УДК 517.432

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В АЛГЕБРАХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ НАД ГИЛЬБЕРТОВЫМИ КВАТЕРНИОННЫМИ БИМОДУЛЯМИ

И.И. Карпенко

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
факультет математики и информатики,
пр-т Вернадского, 4, г.Симферополь, Крым, Украина, 95007
E-mail:*i_karpenko@inbox.ru*

Abstract

This paper is devoted to study of representations of real algebras of linear and complex linear operators on Hilbert quaternionic bimodules, defined by a finite number of generators satisfying certain quadratic relations. It's used technique of the representation theory of complex *-algebras for study of such representations.

Введение

Анализ последних достижений и публикаций свидетельствует об эффективности и целесообразности применения теории линейных операторов, действующих в пространствах над некоммутативными полями, в теории представлений, в нерелятивистской и релятивистской динамике, теории поля и других вопросах квантовой механики [1, 2, 3]. Так, в ряде работ отмечается потребность в простейшей форме записи матрицы линейного оператора. Эта задача тесно связана с описанием неприводимых пар линейных операторов, удовлетворяющих некоторым определяющим соотношениям. В теории линейных операторов над комплексными гильбертовыми пространствами методика решения таких задач наиболее полно представлена в работе [4].

Целью настоящей работы является исследование возможности использования техники комплексных *-алгебр для изучения неприводимых представлений вещественных алгебр линейных и комплексно линейных операторов над конечномерными гильбертовыми кватернионными бимодулями, образующие которых удовлетворяют определенным квадратичным соотношениям.

Пусть $\mathbb{H} = \{q = a_0+a_1i+a_2j+a_3k \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$ есть тело кватернионов, H — гильбертов бимодуль над $\mathbb{H}$ с правым скалярным произведением $\langle x, y\rangle$.

Гильбертов бимодуль H можно рассматривать как правый бимодуль над полем комплексных чисел (или *комплексное векторное пространство),* обозначая его в этом случае $H^{\mathbb{C}}$. Пространство $H^{\mathbb{C}}$ также будет гильбертовым относительно согласованного скалярного произведения $(x, y) := \mathrm{Com}\langle x, y\rangle$, где $\mathrm{Com}\, q = a_0 + a_1 i$.

Оператор A, действующий в гильбертовом бимодуле H, назовем *линейным,* если $A(xq+yp) = (Ax)q+(Ay)p$ для любых $p, q \in \mathbb{H}$ и любых векторов $x, y \in H$. Если указанное равенство выполняется только для комплексных чисел p, q, то такой оператор A будем называть *комплексно линейным.*

Множество ограниченных линейных операторов в H будем рассматривать как вещественную алгебру $L[H]$. Множество ограниченных комплексно линейных операторов в пространстве $H^{\mathbb{C}}$ также образует алгебру над полем $\mathbb{C}$. Обозначим эту алгебру $L[H^{\mathbb{C}}]$ и заметим, что имеет место строгое теоретико-множественное включение $L[H] \subset L[H^{\mathbb{C}}]$.

Оператор $A \in L[H]$ можно рассматривать также как комплексно линейный оператор, действующий в $H^{\mathbb{C}}$. В том случае, когда нам будет необходимо подчеркнуть именно этот факт, мы будем обозначать данный оператор A^s и называть *симплектическим образом* оператора A.

Кватернион q называется *(правым) собственным значением* линейного оператора A, если существует ненулевой вектор $x \in H$ такой, что $Ax = xq$. Вектор x называют (правым) собственным вектором оператора A. Нетрудно заметить, что множество собственных векторов, соответствующих данному собственному значению, и нуль-вектор образуют, вообще говоря, вещественный правый модуль. И только в случае вещественного собственного значения мы можем говорить о собственном подпространстве как правом модуле над $\mathbb{H}$. Множество собственных значений оператора A обозначим $\sigma_p(A)$.

Обозначим через $K(q) = \{uq\bar{u} \mid u \in \mathbb{H}, |u| = 1\}$ класс сопряженных к q элементов в мультипликативной группе $\mathbb{H}^*$. Если q – собственное значение линейного оператора A, то и весь класс $K(q)$ состоит из собственных значений оператора A.

Заметим, что всякий класс $K(q)$ обязательно содержит $\lambda \in \mathbb{C}$, причем, условие $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ определяет такое λ единственным образом. Если $Ax = x\lambda$, то $A^s x = x\lambda$, и, следовательно, $\lambda \in \sigma_p(A^s)$.

Верно и обратное: если $\lambda \in \sigma_p(A^s)$, то $K(\lambda) \subset \sigma_p(A)$. Следовательно, существует взаимно-однозначное соответствие между собственными значениями с неотрицательной мнимой частью оператора A^s и классами сопряженности из множества собственных значений оператора A.

1. Классификация вещественных алгебр, порожденных парой линейных операторов с полиномиальным соотношением.

Соотношения между операторами A и A^* определяют различные классы операторов в алгебре $L[H]$,в частности, классы сомосопряженных и кососамосопряженных операторов. Заметим, что в кватернионных пространствах нельзя говорить о линейном однородном соответствии между операторами из этих классов, и потому они качественно различны.

Пусть $A \in L[H]$. Тогда оператор A допускает разложение вида:

$$A = A_1 + A_2, \tag{1}$$

где $A_1^* = A_1, A_2^* = -A_2$. Для обоснования этого утверждения достаточно положить $A_1 = 1/2(A + A^*), A_2 = 1/2(A - A^*)$.

Соотношения между операторами A, A^* порождают определенные соотношения между операторами A_1, A_2, и наоборот. Можно утверждать, что всякое полиномиальное соотношение для операторов A, A^* сводится соответствующей заменой к полиномиальному соотношению той же степени относительно операторов A_1, A_2.

Пусть $P_2(x_1, x_2)$ — многочлен от двух некоммутативных переменных с вещественными коэффициентами, $P(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2x_1 + dx_2^2 + ex_1 + fx_2 + g$, где $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R};\ A \in L[H]$. Тогда

$$P(A, A^*) = aA^2 + bAA^* + cA^*A + d(A^*)^2 + eA + fA^* + gI.$$

Проведя с учетом разложения (1) замену $A = A_1 + A_2, \quad A^* = A_1 - A_2$, имеем

$$\begin{gathered} P_2(A_1, A_2) = \alpha A_1^2 + \beta[A_1, A_2] + \gamma\{A_1, A_2\} + \delta A_2^2 + \varepsilon A_1 + \zeta A_2 + \eta I = 0, \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь операторы $A_1^2, [A_1, A_2], A_2^2, A_1, I$ являются самосопряженными, а операторы $\{A_1, A_2\}, A_2$ — кососамосопряженными. Поэтому, с учетом вещественности коэффициентов, уравнение (2) распадается на два уравнения:

$$\begin{gathered} \alpha A_1^2 + \beta[A_1, A_2] + \delta A_2^2 + \varepsilon A_1 + \eta I = 0, \\ \gamma\{A_1, A_2\} + \zeta A_2 = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Сформулируем достаточно очевидное утверждение.

Предложение 1. Если $A_1^* = A_1, \quad A_2^* = -A_2$, то для любых вещественных чисел α, β операторы $\alpha A_1 + \beta I, \quad \alpha A_2$ также являются самосопряженными и кососамосопряженными соответственно.

В условиях предложения 1 назовем преобразования $\tilde{A}_1 = \alpha A_1 + \beta I, \quad \tilde{A}_2 = \alpha A_2$ *допустимыми аффинными преобразованиями* переменных.

Теорема 1. *При использовании допустимых аффинных преобразованиях переменных уравнения* (3) *приводятся к одному из видов, представленных таблицей 1.*

Полученная теорема позволяет провести классификацию вещественных операторных алгебр вида:

$$\mathbb{R}\langle A_1, A_2 | A_1, A_2 \in L_q[H], A_1^* = A_1, A_2^* = -A_2, P_2(A_1, A_2) = 0\rangle,$$

которые можно рассматривать как кватернионное представление вещественной алгебры, порожденной двумя элементами, удовлетворяющими следующим тождествам: $a_1^* = a_1, a_2^* = -a_2, P_2(a_1, a_2) = 0$.

Таблица 1

$(0_0)0=0$	$(0_1)\eta I=0, \eta\neq 0$	$(0_2)A_1=0$ $(0_2')A_2=0$
$(I_0)A_1^2=0$ $(I_0')A_2^2=0$	$(I_1)A_1^2=I; (I_1'')A_2^2=I$ $(I_1')A_1^2=-I; (I_1''')A_2^2=-I$	$(I_2)A_2^2=A_1$
$(II_0)A_1^2+A_2^2=0$	$(II_1)A_1^2+A_2^2=I,$ $(II_1')A_1^2+A_2^2=-I$	
$(III_0)A_1^2-A_2^2=0$	$(III_1)A_1^2-A_2^2=I,$ $(III_1')A_1^2-A_2^2=-I$	
$(IV_0)[A_1,A_2]=0$	$(IV_1)[A_1,A_2]=I$	$(IV_2)[A_1,A_2]=A_1$
$(V_0)[A_1,A_2]=A_1^2$ $(V_0')[A_1,A_2]=A_2^2$	$(V_1)[A_,A_2]=A_1^2+I,$ $(V_1')[A_1,A_2]=A_1^2-I,$ $(V_1'')[A_1,A_2]=A_2^2+I,$ $(V_1''')[A_1,A_2]=A_2^2-I.$	$(V_2)[A_1,A_2]=q(A_1+A_2^2),$ $q\neq 0$
$(VI_0)[A_1,A_2]=q(A_1^2+A_2^2),$ $q>0$	$(VI_1)[A_1,A_2]=q(A_1^2+A_2^2)+I,$ $q\neq 0$	
$(VII_0)[A_1,A_2]=q(A_1^2-A_2^2),$ $q>0$	$(VII_1)[A_1,A_2]=q(A_1^2-A_2^2)+I,$ $q\neq 0$	
$(VIII_0)\{A_1,A_2\}=0$		

2. Неприводимые представления вещественных $\mathbf{B}^*$- алгебр с квадратичным условием в алгебре линейных операторов над кватернионными гильбертовыми бимодулями

Учитывая многозначность понятия подмодуля в рассматриваемой ситуации, остановимся подробнее на понятии неприводимого представления вещественной алгебры $\mathcal{A}$ на H.

Определение 1. Представление $\pi:\mathcal{A}\to L[H]$ называется неприводимым, если не существует нетривиального правого кватернионного подмодуля в H, инвариантного относительно всех операторов $\pi(x), x\in\mathcal{A}$.

Рассмотрим неприводимые представления алгебры

$$\mathcal{A}=\mathbb{R}\langle A_1,A_2|A_1,A_2\in L[H], A_1^*=A_1, A_2^*=-A_2, P_2(A_1,A_2)=0\rangle$$

при условии конечномерности бимодуля H. С учетом теоремы 1 данная задача сводится к рассмотрению частных случаев, представленных в таблице 1.

Пусть $\dim H=n$. Тогда $H\simeq\mathbb{H}^n$ с естественным заданием на $\mathbb{H}^n$ левого и правого умножения на скаляр из $\mathbb{H}$.

В n-мерном кватернионном бимодуле $\mathbb{H}^n$ над $\mathbb{H}$ каждый линейный оператор ассоциируется стандартным образом с матрицей размерности $n\times n$, действующей слева на вектор-столбец. Причем, имеет место изоморфизм между *-алгеброй $L[\mathbb{H}^n]$ и *-алгеброй квадратных матриц $M_n(\mathbb{H})$.

Предварительно напомним ряд известных результатов в *-алгебре $M_n(\mathbb{H})$, необходимых для дальнейших исследований.

Всякая нормальная матрица унитарно эквивалентна диагональной матрице.

Собственные значения эрмитовой матрицы вещественные, а каждый класс собственных значений косоэрмитовой матрицы содержит чисто мнимое комплексное число из верхней полуплоскости.

Для неприводимых кватернионных представлений групп имеет место лемма Шура [5], естественным следствием которой является утверждение:

Если эрмитова матрица коммутирует с неприводимым семейством матриц, то она является вещественным кратным единичной матрицы.

Перейдем в условиях теоремы 1 к описанию неприводимых пар операторов над H, удовлетворяющих соотношениям $(0_0) - (IX_0)$. Отметим, что всякая пара порождает неприводимое представление на H вещественной алгебры

$$\mathbb{R}\langle A_1, A_2 | A_1, A_2 \in L[H], A_1^* = A_1, A_2^* = -A_2, P_2(A_1, A_2) = 0\rangle.$$

Сразу выделим случаи, в которых наша задача вообще не имеют решения. Очевидно, это

$$(0_1) \quad \eta I = 0, \eta \neq 0, \quad (I_1') \quad A_1^2 = -I, \quad (III_1) \quad A_1^2 - A_2^2 = -I.$$

Далее отметим соотношения, которым соответствуют так называемые «дикие» задачи:

$$(0_0) \quad 0 = 0, \quad (I_1) \quad A_1^2 = I, \quad (I_1''') \quad A_2^2 = -I.$$

Следующие задачи имеют очевидно тривиальное одномерное решение.

(0_2) $A_1 = 0$. Так как оператор A_2 всегда имеет одномерное инвариантное подпространство, то всякое неприводимое представление одномерно, и при соответствующем выборе базиса $A_1 = 0, A_2 = \lambda_2 i$, где $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(I_0) $A_1^2 = 0$. Так как $A_1^* = A_1$, то при данном условии $A_1 = 0$, и, эта задача сводится к предыдущей.

(I_2) $A_2^2 = A_1$. В этом случае оператор A_1 принадлежит центру алгебры, и, согласно следствию из леммы Шура, $A_1 = \lambda_1 I$. Поэтому неприводимое представление одномерно, $A_1 = \lambda_1 1, A_2 = \lambda_2 i 1$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 + \lambda_2^2 = 0$.

(III_0) $A_1^2 - A_2^2 = 0$. Такая задача имеет единственное решение $A_1 = A_2 = 0, \dim H = 1$. Действительно, $\forall x \in \mathbb{H} \quad 0 = \langle A_1^2 x, x\rangle - \langle A_2^2 x, x\rangle = \langle A_1 x, A_1 x\rangle + \langle A_2 x, A_2 x\rangle$, откуда $A_1 x = 0, A_2 x = 0$.

Неприводимые представления алгебры, удовлетворяющие соотношениям $(II_0)A_1^2+A_2^2=0$, $(II_1)A_1^2+A_2^2=I$, $(II_1')A_1^2+A_2^2=-I$, $(III_1)A_1^2-A_2^2=I$, имеют общую конструкцию, которая приведена в следующей теореме.

Предложение 2. Неприводимые решения A_1, A_2 соотношений $(II_0), (II_1), (II_1'), (III_1)$ имеют следующий вид:

(1) одномерные $(\dim H = 1)$, $A_1 = \lambda_1 1$, $A_2 = \lambda_2 i1$, где пара (λ_1, λ_2) принадлежит соответственно паре пересекающихся прямых $K^1_{(II_0)} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 | \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 0\}$;
гиперболе $K^1_{(II_1)} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 | \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 1\}$;
гиперболе $K^1_{(II_1')} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 | \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = -1\}$;
окружности $K^1_{(III_1)} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 | \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1\}$;

(2) двумерные $(\dim H = 2)$,

$$A_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \lambda_2 \begin{pmatrix} i\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & -i\cos\varphi \end{pmatrix}, 0 < \varphi < \pi,$$

где пара (λ_1, λ_2) принадлежит соответственно множествам:

$$K^2_{(II_0)} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 | \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 0\};$$

$$K^2_{(II_1)} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 | \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 1\};$$

$$K^2_{(II_1')} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 | \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = -1\};$$

$$K^2_{(III_1)} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 | \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1\};$$

Алгебры Ли $(IV_0), (IV_1), (IV_2)$, и соотношения $(V_0), (IV_1), (IV_1')$ также исследуются с общих позиций. Для этого приведем ряд необходимых теоретических положений.

Лемма 1. *Пусть H — кватернионное гильбертово пространство. Тогда для всякого линейного подпространства H_1 в H имеет место равенство $H_1^{\perp} = H_1^{(\perp)}$, где $H_1^{(\perp)}$ — ортогональное дополнение к H_1 в $H^{\mathbb{C}}$.*

Доказательство. Очевидно, если $x \in H_1^{\perp}$, то $x \in H_1^{(\perp)}$. Обратно, пусть $x \in H_1^{(\perp)}$. Тогда $(x, y) = 0$ $(\forall y \in H_1)$, следовательно, если $\langle x, y \rangle = q_1 + q_2 j$, то $q_1 = 0$. Но yj так же принадлежит H_1, поэтому $(x, yj) = 0$. При этом $(x, yj) = Com\langle x, yj \rangle = Com(-j)\langle x, y \rangle = Com(-\bar{q}_1 j - q_2) = -q_2$. Это означает,что $q_2 = 0$ и, следовательно, $\langle x, y \rangle = 0$ $(\forall y \in H_1)$.

Предложение 3. Пусть $A \in L[H]$ — нормальный оператор, подпространство H_1 инвариантно относительно оператора A. Тогда подпространство $H_1^{\perp}$ также A-инвариантно.

Доказательство. Если оператор A — нормальный, то его симплектический образ A^s также является нормальным, и $A^s H_1 \subset H_1$. Тогда подпространство $H_1^{(\perp)}$ инвариантно относительно оператора A^s. Так как согласно лемме 1 $H_1^{\perp} = H_1^{(\perp)}$, то для $\forall x \in H_1^{\perp} \quad Ax = A^s x \in H_1^{\perp}$. Следовательно, $H_1^{\perp}$ инвариантно относительно оператора A.

Предложение 4. Пусть операторы $A, B \in [H]$, причем $[A,[A,B]] = 0$. Тогда оператор $[A,B]$ является нильпотентным.

Доказательство. Рассмотрим симплектические образы A^s, B^s операторов A и B соответственно. Тогда операторы $A^s, B^s \in L[H^s]$ находятся в условиях теоремы Клейнике-Широкова, поэтому в конечномерном случае $[A^s, B^s]^n = 0$. Следовательно, оператор $[A,B] \in L[H]$ также нильпотентный.

Следствие 1. *Пусть операторы* $A, B \in L[H]$, *и выполняются условия* $A^* = A, \qquad B^* = -B, \qquad [A,[A,B]] = 0$. *Тогда* $[A,B] = 0$.

Действительно, в условиях следствия оператор $[A,B]$ является самосопряженным, и, следовательно, нулевым.

Заметим, что приведенное выше следствие имеет место и в случае $A^* = -A, B^* = B$.

$(IV_0) \qquad [A_1, A_2] = 0$. Так как пара коммутирующих операторов всегда имеет общий собственный вектор, то

$$\dim H = 1, \quad A_1 = \lambda_1, \quad A_2 = \lambda_2 i,$$

где $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0$.

Полученное решение совместно с предложениями 1, 3 дает еще одно доказательство известного утверждения о том, что в некотором ортонормированном базисе матрица нормального оператора имеет диагональный вид, причем диагональные элементы являются комплексными собственными значениями оператора, принадлежащими верхней полуплоскости.

В условиях задач $(IV_1), (IV_2), (V_0), (V_1), (V_1')$ оператор $[A_1, A_2]$ коммутирует с оператором A_1, поэтому согласно следствию 1 $[A_1, A_2] = 0$. Следовательно, эти случаи сводятся к задаче (IV_0).

Полиномиальные соотношения $(VI_0), (VI_1), (VII_0), (VII_1)$ выделим в группу так называемых «q–соотношений». Для анализа этих неприводимых представлений в этих условиях предварительно сформулируем и докажем некоторые утверждения.

Пусть $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{H})$. Вещественное число $TrA = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ называют следом матрицы A. Такое определение следа сохраняет его важнейшее свойство, а именно: $TrAB = TrBA$. Отсюда, в частности, легко получить, что след самосопряженной матрицы равен сумме ее собственных значений.

Теорема 2. *Пусть операторы* A, B *действуют в конечномерном пространстве* H, *причем* $A^* = A,\ B^* = -B$. *Если* $[A, B] = T + S$, *где* $[A, T] = [B, S] = 0$, *то* $[A, B] = 0$.

Доказательство. Как показывают непосредственные вычисления, $[A, B]^2 = [A, TB] + [SA, B]$. Поэтому в любом базисе $Tr[A, B]^2 = 0$. Так как $[A, B]$ — самосопряженный оператор, то из последнего равенства следует, что $[A, B] = 0$.

Очевидно, что операторы A_1, A_2 в задачах $(VI_0)-(VII_1)$ находятся в условиях теоремы 2, поэтому в каждом этих случаев $[A_1, A_2] = 0$, и мы приходим к утверждению, аналогично приведенному в работе [4].

Предложение 5. Неприводимые конечномерные представления соотношений $(VI_0) - (VII_1)$ одномерны, $A_1 = \lambda_1,\ A_2 = \lambda_2 i,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in M_{(\cdot)}(q)$, где

$$M_{(VI_0)}(q) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1^2 = \lambda_2^2\} \qquad \forall q > 0;$$

$$M_{(VI_1)}(q) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = -\frac{1}{q}\} \qquad \forall q \neq 0;$$

$$M_{(VII_0)}(q) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1 = \lambda_2 = 0\} \qquad \forall q > 0;$$

$$M_{(VII_1)}(q) = \emptyset \qquad \forall q > 0;$$

$$M_{(VII_1)}(q) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = -\frac{1}{q}\} \qquad \forall q < 0.$$

$(VIII_0)$, $\{A_1, A_2\} = 0$. Очевидным следствием данного соотношения являются равенства $A_1^2 A_2 = A_2 A_1^2,\quad A_2^2 A_1 = A_1 A_2^2$. Следовательно, самосопряженные операторы A_1^2, A_2^2 принадлежат центру алгебры, и по следствию из леммы Шура $A_1^2 = R_{\lambda_1^2},\quad A_2^2 = R_{-\lambda_2^2}$, где $R_q x = xq$ — оператор правого умножения в $H, \quad \lambda_i > 0, \quad (i = 1, 2)$. Таким образом, $\sigma(A_1) \subset \{-\lambda_1, \lambda_1\}$.

(1) Пусть $\sigma(A_1) = \{\lambda_1\}$.Тогда $A_1 = R_{\lambda_1}$, и неприводимое представление может быть только одномерным, $A_1 = \lambda_1 1, A_2 = \lambda_2 1$. При этом $\{A_1, A_2\} = 2\lambda_1\lambda_2 = 0$, откуда $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$.

(2) Пусть теперь $\sigma(A_1) = \{-\lambda_1, \lambda_1\}, \quad \lambda_1 > 0$.

В этом случае $H = H_{\lambda_1} + H_{-\lambda_1}$, где $H_{\pm\lambda_1}$— собственные подпространства оператора A_1, а блочная форма записи операторов A_1, A_2 (с учетом равенства $\{A_1, A_2\} = 0$) имеет вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} R_{\lambda_1} & 0 \\ 0 & R_{-\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $e_1 \in H_{\lambda_1}$— нормированный собственный вектор оператора A_1. Положим $e_2 = -(A_2 e_1)(\lambda_2)^{-1} \in H_{-\lambda_1}$. Если вектор $e_2 = 0$, то подпространство $\langle e_1 \rangle$ инвариантно относительно операторов A_1, A_2. Следовательно, представление одномерно, и $A_1 = \lambda, A_2 = 0$.

Пусть векторы e_1, e_2 линейно независимы.

Покажем, что подпространство $L =< e_1, e_2 >$ инвариантно относительно операторов A_1, A_2. Действительно,

$$A_1e_1 = e_1\lambda_1 \in L; \quad A_1e_2 = e_2(-\lambda_1) \in L;$$
$$A_2e_1 = e_2(-\lambda_2) \in L; \quad A_2e_2 = -(A_2^2e_1)(\lambda_2)^{-1} = e_1\lambda_2 \in L.$$

Заметим, что при таком выборе базиса векторы $e_1 \pm e_2 i$ являются собственными векторами кососамосопряженного оператора A_2, соответствующими комплексным собственным значениям $\pm\lambda_2 i$.

Следовательно, $H = L$ и $\dim H = 2$. В выбранном базисе e_1, e_2 операторы A_1, A_2 определяют матрицы $A_1 = \lambda_1\sigma_3, A_2 = i\lambda_2\sigma_2$, где $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$.

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

– матрицы Паули.

В качестве важного практического приложения полученных результатов отметим возможность приведения матриц линейных операторов определенных классов к простейшему блочно-диагональному виду. Например, если оператор A, действующий в конечномерном кватернионном пространстве H, удовлетворяет соотношению $A^2 = (A^*)^2$, то его самосопряженная и кососамосопряженная компоненты A_1, A_2 связаны соотношением $\{A_1, A_2\} = 0$. В силу полученных выше результатов имеем следующее представление матрицы этого оператора в некотором ортонормированном базисе:

$$A = diag\{\lambda_{11} + i\lambda_{21}, \dots, \lambda_{1s} + i\lambda_{2s}, \lambda_{1,s+1}\sigma_3 + i\lambda_{2,s+1}\sigma_2, \dots, \lambda_{1t}\sigma_3 + i\lambda_{2t}\sigma_2\},$$

где $\lambda_{1k}\lambda_{2k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad \sigma_3, \sigma_2$ — матрицы Паули.

3. Неприводимые представления вещественных B^*-алгебр с квадратичным условием в алгебре комплексно линейных операторов над кватернионными гильбертовыми бимодулями

Пусть $H-$гильбертовов кватернионный бимодуль, $A \in L[H^{\mathbb{C}}]$.

Известно [6], что всякий комплексно линейный оператор $A \in L[H^{\mathbb{C}}]$ представим в виде $A = A_0 + A_1R_i$, где операторы $A_0, A_1 \in L[H], R_ix := xi$. Отметим, что оператор R_i, является комплексно линейным и коммутирует с любым комплексно линейным оператором.

В условиях конечномерности бимодуля H найдем связь между матрицами операторов A, A_0, A_1.

Пусть $\dim H = n$, и векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют вещественный базис в бимодуле H. (Напомним, что в кватернионном бимодуле базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ называется вещественным, если $re_s = e_sr (\forall r \in \mathbb{R}, s = \overline{1,n})$.) Тогда векторы

$e_1, e_2, \dots, e_n, e_1 j, e_2 j, \dots, e_n j$ образуют базис в комплексном пространстве $H^{\mathbb{C}}$. В базисе $\{e_s\}_{s=1}^n$ оператору A_t соответствует матрица $A_t \in M_n(H), (t = 0, 1)$, причем $A_t = B_t + C_t j$, где $B_t, C_t \in M_n(\mathbb{C})$. Найдем матрицу оператора A в базисе $\{e_s, e_s j\}_{s=1}^n$. Как показывают вычисления,

$$\begin{aligned} &Ae_s = A_0 e_s + (A_1 e_s)i = (B_0 + C_0 j)e_s + (B_1 + C_1 j)ie_s = (B_0 + B_1 i)e_s + (C_0 - C_1 i)e_s j; \\ &A(e_s j) = A_0(e_s j) + A_1(e_s j)i = (B_0 + C_0 j)(e_s j) + (B_1 + C_1 j)(e_s j)i = \\ &-(C_0 + C_1 i)e_s + (B_0 - B_1 i)(e_s j). \end{aligned}$$

Следовательно, искомая матрица оператора имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} B_0 + B_1 i & -C_0 - C_1 i \\ C_0 - C_1 i & B_0 - B_1 i \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C}). \tag{4}$$

Кроме того, оператор A можно представить в виде

$$A = T + SR_i, \tag{5}$$

где $T = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad S = -\frac{1}{2}(A - A^*)R_i$ — самосопряженные комплексно линейные операторы. Поэтому полиномиальные соотношения для операторов A и A^* полностью характеризуются соответствующими полиномиальными соотношениями для самосопряженных компонент этих операторов. Так, например, самосопряженный операторов A характеризуется равенствами $T = T^*, S = -S^*$.

Пусть $P_2(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2x_1 + dx_2^2 + ex_1 + fx_2 + g$ — многочлен с вещественными коэффициентами от двух некоммутативных переменных, $A \in L[H]$. Тогда $P(A, A^*) = aA^2 + bAA^* + cA^*A + d(A^*)^2 + eA + fA^* + gI$. Проведя с учетом разложения (5) замену $A = T + SR_i, \quad A^* = T - SR_i$, имеем

$$\begin{aligned} &P_2(T, S) = \alpha T^2 + \beta[T, S]R_i + \gamma\{T, S\}R_i + \delta S^2 + \varepsilon T + \zeta SR_i + \eta I = 0, \\ &\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь операторы $T^2, [T, S]R_i, S^2, T, I$ являются самосопряженными, а операторы $\{T, S\}R_i, SR_i$ — кососамосопряженными. Поэтому, с учетом вещественности коэффициентов, уравнение (6) распадается на два уравнения:

$$\begin{aligned} &\alpha T^2 + \beta[T, S]R_i + \delta S^2 + \varepsilon T + \eta I = 0, \\ &\gamma\{T, S\} + \zeta S = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

При использовании аффинных преобразований переменных уравнения (7) сводятся к случаям, описанным в [4] для линейных операторов над комплексными гильбертовыми пространствами.

В качестве решетки подмодулей в гильбертовом кватернионном бимодуле H для комплексно линейных операторов выберем решетку $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$ правых комплексно линейных подмодулей в H. Отметим, что из неприводимости семейства операторов относительно такой решетки, вообще говоря, не следует его неприводимость относительно решетки правых кватернионно линейных подмодулей.

Рассмотрим неприводимые относительно решетки $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$ представления алгебры

$$A = \mathbb{R}\langle T, S | T, S \in L[H^{\mathbb{C}}], T^* = T, S^* = S, P_2(T, S) = 0\rangle$$

при условии конечномерности пространства H.

Ввиду приведенных выше рассуждений данная задача сводится рассмотрению ряда частных случаев.

Например, рассмотрим в соответствии с приведенной в [4] нумерацией задачу (III_0) $T^2 - S^2 = 0$, имеющую, как известно, в комплексном случае одномерные и двумерные решения. Однако в случае кватернионных пространств размерность соответствующего комплексного пространства может быть только четной, поэтому согласно полученным в работе [4] результатам, $\dim H = 2$, и с точностью до изоморфизма в базисе e_1, e_2 операторы T, S могут быть представлены матрицами

$$T = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S = \lambda_2 \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0, \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 0$. Причем, не ограничивая общности, можно считать, что вектор e_1, являющийся собственным для собственного значения λ_1 оператора T, вещественный ($e_1 = (1, 0)^t$), а вектор e_2, собственный для собственного значения $-\lambda_1$ равен $e_1 j$. Действительно, $(e_1, e_1 j) = \mathrm{Com}\langle e_1, e_1 j\rangle = \mathrm{Com}(-j) = 0$. Следовательно, вектор $e_1 j$ принадлежит собственному подпространству оператора T, соответствующему собственному значению $-\lambda_1$.

Полагая $T = T_0 + T_1 R_i$, $S = S_0 + S_1 R_i$, $T_k = B_k + C_k j$, $S_k = D_k + E_k j\,(k = 0, 1)$, в соответствии с равенством (4) имеем:

$$B_0 = 0, C_0 = C_1 = 0, B_1 = -i\lambda_1, D_0 = E_0 = 0, D_1 = -i\lambda_2 \cos\varphi, E_1 = i\lambda_2 \sin\varphi.$$

Следовательно,

$$T_0 = 0, T_1 = -i\lambda_1, S_0 = 0, S_1 = -i\lambda_2 \cos\varphi + (i\lambda_2 \sin\varphi)j = -\lambda_2(i\cos\varphi - k\sin\varphi).$$

Поэтому $T = -L_{\lambda_1 i} R_i, S = -L_{\lambda_2 q} R_i$, где $q = i\cos\varphi - k\sin\varphi$.

Таким образом, неприводимые решения T, S соотношения $T^2 - S^2 = 0$ в алгебре $L[H^{\mathbb{C}}]$ с точностью до изоморфизма имеют следующий вид:

$$\dim H = 1, \quad T = L_{\lambda_1 i} R_i, \quad S = L_{\lambda_2 q} R_i, \quad q^2 = -1,$$

где пара (λ_1, λ_2) принадлежит паре пересекающихся прямых $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 0$.

Аналогичные решения можно построить для задач $(II_0), (II_1), (III_1)$.

Всем остальным случаям соответствуют одномерные неприводимые представления в алгебре линейных операторов над унитарными пространствами, поэтому над кватернионными пространствами неприводимых пар комплексно линейных операторов удовлетворяющих этим соотношениям, нет.

Заключение

Таким образом, в работе показана возможность обобщения и эффективность применения известных методов к изучению структуры пар линейных и комплексно линейных операторов, действующих в гильбертовых кватернионных бимодулях и связанных определенными полиномиальными соотношениями. Это позволяет дать конкретное описание моделей некоторых классов линейных и комплексно линейных операторов, которые возникают при изучении математических моделей теоретической физики.

Список литературы

1. *De Leo S., Scolarici G.* Right eigenvalue equation in quaternionic quantum mechanics //Journal Phisics. A33. -2000. -P.2971-2995.
2. *De Leo S., Scolarici G., Solombino L.* Quaternionic eigenvalue problem //Journal of math. phisics. Bd.43. -2002. -Vol.11. -P.5815-5829.
3. *De Leo S.* Quaternionic Lorentz group and Dirac equation //Foundations of Phisics Letters. -2001. -Vol.14, №1. -P.37-50.
4. *Ostrovskyi V., Samoilenko Yu.* Introduction to the Theory Of Representations of Finitely Presented *-Algebras. -Rev.Math.&Math.Phys. -1999. -Vol.11. -P.1-261.
5. *Finkelstein D., Jauch J.M., Speiser D.* Quaternionic Representations of Compact Groups // Journal of math.phisics. -1962. -Vol.4, №1. -P.136-141.
6. *Powers N.C.* Real-linear operators on quaternionic Hilbert space //Proceed.Amer.Math.Soc. -1973. -Vol.11, №1.-P.1-8.