить алгоритм максимизации математического ожидания (ММО), для нахождения локальной оптимальной оценки максимального правдоподобия (ОМП) параметров. Основная идея алгоритма ММО состоит в том, что если бы мы знали значения всех узлов, обучение (на шаге М) было бы простым, поскольку знакомы с предыдущими. Так на шаге Е, мы вычисляем ожидаемые значения узлов, использующих алгоритм вывода, и затем используем эти значения как если бы они были получены из наблюдений.

Для узла из примера приведенного на рис. 1, выполняется замена наблюдаемого события ожидаемым количеством выполнения события:

$$P(W = w|S = s,\ R = r) = \frac{EN(W = w,\ S = s,\ R = r)}{EN(S = s,\ R = r)},$$

где $EN(x)$ — ожидаемое количество выпадения события x в период обучения, при этом учитывается текущая оценка параметров. Параметр $EN(x)$ можно считать по формуле:

$$EN(x) = E\sum_k I(x|D(k)) = \sum_k P(x|D(k)),$$

где $I(x|D(k))$ — функция индикатор, которая принимает значение 1, если в обучающем процессе $D(k)$ происходит событие x, в противном случае функция принимает значение 0.

Учитывая ожидаемое количество выполнения события, мы максимизируем параметры, а затем проворно вычисляем ожидаемое количество выполнения события и так далее. Этот итеративный метод сходится к локальному максимуму значения вероятности.

4.3. **Неизвестная структура, полная наблюдаемость.** Наиболее вероятной моделью в данном случае является полный граф, потому что в этом случае будет задействовано наибольшее количество параметров, следовательно такая модель будет больше всего соответствовать данным.

Формула Байеса имеет вид:

$$P(G|D) = \frac{P(D|G) \cdot P(G)}{P(D),}$$

где G — направленный нециклический граф, соответствующий случайным переменным, а $D = x^1, \ldots, x^N$ множество данных, прологарифмируем ее:

$$\log(P(G|D)) = \log(P(D|G)) + \log(P(G)) + (-\log(P(D))).$$

В полученном выражении слагаемое $-\log(P(D))$ играет роль штрафующей компоненты за чрезмерно сложные модели. Слагаемое $P(D|G)$ также может выступать в качестве штрафующей компоненты за чрезмерно сложные модели (этот случай известен как бритва Оккама, более подробно об этом в [18]).

Для выполнения точных расчетов связанных с выбором модели требуется вычислить $P(D) = \sum\limits_{G} P(D, G)$, что является задачей экспоненциальной сложности. Вместо этого можно использовать БИК (Байесовский информационный критерий), который определяется как:

$$\log(P(G|D)) \approx \log(P(D|G, \hat{\theta}_G)) - \frac{\log(N)}{2} \cdot \dim(G),$$

где N — количество моделей, $\dim(G)$ — размер модели, $\hat{\theta}_G)$ — максимально правдоподобная оценка параметров, слагаемое $-\frac{\log(N)}{2} \cdot \dim(G)$ играет роль штрафующей компоненты за чрезмерно сложные модели [16].

Следующим шагом после выбора структуры является обучение структуры, так чтобы направленный нециклический граф лучше всего удовлетворял данным. Эта задача является НП-трудной, то есть задачей с нелинейной полиномиальной оценкой числа итераций. Поэтому обычно используют локальные алгоритмы поиска (например жадный алгоритм метода поиска экстремума (greedy hill climbing method)) или метод ветвей и границ,для описка в пространстве графов.

Так же для построения байесовской сети по записям из базы данных можно использовать алгоритм K2, где D — база вариантов; Z — множество переменных соответствующих D; B_{si}, B_{sj} — две структуры БС, содержащие переменные из Z. Просчитав попарно, соотношения вида

$$\frac{P(B_{si}|D)}{P(B_{sj}|D)} = \frac{\frac{P(B_{si},D)}{P(D)}}{\frac{P(B_{sj},DD)}{P(D)}} = \frac{P(B_{si}, D)}{P(B_{sj}, D)},$$

между всеми структурами байесовской сети, можно ранжировать структуры относительно их апостериорных (позднейших) вероятностей. Для обучения сети используют следующую функцию:

$$g(i,\ \pi_i) = \prod_{j=1}^{q_i} \frac{(r_i - 1)!}{(N_{ij} + r_i - 1)!} \prod_{k=1}^{r_i} N_{ijk}!,$$

где r_i — номер состояния x_i в Z, т.е. x_i имеет r_i возможных значений $(v_{i1}, \ldots, v_{ir_i})$, а N_{ijk} связывает множество предков π_i для x_i с множеством данных D. При этом предок формально определяется как $pred(x_i) = \{x_1, \ldots, x_{i-1}\}$. Алгоритм возвращает множество вершин, предшествующих вершине x_i, в соответствии с расположением вершин. Входными данными являются множество вершин, расположение вершин, ограничение на количество предков для вершины (обозначим как u) и база данных содержащая m случаев. На выходе получаем множество предков для каждой из вершин [21].

4.4. **Неизвестная структура, частичная наблюдаемость.** Это самый сложный случай, когда структура неизвестна и есть скрытые переменные и некорректные данные. В этом случае используют структурный алгоритм максимизации математического ожидания (СММО) [20] или алгоритм сжатия границ (Bound and Collapse) [19].

Алгоритм СММО соединяет в себе стандартный алгоритм ММО, который оптимизирует параметры, со структурным поиском модели отбора. Этот алгоритм обучает сети, основываясь на штрафных вероятностных значениях, которые включают значения, полученные с помощью байесовского информационного критерия, принципа минимальной длины описания, а также значения других критериев.

Метод сжатия границ (СГ) моделирует отсутствие данных, предполагая что вероятность отсутствия данных находится в интервале от 0 до 1. То есть производиться вычисление этого интервала отсутствия данных, по имеющейся информации. После этого производится сжатие границ интервала в точку посредством использования выпуклой комбинации точек экстремумов, основываясь на информации о неполных данных.

Заключение

Байесовские сети – перспективный подход к моделированию процессов с неопределенностями различной природы. Они могут быть использованы как для моделирования статических, так и динамических процессов. *В данной работе было дано формальное определение понятия байесовских сетей, приведены типы байесовских сетей, а также рассмотрена задача обучения байесовской сети. Для каждого типа байесовской сети приведены практические примеры использования. Даны краткие описания методов, используемых при обучении байесовской сети в различных ситуациях.* В дальнейшем предполагается применение БС для решения конкретных задач с использованием оригинальных методов обучения и вывода.

Список литературы

1. *Murphy K.* A Brief introduction to graphical models and Bayesian networks. – 2001. –19p. http://www.cs.Berkeley.edu
2. *Pearl J. Causality.* – Cambridge: Cambridge University, 2000. – 384 p.

3. *Druzdzel M.J., Gaag L.C.* Building probabilistic networks: where do the numbers come from? //IEEE Transactions on Knkwledge and Data Engineering. – 2000. – Vol.12,No.4. – P.481-486
4. *Heckerman D., Breeze J.S.* Causal independence for probability assessment and indeference using Bayesian networks / Technical report MSR-TR-94-08. – Microsoft Research, Redmond, WA (USA). – 1995.–14 p.
5. *Lauritzen S.L., Spiegelhalter D.J.* «Local computetions with probabilities on graphical structures and their application to expert systems» in Journal Royal Statistics Society B. – 1988, 50(2). - P.157-194
6. *Buntine V.L.* Learning with Bayesian Models / Report 94-04-13, NASA Ames Research Center. – 1998.–78p.
7. *Zweig G.G.* Speech Recognition with Dynamic Bayesian networks / University of California, Berkeley. – 1994.–169 p.
http://www.cse.msu.edu
8. *Haipeng Guo* Dynamic Bayesian Networks. – 2002. – 21 p.
http://www.kddresearch.org
9. *Hautaniemi S.K.* Target Identification With Bayesian Networks. Master of Science thesis. – 2000. – 99 p.
http://www.cs.tut.fi/samba/Publications
10. *Hautaniemi S.K., Petri T. Korpisaari and Jukka P.P. Saarinen.* Target Identification With Dynamic Hybrid Bayesian Networks. – 2000. – 11 p.
11. *Nodelman U., Christian R. Shelton, and Daphne Koller.* Learning Continuous Time Bayesian Networks. // Proceedings of the Nineteenth International Conference on Uncetainty in Artificial Intelligence. – 2003. – 451-458p.
12. *Хабаров С.П.* Экспертные системы. Конспект лекций. – 2001. – 7 стр.
http://firm.trade.spb.ru/serp
13. *Buntine W.L.* A Guide to the Literature on Probabilistic Networka from Data. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. – 1996. – Vol. 8, issue 2, April. – P.195-210
14. *Heckerman D.* A tutorial on learning with Bayesian netwoks / Technical report MSR -TR-95-06. – Microsoft Research, Redmond, WA (USA). – 1995.– 57p.
15. *Ferat S.* A Baesian Network Approach to the Self-organization and Laerning in Intellident Agents / Dissertation submitted ti the Faculty of Virginia Politechnic and State University in fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Electrical and Computer Engineering, 2000 – 251 p.
16. *Murphy K.P.* An introduction to graphical model. – 2001 – 19 p.
http://www.ai.mit.edu
17. *Murphy K. and Mian S.* Midelling Cene Expression Data using Dynamic Bayesian Networks. Technical report, Berkeley, CA. – 1999 – 12 p.
http://citeseer.ist.psu.edu
18. *MacKay D.J.C.* Probable networks and plausible preduction – a review of practical Bayesian methods for supervised neural networks. Jornal «Network Computation in Neural Systems». – 1995. – №6. – P. 469-505.
19. *Sebastiani P. and Ramoni M.* «Bayesian inference with missing data using bound and collapse». Technical Report KMi-TR-58. – 1997 – 21 p.
http://chip.tch.harvard.edu
20. *Friedman N.* The Baesian Structural EM Algorithm. Fourteenth conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI). – 1998 – 10 p.

http://www.cs.hiji.ac.il
21. *Guo H.* Learning Bayes Networks from Data. – 2000. –17.
http://www.kddresearch.org