УДК 517.983

УСТОЙЧИВЫЕ СОСТОЯНИЯ В КОМПЛЕКСНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Тышкевич Д.Л.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь,Крым, Украина, 95007
e-mail: *ltyshk@crimea.edu*

Abstract. In the presented work the simple general scheme of constructing of subspace of robust states in complex linear space of states $\langle \mathfrak{X}, \iota \rangle$ with function $\iota : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ preserving finiteness with regard to scalar multiplication is offered.

Введение

Как показывает *анализ* некоторых *последних исследований и публикаций*, посвящённых квантовой теории поля (например, [3, 4, 5, 6, 7]), в ряде вопросов последней возникает необходимость работы в более общих пространствах, чем гильбертовы пространства или пространства Крейна. В частности, как свидетельствуют некоторые последние результаты [3, 7], в пространствах, отличных от пространств Крейна, существуют новые серии неприводимых представлений традиционных абстрактных алгебр квантовой теории поля (таких, например, как алгебра Гейзенберга).

Роль пространств с индефинитной метрикой в квантовой теории поля определяется, в частности, тем, что они помогают устранять определённого рода сингулярности и расходимости, возникающие в различных ситуациях (см., например, [2, 5]).

Данная работа является развёрнутым вариантом доклада [1]. *Целью работы является нахождение простой общей процедуры, осмысленной с физической точки зрения, которую можно было бы трактовать как процедуру «регуляризации расходимостей»*.

Мы не ставим себе целью давать здесь сравнительный анализ уже существующих процедур подобного рода, однако представляется, что схема, предложенная в данной работе, является новой, по меньшей мере в контексте пространств с индефинитной метрикой.

Суть предлагаемой процедуры состоит в следующем. На комплексном линейном пространстве задана некоторая функция ι. Эта функция, с физической точки зрения, характеризует значение какой–либо физической величины для системы, находящейся в определённом состоянии (состояния ставятся в соответствие векторам исходного линейного пространства), и может принимать наряду с вещественными значениями бесконечные положительные и отрицательные значения, а также значение «неопределённость»; последнее имеет следующий смысл: предел (будь то ряд или интеграл), определяющий значение физической величины для системы, находящейся в данном состоянии, *не существует*. Далее мы выделяем среди множества всех векторов-состояний *область финитности*, т.е. совокупность всех состояний, на которых ι принимает *конечные* значения. Область финитности Fin может не оказаться линейным пространством, и следующий шаг процедуры состоит в том, что мы среди состояний из области финитности Fin выделяем такие, которые в сумме с любым состоянием из Fin дают снова состояние из Fin. Такие состояния мы называем *устойчивыми*. При условии, что область финитности – однородное множество, совокупность всех устойчивых состояний образует линейное пространство.

Нас интересует, главным образом, тот случай, когда функция ι является квадратичной на исходном комплексном пространстве (см. стр. 116). В этом случае после описанной выше процедуры «регуляризации» при помощи поляризационного соотношения можно ввести внутреннее произведение на пространстве всех устойчивых состояний.

Обозначения. Мы используем в работе в основном традиционные обозначения. Некоторые из них, пожалуй, требуют специальной оговорки е во избежание недоразумений. Через $\mathfrak{X} \overset{e}{+} \mathfrak{Y}$ обозначается прямая (внешняя) сумма линейных пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$: $\{\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle | \mathrm{x} \in \mathfrak{X}, \mathrm{y} \in \mathfrak{Y}\}$. $\mathrm{Sadj}(\mathfrak{H})$ означает совокупность всех ограниченных самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ — соответственно множества отрицательных и положительных чисел. Под *мерой* мы, согласно [10]. подразумеваем произвольную, в общем случае, комплекснозначную счётно-аддитивную функцию множества; через $|\mu|$ обозначена вариация меры μ. Если f — комплекснозначная функция на некотором множестве A, то через $|f|$, $\overline{f}$ обозначены соответственно функции $|f|(a) := |f(a)|$, $\overline{f}(a) := \overline{f(a)}$, $a \in A$; под Re, помимо вещественной части комплексного числа мы также будем понимать и соответствующий оператор $(\mathrm{Re}\, f)(a) := \mathrm{Re}\, f(a)$.

1. Устойчивые состояния в комплексном линейном пространстве

Расширение множества вещественных чисел. Обозначим через $\overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \nu\}$ — область вещественных чисел, расширенную символами бесконечностей и символом ν, имеющим смысл неопределённой величины. Доопределим операции сложения и умножения на множество $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ следующим образом:

Операции сложения и умножения, доопределённые с помощью правил (1), являются коммутативными и ассоциативными на $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ (отметим, однако, что дистрибутивность не имеет места: например, $(2 + (-1)) \cdot (+\infty) = 1 \cdot (+\infty) = (+\infty)$, но $2 \cdot (+\infty) + (-1) \cdot (+\infty) = (+\infty) + (-\infty) = \nu$; к тому же для элементов $-\infty, +\infty$ не существует противоположных. С точки зрения алгебраических структур $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ представляет собой пример множества с двумя коммутативными и ассоциативными бинарными операциями с нейтральными элементами, не являющееся кольцом).

$$\begin{cases} (\pm\infty) + (\pm\infty) := \pm\infty, \\ (\pm\infty) + x = x + (\pm\infty) := \pm\infty, \\ (\pm\infty) + (\mp\infty) := \nu, \\ \nu + z = z + \nu := \nu \quad (z \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}); \end{cases} \qquad \begin{cases} (\pm\infty) \cdot (\pm\infty) := \pm\infty, \\ (-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) := -\infty, \\ 0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := \nu, \\ (\pm\infty) \cdot x = x \cdot (\pm\infty) := (\pm\infty) \ (x > 0), \\ (\pm\infty) \cdot x = x \cdot (\pm\infty) := (\mp\infty) \ (x > 0), \\ \nu \cdot z = z \cdot \nu := \nu \quad (z \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}). \end{cases} \tag{1}$$

Линейный порядок на $\mathbb{R}$ может быть естественным образом продолжен до частичного порядка на $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$, если положить $-\infty < r, r < +\infty (r \in \mathbb{R}); -\infty < +\infty$.

Расширим также понятие предела сети вещественных чисел $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$. А именно, будем полагать $\lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha := \nu$, если предел сети $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *не существует в обычном смысле*. Имеет место следующее простое утверждение, естественно вытекающее из соотношений (1).

Предложение 1. (1). Если $\{\lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha, \lim\limits_{\alpha \in A} y_\alpha\} \not\in \{\{\nu\}, \{-\infty, +\infty\}\}$, то

$$\lim_{\alpha \in A} (x_\alpha + y_\alpha) = \lim_{\alpha \in A} x_\alpha + \lim_{\alpha \in A} y_\alpha;$$

(2). Если $\{\lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha, \lim\limits_{\alpha \in A} y_\alpha\} \not\in \{\{\nu\}, \{0, -\infty\}, \{0, +\infty\}\}$, то

$$\lim_{\alpha \in A} (x_\alpha \cdot y_\alpha) = \lim_{\alpha \in A} x_\alpha \cdot \lim_{\alpha \in A} y_\alpha.$$

Если $A \subseteq \mathbb{R}$, то во множестве предельных точек A' множества A мы будем включать также и элементы $\pm\infty$, если в A существуют последовательности, сходящиеся к соответствующим элементам.

1.1. **Область финитности и устойчивые состояния.** Пусть $\mathfrak{X}$ — комплексное линейное пространство.

Определение 1. Пару $\langle \mathfrak{X}, \iota \rangle$, где $\iota : \mathfrak{X} \to \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ некоторая функция, будем называть *пространством состояний*, а вектора из $\mathfrak{X}$ в этом случае — *состояниями.*

Определение 2. Множество $Fin(\mathfrak{X}, \iota) := \{x \in \mathfrak{X} \mid \iota(x) \in \mathbb{R}\}$. $Fin(\mathfrak{X}, \iota)$ назовём *областью финитности (относительно ι).*

Определение 3. Будем говорить, что функция $\iota : \mathfrak{X} \to \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ *сохраняет финитность относительно умножения на скаляр*, если для любого $x \in Fin(\mathfrak{X}, \iota)$ и для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ $\quad \alpha x \in Fin(\mathfrak{X}, \iota)$

Замечание 1. Частным классом функций, сохраняющих финитность относительно умножения на скаляр может служить класс p-однородных ($p \in \mathbb{R}$) функций на $\mathfrak{X}$, т.е. функций, удовлетворяющих условию: $\iota(\alpha x) = |\alpha|^p \iota(x) (x \in \mathfrak{X}, \alpha \in \mathbb{C})$.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что функция $\iota : \mathfrak{X} \to \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ сохраняет финитность относительно умножения на скаляр тогда и только тогда, когда область финитности $Fin(\mathfrak{X}, \iota)$ — однородное множество.

Определение 4. Состояние из области финитности $Fin(\mathfrak{X}, \iota)$ назовём *устойчивым (относительно ι)*, если для любого $y \in \mathfrak{X} \quad x + y \in Fin(\mathfrak{X}, \iota)$. Множество всех устойчивых относительно ι состояний обозначим через $RFin(\mathfrak{X}, \iota)$ (*r*obustly *fin*ite).

Теорема 1. *Пусть $\langle \mathfrak{X}, \iota \rangle$ — пространство состояний, и ι сохраняет финитность относительно умножения на скаляр. Тогда $RFin(\mathfrak{X}, \iota)$ — линейное пространство.*

Доказательство. (1). Очевидно, для любого $y \in Fin(\mathfrak{X}, \iota) \quad 0 + y \in Fin(\mathfrak{X}, \iota)$, поэтому $0 \in RFin(\mathfrak{X}, \iota)$.

(2). Пусть $x \in RFin(\mathfrak{X}, \iota)$, y — произвольное фиксированное состояние из области финитности $Fin(\mathfrak{X}, \iota)$ и $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Так как ι сохраняет финитность относительно умножения на скаляр, то $\alpha^{-1}y \in Fin(\mathfrak{X}, \iota)$, поэтому $x + \alpha^{-1}y \in Fin(\mathfrak{X}, \iota)$, следовательно, $\alpha x + y = \alpha(x + \alpha^{-1}y) \in Fin(\mathfrak{X}, \iota)$. Таким образом, $\alpha x \in RFin(\mathfrak{X}, \iota)$.

(3). Пусть $x_1, x_2 \in RFin(\mathfrak{X}, \iota)$, y — произвольное фиксированное состояние из $Fin(\mathfrak{X}, \iota)$. Так как x_2 — устойчиво, то $x_2 + y \in Fin(\mathfrak{X}, \iota)$, следовательно, в силу устойчивости $x_1 (x_1 + x_2) + y = x_1 + (x_2 + y) \in Fin(\mathfrak{X}, \iota)$. Таким образом, $x_1 + x_2 \in RFin(\mathfrak{X}, \iota)$.

Очевидны следующие утверждения.

Предложение 2. Если $Fin(\mathfrak{X}, \iota)$ — линеал, то $RFin(\mathfrak{X}, \iota) = Fin(\mathfrak{X}, \iota)$.

Предложение 3. Пусть $\mathfrak{X}_1$ — линейное подпространство $\mathfrak{X}$, ι_1 – сужение ι на $\mathfrak{X}$. Тогда $Fin(\mathfrak{X}_1, \iota_1) \subseteq Fin(\mathfrak{X}, \iota)$.

Отметим, что существуют пространства состояний $\langle \mathfrak{X}, \iota \rangle$, для которых область финитности не является линейным пространством. Далее, предложение 3 перестаёт быть верным, если в нём «Fin» заменить на «$RFin$»; более того, может иметь место противоположная ситуация, когда $RFin(\mathfrak{X}_1, \iota_1) \supset RFin(\mathfrak{X}, \iota)$ (см. ниже соответствующие примеры).

Определение 5. Пусть $\langle \mathfrak{X}, \iota \rangle$ — пространство состояний. Функцию ι, удовлетворяющую соотношениям:

(1) $\iota(x + y) + \iota(x - y) = 2\iota(x) + 2\iota(y) \quad (x, y, x + y, x - y \in Fin(\mathfrak{X}, \iota))$ (*правило параллелограмма*);

(2) $\iota(\alpha x) = |\alpha|^2 \iota(x) \quad (\alpha \in \mathbb{C}, x \in \mathfrak{X})$ (*квадратичная однородность*)

назовём *обобщённой квадратичной формой* на $\mathfrak{X}$, а пару $\langle \mathfrak{X}, \iota \rangle$ в этом случае — *пространством с обобщённой квадратичной формой.*

Очевидно (см. замечание 10) обобщённая квадратичная форма, являясь 2-однородной функцией на $\mathfrak{X}$, сохраняет финитность относительно умножения на скаляр.

В различных физических теориях пространство с обобщённой квадратичной формой $\langle \mathfrak{X}, \iota \rangle$ имеет смысл пространства состояний $x \in \mathfrak{X}$, где ι может играть роль либо некоторой энергетической формы (например, $\iota(x)$ — полная энергия некоторой системы, находящейся в состоянии x), либо некоторой вероятностной характеристики (например, $\iota(x)$ — среднее значение некоторой физической величины для системы, находящейся в состоянии x [8, 9]). Присутствие множества $\{-\infty, +\infty, \nu\}$ в области значений ι связано с тем естественным фактом, что указанные выше физические и статистические величины могут быть бесконечными либо вообще не определены для некоторых состояний.

Отметим, например, что в случае интерпретации ι как энергетической формы, устойчивость состояния x означает, что никакое возмущение из области финитности (или же, никакое сколь угодно малое возмущение αy, $\alpha \to$, произвольной «финитной конфигурации» y) не может привести к состоянию с бесконечной энергией либо неопределённому состоянию.

Теперь на $RFin(\mathfrak{X}, \iota)$ согласно теореме 1 можно ввести внутреннее произведение с помощью поляризационного соотношения:

$$[x, y] := \frac{1}{4}\iota(x + y) - \frac{1}{4}\iota(x - y) + \frac{i}{4}\iota(x + iy) - \frac{i}{4}\iota(x + y).$$

Таким, достаточно естественным, образом осуществлён переход от множества «всевозможных» состояний к состояниям, имеющим «практический» смысл.

2. **Примеры**

2.1. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$ Напомним необходимое нам далее определение (обобщённого) разложения единицы [8, 9].

Пусть $\langle \Omega, \mathscr{A} \rangle$ — измеримое пространство с носителем Ω и σ-алгеброй $\mathscr{A}$ подмножеств множества Ω. *(Обобщённым) разложением единицы* на Ω называется отображение $M : \mathscr{A} \to Sadj(\mathfrak{H})$, удовлетворяющее следующим свойствам.

(1). $M(\emptyset) = 0, M(\Omega) = I_{\mathfrak{H}}$;

(2). $M(\mathcal{A}) \geqslant 0; \mathcal{A} \in \mathscr{A}$

(3). Отображение M является счётно-аддитивным в слабом смысле, т.е. для произвольных $x, y \in \mathfrak{H}$ числовая мера $(M(\cdot)x, y)$ является счётно-аддитивной.

(Обобщённое) разложение единицы называется *ортогональным* (или, зачастую, просто *разложением единицы*), если $M(\mathcal{A})$ — ортопроектор для каждого $\mathcal{A} \in \mathscr{A}$.

Для квантовой статистики неортогональные (обобщённые) разложения единицы представляют интерес потому, что (как отмечено в [8, 9]) трактовка *произвольной* наблюдаемой как *самосопряжённого* оператора (с соответствующим ортогональным разложением единицы) является достаточно узкой, и такая важная наблюдаемая, как *время*, принципиально не может быть связана ни с каким самосопряжённым оператором (эту наблюдаемую можно связать лишь с максимальным симметрическим и несамосопряжённым оператором, т.е., с неортогональным разложением единицы).

Пусть A — максимальный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ Тогда для A существует единственное обобщённое разложение единицы $M : \mathcal{B} \to B(\mathfrak{H})$ ($\mathcal{B}$ — алгебра борелевских множеств на $\mathbb{R}$) такое, что

$$D(A) = \{x \in \mathfrak{H} | \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 (M(d\lambda)x, x)_{\mathfrak{H}} < \infty\}, \tag{2}$$

$$\|Ax\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 (M(d\lambda)x, x)_{\mathfrak{H}}, \quad x \in D(A). \tag{3}$$

Обратно, по любому обобщённому разложению единицы $M : \mathcal{B} \to B(\mathfrak{H})$ можно определить максимальный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ с областью определения (2), задаваемый формулой

$$Ax := \int_{\mathbb{R}} \lambda M(d\lambda)x, \quad x \in D(A). \tag{4}$$

В физических теориях операторная мера M имеет смысл статистического измерения определённой физической величины для некоторой системы, находящейся в состоянии $x \in \mathfrak{H}$ (см. [8, 9]). Рассмотрим функцию $\iota : \mathfrak{H} \to \overline{\overline{\mathbb{R}}}$:

$$\iota(x) := \int_{\mathbb{R}} \lambda (M(d\lambda)x, x)_{\mathfrak{H}} \tag{5}$$

(в этом случае $\iota(x)$ — среднее значение соответствующей физической величины для системы, находящейся в состоянии x). Из свойств интеграла и операторной меры следует, что ι является обобщённой квадратичной формой на $\mathfrak{H}$. Покажем, что

$$D(A) \subseteq RFin(\mathfrak{H}, \iota) = Fin(\mathfrak{H}, \iota) \tag{6}$$

Нам понадобится одно простое следствие (см. [10]) из определения интеграла Лебега.

Предложение 4. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с (вещественной, или, в общем случае, комплексной) мерой $\mu(\mathcal{A}$ – σ-алгебра μ-измеримых подмножеств $\Omega)$ и f — вещественная функция на Ω. Тогда

$$f \in L(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \Leftrightarrow \|f\| \in L(\Omega, \mathcal{A}, |\mu|)$$

Теорема 2. *Для максимального симметрического оператора A и функции ι, определённых по операторной мере согласно* (4) *и* (5) *выполняется соотношение* (6).

Доказательство. Покажем, что имеет место равенство

$$RFin(\mathfrak{H},\iota) = Fin(\mathfrak{H},\iota). \tag{7}$$

Из стандартных свойств интеграла и скалярного произведения следует, что если все значения интегралов $\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda(M(d\lambda)x,x)$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda \operatorname{Re}(M(d\lambda)x,y)$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda(M(d\lambda)y,y)$ (в принципе, могущие лежать в $\{-\infty,+\infty,\nu\}$) лежат в $\mathbb{R}$, то и значение интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda(M(d\lambda)(x+y),x+y)$ также лежит в $\mathbb{R}$, при этом

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda(M(d\lambda)(x+y),x+y)_{\mathfrak{H}} = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda(M(d\lambda)x,x)_{\mathfrak{H}} + 2\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda \operatorname{Re}(M(d\lambda)x,y)_{\mathfrak{H}} + \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda(M(d\lambda)y,y)_{\mathfrak{H}}.$$

последнее утверждение также останется справедливым, если в нём поменять ролями интегралы $\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda \operatorname{Re}(M(d\lambda)x,y)_{\mathfrak{H}}$ и $\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda(M(d\lambda)(x+y),x+y)_{\mathfrak{H}}$. Таким образом, если состояния x и y лежат в области финитности $Fin(\mathfrak{H},\iota)$, то для того чтобы и их сумма $x+y$ лежала в $Fin(\mathfrak{H},\iota)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda \operatorname{Re}(M(d\lambda)x,y)_{\mathfrak{H}} \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Далее, стандартные рассуждения (в частности, неравенство Коши-Буняковского), применённые к соответствующим скалярным мерам, порождённым векторами x,y и операторной мерой M приводят к неравенству:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\lambda||(M(d\lambda)x,y)_{\mathfrak{H}}| \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\lambda|(M(d\lambda)x,x)_{\mathfrak{H}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\lambda|(M(d\lambda)y,y)_{\mathfrak{H}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из последнего неравенства, тривиального неравенства $|\operatorname{Re}(M(\Delta)x,y)| \leqslant |(M(\Delta)x,y)|$ $\Delta \in \mathsf{B}$ и предложения 4 следует (8). Тем самым равенство (7) доказано.

Включение $D(A) \subseteq Fin(\mathfrak{H},\iota)$ тривиально следует из соотношения

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda(M(d\lambda)x,x)_{\mathfrak{H}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda(M(d\lambda)x,x)\right)_{\mathfrak{H}} = (Ax,x)_{\mathfrak{H}}$$

для $x \in D(A)$.

Отметим, что включение $D(A) \subseteq RFin(\mathfrak{H},\iota)$ может быть строгим даже для самосопряжённых операторов A (в этом случае оператор A должен быть неограниченным; для ограниченного оператора A, очевидно, $RFin(\mathfrak{H},\iota) = D(A) = \mathfrak{H}$). Приведём следующий пример.

Пусть $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R})$. Рассмотрим ортогональное разложение единицы $M :\to \mathrm{Sadj}(\mathfrak{H})$, порождённое спектральной функцией P:

$$P(\lambda)(x) := \begin{cases} f(x), & x \in (-\infty, \lambda) \\ 0, & x \in [\lambda, +\infty) \end{cases}$$

(т.е., в данном случае, $M([a,b]) = M((a,b)) := P(b) - P(a), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$, и на произвольные борелевские множества доопределяем M по счётной аддитивности благодаря свойствам спектральной функции). Функция P является спектральной функцией оператора A умножения на независимую переменную: $(Af)(x) := xf(x)$.

Рассмотрим функции $f_\alpha(\lambda) := \begin{cases} \lambda^{-\alpha}, & x \in [1, +\infty) \\ 0, & x \in [-\infty, 1) \end{cases}$, где $\alpha \in (1, \frac{3}{2})$ Тогда

$$\iota(f_\alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda (M(d\lambda) f_\alpha, f)_{\mathfrak{H}} = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda |f_\alpha(\lambda)|^2 d\lambda = \int\limits_{[1,+\infty)} \lambda^{1-2\alpha} d\lambda \quad \in \mathbb{R},$$

но

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^2 |f_\alpha(\lambda)|^2 d\lambda = \int\limits_{[1,+\infty)} \lambda^{2-2\alpha} d\lambda = +\infty,$$

т.е. $f_\alpha \notin D(A)$. Таким образом, $f_\alpha \in RFin(\mathfrak{H}, \iota) \setminus D(A), \alpha \in (1, \frac{3}{2})$.

Этот пример указывает на тот факт, что язык самосопряжённых операторных мер (точнее, разложений единицы) является более гибким средством описания физических величин, чем язык (симметрических) операторов, ибо, как мы видим, могут существовать состояния, для которых среднее значение определено и конечно, но которые не входят в область определения соответствующего симметрического оператора.

2.2. Рассмотрим пространство $\mathfrak{X} := \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \overset{e}{+} \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ Для последовательностей $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots), b = (b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ из $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ полагаем

$$\iota_n(\langle a, b \rangle) := \sum_{k \in \overline{1,n}} (|a_k|^2 - |b_k|^2);$$

$$\iota(\langle a, b \rangle) := \lim_{n \to \infty} \iota_n(\langle a, b \rangle). \tag{9}$$

Очевидно, ι является обобщённой квадратичной формой на $\mathfrak{X}$. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{F} := \{\langle a, b \rangle \in \mathfrak{X} | a, b - \text{финитные последовательности}\}.$$

Теорема 3. *Для пространства состояний* $\langle \mathfrak{X}, \iota \rangle$ *с функцией* (9)

$$RFin(\mathfrak{X}, \iota) = \mathfrak{F}. \tag{10}$$

Доказательство. Включение справа налево в (10) очевидно. Докажем справедливость включения

$$\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \setminus RFin(\mathfrak{X}, \iota). \tag{11}$$

Пусть $\mathfrak{a} = \langle a, b\rangle \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда либо a, либо b не является финитной последовательностью; допустим, для определённости, a. В таком случае множество

$$\mathcal{N} := \{k \in \mathbb{N} | a_k \neq 0\} - \text{бесконечно}. \tag{12}$$

Пусть $c = (c_1, \ldots, c_n), d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{b} := \langle c + d, c\rangle$ Тогда, очевидно,

$$\iota_n(\mathfrak{b}) = \sum_{k \in \overline{1,n}} (|d_k|^2 + 2\operatorname{Re} c_k \overline{d_k}); \tag{13}$$

$$\iota_n(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \iota_n(\mathfrak{a}) + \iota_n(\mathfrak{b}) + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{k \in \overline{1,n}} \overline{c_k}(a_k - b_k) + \sum_{k \in \overline{1,n}} a_k \overline{d_k}\right). \tag{14}$$

Рассмотрим следующие варианты,

(а) Множество

$$\mathcal{M} := \{k \in \mathbb{N} | a_k + b_k \neq 0\} - \text{бесконечно}. \tag{15}$$

Положим $c := -\frac{1}{2}d$. Тогда $\iota(\mathfrak{b}) = 0$, следовательно, $\mathfrak{b} \in Fin(\mathfrak{X}, \iota)$, и

$$\sum_{k \in \overline{1,n}} \overline{c_k}(a_k - b_k) + \sum_{k \in \overline{1,n}} a_k \overline{d_k} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \overline{1,n}} (a_k + b_k)\overline{d_k}.$$

Положим

$$d_k := \begin{cases} \overline{(a_k + b_k)^{-1}}, & k \in \mathcal{M} \\ 0, & k \notin \mathcal{M}. \end{cases}$$

Тогда $\iota_n(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \iota_n(\mathfrak{a}) + |\overline{1,n} \bigcap \mathcal{M}|$ Поэтому в силу (15) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \notin Fin(\mathfrak{X}, \iota)$, следовательно, $\mathfrak{a} \notin RFin(\mathfrak{X}, \iota)$.

(б) $\mathcal{M}$ — конечно, пусть $m := \max \mathcal{M} + 1$. Тогда для $n \geqslant m$ $a_k = -b_k$, $k \in \overline{m,n}$ и

$$\sum_{k \in \overline{m,n}} \overline{c_k}(a_k - b_k) + \sum_{k \in \overline{m,n}} a_k \overline{d_k} = \sum_{k \in \overline{m,n}} a_k \overline{(d_k + 2c_k)}. \tag{16}$$

Существуют такие последовательности $e = (e_1, \ldots, e_n, \ldots), d = (d_1, \ldots, d_n, \ldots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, что

$$\sum_{k \in \overline{m,\infty}} \operatorname{Re} d_k \overline{e_k} \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{k \in \overline{m,\infty}} \operatorname{Re} a_k \overline{e_k} = -\infty. \tag{17}$$

Дествительно, можно положить $e_k := \begin{cases} \overline{a_k^{-1}}, & k \in \mathcal{N} \\ 0, & k \notin \mathcal{N} \end{cases}$, $d_k := \frac{a_k}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}$, тогда (см. (12))

$$\sum_{k\in\overline{m,n}} \operatorname{Re} d_k\overline{e_k} = \sum_{k\in\overline{m,n}\bigcap\mathcal{N}} \frac{1}{k^2}; \quad \sum_{k\in\overline{m,n}} \operatorname{Re} a_k\overline{e_k} = |\overline{m,n}\bigcap\mathcal{N}|.$$

Положим $c := \frac{1}{2}(-d+e)$. Теперь, согласно предложению 1 и (13), (14), (16), (17),

$$\iota(\mathfrak{b}) = \sum_{k\in\overline{1,\infty}} \operatorname{Re} e_k\overline{d_k} \in \mathbb{R},$$

$$\iota(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \iota(\mathfrak{a}) + \iota(\mathfrak{b}) + \sum_{k\in\overline{1,\infty}} 2\operatorname{Re} a_k\overline{e_k} = +\infty,$$

т.е. $\mathfrak{b} \in Fin(\mathfrak{X},\iota)$, но $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \notin Fin(\mathfrak{X},\iota)$, следовательно $\mathfrak{a} \notin RFin(\mathfrak{X},\iota)$.

Включение (11) доказано, и на этом завершается доказательство теоремы.

2.3. Здесь мы рассмотрим континуальный аналог пространства $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \overset{e}{+} \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ с обобщённой квадратичной формой (9).

Пусть $Mes(\mathbb{R})$ — линейное пространство всех измеримых относительно меры Лебега комплекснозначных функций, определённых на всей вещественной оси. Положим $\mathfrak{X} := Mes(\mathbb{R}) \overset{e}{+} Mes(\mathbb{R})$. Обобщённую квадратичную форму определим следующим образом. Пусть $\mathfrak{a} := \langle f, g\rangle \in \mathfrak{X}$. Введём оператор $\mathcal{I} : \mathfrak{X} \to Mes(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{I}(\mathfrak{a}) := |f|^2 - |g|^2,$$

и положим

$$\iota(\mathfrak{a}) := \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}(\mathfrak{a})(x)dx. \tag{18}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *$RFin(\mathfrak{X},\iota) = \{\langle f, g\rangle \in \mathfrak{X} | f$ и g почти всюду равны нулю$\}$.*

Доказательство. Включение справа налево очевидно.

Покажем, что если одна из функций f или g не равна нулю почти всюду, то $\langle f, g\rangle \notin RFin(\mathfrak{X},\iota)$. Без ограничения общности можно считать, что таковой является функция f. В этом случае

$$\text{лебегова мера множества } \mathcal{N} := \{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\} \text{ — ненулевая.} \tag{19}$$

(возможно, $\lambda(\mathcal{N}) = +\infty$).

Рассмотрим элемент $\mathfrak{b} = \langle \theta + \chi, \theta\rangle \in \mathfrak{X}$. Тогда, очевидно,

$$\mathcal{I}(\mathfrak{b}) = |\chi|^2 + 2\operatorname{Re}\theta\overline{\chi}; \tag{20}$$

$$\mathcal{I}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \mathcal{I}(\mathfrak{a}) + \mathcal{I}(\mathfrak{b}) + 2\operatorname{Re}(\theta(f-g) + f\overline{\chi}). \tag{21}$$

Рассмотрим множество

$$\mathcal{M} := \{x \in \mathbb{R} | f(x) + g(x) \neq 0\}.$$

Очевидно, множество $\mathcal{M}$ — измеримо. Возможны два варианта.

(a) $\lambda(\mathcal{M}) > 0$ Положим $\theta := -\frac{1}{2}\chi$. Тогда, согласно (20) и (21),

$$\mathcal{I}(\mathfrak{b}) = 0; \tag{22}$$

$$2(\overline{\theta}(f - g) + f\overline{\chi}) = (f + g)\overline{\chi}. \tag{23}$$

Пусть γ — измеримая *неинтегрируемая* на $\mathcal{M}$ вещественнозначная функция (существующая в силу того, что $\lambda(\mathcal{M}) > 0$). Определим функцию $\chi \in Mes(\mathbb{R})$:

$$\chi(x) := \begin{cases} \gamma(x)\overline{(f(x) + g(x))^{-1}}, & x \in \mathcal{M} \\ 0, & x \notin \mathcal{M} \end{cases}$$

Как следует из (22), (23), $\mathcal{I}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathcal{I}(\mathfrak{a}) + (f + g)\overline{\chi}$, поэтому, в силу предложения 1,

$$\iota(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \iota(\mathfrak{a}) + \int\limits_{\mathcal{M}} \gamma(x)dx \in \{-\infty, +\infty, \nu\}.$$

Таким образом, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in Fin(\mathfrak{X}, \iota)$, но $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \notin Fin(\mathfrak{X}, \iota)$, следовательно, $\mathfrak{a} \notin RFin(\mathfrak{X}, \iota)$.

(b) $\lambda(\mathcal{M}) = 0$. Положим для элемента $\mathfrak{b} = \langle \theta + \chi, \theta \rangle \quad \theta := \frac{1}{2}(-\chi + \zeta)$. Для всех $x \notin \mathcal{M} \quad f(x) = -g(x)$, поэтому, согласно (20) и (21),

$$\mathcal{I}(\mathfrak{b})(x) = \operatorname{Re} \zeta(x)\overline{\chi(x)}, \; x \notin \mathcal{M} \tag{24}$$

$$\mathcal{I}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(x) = \mathcal{I}(\mathfrak{a})(x) + \mathcal{I}(\mathfrak{b})(x) + 2 \operatorname{Re} f(x)\overline{\zeta(x)}, \; x \notin \mathcal{M} \tag{25}$$

Так как $\lambda(\mathcal{M}) = 0$, то $\lambda(\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{N}) > 0$, поэтому существуют такие вещественнозначные функции $\xi, \eta \in Mes(\mathbb{R})$, что

$$\xi\eta \text{ — } \textit{интегрируема на } \mathcal{N} \setminus \mathcal{M};$$

$$\eta \text{ — } \textit{неинтегрируема на } \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}.$$

Положим теперь

$$\zeta(x) := \begin{cases} \eta(x)\overline{f(x)^{-1}}, & x \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M} \\ 0, & x \notin \mathcal{N} \setminus \mathcal{M} \end{cases}; \quad \chi(x) := \begin{cases} \xi(x)f(x)^{-1}, & x \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M} \\ 0, & x \notin \mathcal{N} \setminus \mathcal{M} \end{cases}.$$

Тогда, согласно формулам (24), (25) и предложению 1,

$$\iota(\mathfrak{b}) = \int\limits_{\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}} \xi(x)\eta(x)dx \in \mathbb{R};$$

$$\iota(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \iota(\mathfrak{a}) + \iota(\mathfrak{b}) + \int\limits_{\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}} \eta(x)dx \in \{-\infty, +\infty, \nu\},$$

следовательно, $\mathfrak{a} \notin RFin(\mathfrak{X}, \iota)$. Теорема доказана.

2.4. Пусть $PWC(\mathbb{R})$ — множество всех комплекснозначных функций φ, определённых на всём $\mathbb{R}$, точки разрыва которой образуют не более чем счётное множество M_φ, для которого M'_φ — конечно.

Рассмотрим линейное пространство

$$\mathfrak{X}_{pwc} := \{\langle f, g\rangle \in PWC(\mathbb{R}) \overset{e}{+} PWC(\mathbb{R}) | f - g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})\}.$$

$\mathfrak{X}_{pwc}$ является подпространством пространства $\mathfrak{X}$, введённого в подразделе 2.3. Обозначим той же буквой ι сужение функции (18) на $\mathfrak{X}_{pwc}$. Прежде чем сформулировать результат о строении $RFin(\mathfrak{X}_{pwc}, \iota)$, рассмотрим некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть функция φ из $PWC(\mathbb{R})$ — неинтегрируема на $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Существует такой интервал $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, что φ — неинтегрируема на $[\alpha, \beta]$, но является интегрируемой на любом интервале $[\alpha', \beta'] \subseteq (\alpha, \beta)$.*

Доказательство. Пусть A — некоторое подмножество $\mathbb{R}$. Пару $\langle \alpha, \beta\rangle \subseteq A^2$ назовём парой *соседних точек по* A, если $\alpha < \beta$ и $(\alpha, \beta) \bigcap A = \emptyset$ (т.е. между α и β нет точек из M).

Пусть M — множество точек разрыва функции φ; и $M' = \{y_k | k \in \overline{1, m}\}$, $y_1 < \ldots < y_m$; полагаем $y_0 := a$, $\quad y_{m+1} := b$. Возможны следующие варианты.

(a) Для некоторой пары $\langle \alpha, \beta\rangle$ соседних по M точек φ *неинтегрируема* на $[\alpha, \beta]$. Так как в этом случае φ непрерывна на (α, β), то φ является интегрируемой на любом интервале $[\alpha', \beta'] \subseteq (\alpha, \beta)$. Искомый интервал $[\alpha, \beta]$ найден.

(b) Для любой пары $\langle \alpha, \beta\rangle$ соседних по M точек φ *интегрируема* на $[\alpha, \beta]$. Так как для любого $k \in \overline{0, m}$ произвольный замкнутый интервал $I \subseteq (y_k, y_{k+1})$ может содержать лишь конечное число точек из M, то в силу последнего допущения φ интегрируема на каждом таком интервале I. Из этих рассуждений следует, что для некоторого $k \in \overline{0, m}$, функция φ не является интегрируемой на $[y_k, y_{k+1}]$ – иначе она была бы интегрируемой на всём $[a, b]$. В этом случае можно положить $\alpha := y_k$, $\beta := y_{k+1}$.

Лемма 2. *Пусть ψ — неотрицательная функция из $PWC(\mathbb{R})$ и $\psi \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Тогда существуют такие положительные числа c_1, c_2 и дизъюнктивная система замкнутых множеств $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ что выполняется следующее.*

(1) *Каждое из A_n является объединением двух замкнутых интервалов; при этом $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Fr} A_n\right)'$ (т.е. множество предельных точек множества, образованного граничными точками составляющих A_n интервалов) — конечно.*

(2) *Для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$c_1 \leqslant \int\limits_{A_n} \psi(x)dx \leqslant c_2. \tag{26}$$

Доказательство. Возможны два варианта.

(а) Для любого замкнутого интервала $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ функция ψ интегрируема на $[a, b]$. Из того, что $\sup\{\int\limits_{[a,b]} \psi(x)dx | a, b \in \mathbb{R}, a < b\} = +\infty$, при помощи обычных рассуждений можно заключить, что для (произвольного) $c_1 > 0$ можно подобрать такое число $c_2, c_2 > c_1$ и такие дизъюнктивные системы замкнутых интервалов: $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из $\mathbb{R}_-$, $\min I_n \to -\infty$, $n \to \infty$ и $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из $\mathbb{R}_+, \max J_n \to +\infty$, $n \to \infty$, что

$$c_1 \leqslant \int\limits_{I_n \bigcup J_n} \psi(x)dx \leqslant c_2. \tag{27}$$

В данном случае, очевидно, можно положить $A_n := I_n \bigcup J_n$, $n \in \mathbb{N}$

(б) Существует интервал $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ на котором ψ не является интегрируемой. По лемме 1 существует такой подинтервал $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, что ψ — неинтегрируема на $[\alpha, \beta]$, но является интегрируемой на любом $[\alpha', \beta'] \subseteq (\alpha, \beta)$. Опять же, аналогично п. (а), из того, что $\sup\{\int\limits_{[\alpha',\beta']} \psi(x)dx \,|\, \alpha', \beta' \in (\alpha, \beta), \alpha' < \beta'\} = +\infty$ вытекает существование для произвольного числа $c_1 > 0$ числа c_2, $c_2 > c_1$, и таких дизъюнктивных систем замкнутых интервалов: $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из $(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$, $\min I_n \to \alpha$, $n \to \infty$ и $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из $(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta)$, $\max J_n \to \beta$, $n \to \infty$, что выполняется (27). В этом случае также можно положить $A_n := I_n \bigcup J_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Далее мы будем обозначать через $\mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R})$ пространство $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \bigcap PWC(\mathbb{R})$.

Лемма 3. *Пусть $\varphi \notin \mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R})$. Существует такая функция $\chi \in \mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R})$, что функция $\varphi\overline{\chi}$ — вещественнозначна, и $\varphi\overline{\chi} \notin \mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. По лемме 2 для функции $\psi := |\varphi|^2$ существуют такие положительные числа c_1, c_2 и дизъюнктивная система множеств $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что выполняется соотношение (26). Определим функцию χ следующим образом:

$$\chi(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}\varphi(x), & x \in A_n, \\ 0, & x \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \end{cases}$$

(в силу дизъюнктивности системы $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ функция χ определена корректно). Очевидно, функция $\varphi\overline{\chi}$ — вещественнозначна, и множество точек разрыва M_χ функции

χ лежит во множестве $M_\varphi \bigcup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Fr} A_n \right)'$, где M_φ, — множество точек разрыва функции φ. По лемме 2 $\chi \in PWC(\mathbb{R})$. Далее,

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \int_{A_n} |\varphi(x)|^2 dx \leqslant c_2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

но

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\chi(x)} dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \int_{A_n} |\varphi(x)|^2 dx \geqslant c_1 \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Таким образом, $\chi \in \mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R})$ и $\varphi\overline{\chi} \notin \mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R})$.

Теорема 5. $RFin(\mathfrak{X}_{pwc}, \iota) = \mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R}) \overset{e}{+} \mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a} = \langle \varphi + \psi, \varphi \rangle$, $\mathfrak{b} = \langle \theta + \chi, \theta \rangle$ — элементы $\mathfrak{X}$. Тогда, как нетрудно убедиться,

$$\mathcal{I}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathcal{I}(\mathfrak{a}) + \mathcal{I}(\mathfrak{b}) + 2\operatorname{Re}(\varphi\overline{\chi} + \psi\overline{\theta}). \tag{28}$$

При этом, очевидно, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{X}_{pwc}$ тогда и только тогда, когда $\psi, \chi \in \mathcal{L}^2_pwc(\mathbb{R})$. Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского, заключаем, что $\mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R}) \overset{e}{+} \mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R}) \subseteq RFin(\mathfrak{X}_{pwc}, \iota)$.

Докажем включение

$$\mathfrak{X}_{pwc} \setminus (\mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R}) \overset{e}{+} \mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R})) \subseteq \mathfrak{X}_{pwc} \setminus RFin(\mathfrak{X}_{pwc}, \iota).$$

Пусть $\mathfrak{a} = \langle \varphi + \psi, \varphi \rangle \in \mathfrak{X}_{pwc} \setminus (\mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R}) \overset{e}{+} \mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R}))$. Так как $\psi \in \mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R})$, то это означает, что $\varphi \notin \mathcal{L}^2_{pwc}(\mathbb{R})$. Подберём для функции φ функцию χ согласно лемме 3. Положим $\mathfrak{b} := \langle \chi, 0 \rangle$ (т.е. $\theta = 0$). Тогда $\mathfrak{b} \in Fin(\mathfrak{X}_{pwc}, \iota)$. Согласно 28 в этом случае

$$\mathcal{I}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathcal{I}(\mathfrak{a}) + \mathcal{I}(\mathfrak{b}) + 2\varphi\overline{\chi}.$$

Таким образом, $\mathfrak{b} \in Fin(\mathfrak{X}_{pwc}, \iota)$, но (см. предложение 1) $\iota(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \in \{-\infty, +\infty, \nu\}$, т.е. $\mathfrak{a} \in \mathfrak{X}_{pwc} \setminus RFin(\mathfrak{X}_{pwc}, \iota)$.

Сопоставляя примеры из подразделов 2.3, 2.4, можно сделать следующий интуитивный вывод: возможность «выдержать» любое возмущение из более обширной области финитности налагает на устойчивое состояние и более жёсткие требования. Таким образом, имея первоисточником физическую задачу и возможность варьировать связанное с ней пространство состояний (с функцией, сохраняющей умножение на скаляр), имеет смысл «разумно» выбирать исходное пространство состояний, с которого проводится процесс «регуляризации», приводящий к устойчивым состояниям; впрочем, разные такие выборы пространств состояний могут иметь и различные физические интерпретации.

Заключение

Итак, нами был рассмотрен один из способов выделения из линейного пространства состояний, содержащего состояния с бесконечно большими и неопределёнными характеристиками, линейного подпространства устойчивых состояний. Как мы видели (определения 1-4, теорема 1), соответствующая процедура теоретически весьма прозрачна, однако, как ясно из рассмотренных выше примеров, даже для достаточно простых пространств с обобщённой квадратичной формой $\langle \mathfrak{X}, \iota \rangle$ при нахождении $RFin(\mathfrak{X}, \iota)$ могут понадобиться тонкие факты из теории функций.

Представляется перспективным исследование как пространств $\langle \mathfrak{X}, \iota \rangle$, в которых ι не обязательно является квадратичной формой, так и более сложных пространств с обобщённой квадратичной формой, связанных с конкретными физическими задачами.

Также интересно было бы сравнить предложенную процедуру регуляризации с уже существующими.

Список литературы

1. D.L. Tyshkevich. Generalized quadratic forms and robust states in complex linear spaces // Book of abstracts, Satellite conference of the European Congress of Mathematics Operator Theory and Applications in Mathematical Physics OTAMP 2004, July 6-11, 2004, Bedlewo Mathematical Conference Center, Poland.
2. Andreas U. Schmidt. Infinite infrared regularization and a state space for the Heisenberg algebra // J. Math. Phys.— 2002. — Vol.43, №l. — P.243-259
3. G. Morchio and F. Strocchi. Representation of *-algebras in indefinite inner product spaces // Stochastic Processes, Physics and Geometry: New Interplays, II (Leipzig 1999), AMS Conference Procedings, Vol.29 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2000), P.491-503
4. J. Löffelholz, G. Morchio, F. Strocchi. Ground state and functional integral representations of the CCR algebra with free evolution // arXiv:math-ph/0212037 v1 12 Dec 2002
5. A.G. Smirnov and M.A. Soloviev. Spectral properties of Wick power series of a free field with an indefinite metric // arXiv:math-ph/0101003 v1 3 Jan2001
6. J. Löffelholz, G. Morchio, F. Strocchi. Mathematical structure of the temporal gauge // arXiv:math-ph/0212039 vl 12 Dec 2002
7. M. Mnatsakanova, G. Morchio, F. Strocchi and Yu.S. Vernov. Irreducible representations of the Heisenberg algebra in Krein spaces // Preprint IFUP-TH 70/95, Pisa,-1995.
8. Холево А.С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории.- М.: Наука.- 1980.-320 с. 127 [9] Холево А. С. Квантовая вероятность и квантовая статистика // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. направления. ВИНИТИ. — 1991. — т.83. — С.3-132
9. Холево А.С. Квантовая вероятность и квантовая статистика // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. направления. ВИНИТИ. — 1991.— т.83. — С.3-132
10. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы: Общая теория.- М.:Изд-во иностр. лит. — 1962