УДК 519.872

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ $M/D/1$ С ОДНОЙ ОРБИТОЙ

А.И. Коваленко, Б.Д. Марянин, В.П. Смолич
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Крым, Украина, 95007
e-mail: *smolich@tnu.crimea.ua*

Abstract
Stationary probabilities of $M/D/1$ system with one orbit in case the orbit time is the double of the service time are derived.

Введение и постановка задачи

В работах, моделирующих эксплуатацию взлетно-посадочных полос аэропорта, как правило, используются классические модели массового обслуживания [1, 2]. Системы $M/D/1$, моделирующие работу одной взлетно-посадочной полосы, изучались, например, в работах [3]-[6] при условии бесконечной вместимости орбиты с различными правилами обслуживания, при этом исследуются условия эргодичности соответствующих случайных процессов, а также оценки для вероятности потери заявки в стационарном режиме.

В настоящей работе рассматривается одноканальная система обслуживания $M/D/1$ *с временем обслуживания* $\tau > 0$, *времени пребывания на орбите* $T = 2\tau$, *входящим потоком Пуассона заявок с параметром* $\lambda > 0$. По правилам обслуживания в системе может быть не более двух заявок. Заявки принимаются в систему только в следующих случаях: 1) система свободна, и поступившая заявка начинает немедленно обслуживаться линией в течении времени $\tau > 0$; 2) в системе находится одна заявка, обслуживаемая линией, при этом поступающая заявка отправляется на орбиту, и после пребывания на орбите длительностью $T = 2\tau$ ей гарантировано немедленное начало обслуживания; 3) в системе находится одна заявка на орбите , и если в момент поступления очередной заявки оставшееся время пребывания на орбите не меньше τ, то она немедленно принимается к обслуживанию, в противном случае она покидает систему (теряется).

Если в системе находятся две заявки (одна на орбите, а другая на линии обслуживания), то очередная заявка входящего потока также покидает систему (теряется).

Цель работы – *исследовать вероятностные характеристики системы* $M/D/1$ *с одной орбиты в стационарном режиме.*

1. Математическое моделирование

Занумеруем состояния системы следующим образом: 00 – система свободна от заявок, 10 – в системе одна заявка, обслуживаемая линией, 01 – в системе одна заявка, находящаяся на орбите, 11 – в системе две заявки, одна – на орбите, другая – на обслуживании.

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$, фазовое пространство которого состоит из одной «точки» 00, двух «полупрямых» $(10,\omega_1)$, $(01,\omega_2)$ и одной «четвертьплоскости» $(11,\omega_1,\omega_2)$. Здесь ω_1 и ω_2 — случайные величины соответственно время обслуживания и время нахождения на орбите (в данный момент времени t). При этом $\omega_2 \leqslant \omega_1+\tau$.

Введем функции

$$\begin{gathered}
p_{00}(t)=\mathbb{P}\{\xi(t)=00\}, \quad p_{10}(t)=\mathbb{P}\{\xi(t)=10\},\\
p_{01}(t)=\mathbb{P}\{\xi(t)=01\}, \quad p_{11}(t)=\mathbb{P}\{\xi(t)=11\},\\
Q_{10}(t,x)=\mathbb{P}\{\xi(t)=10,\omega_1<x\}, \quad q_{10}(t,x)=\frac{\partial Q_{10}(t,x)}{\partial x},\\
Q_{01}(t,y)=\mathbb{P}\{\xi(t)=01,\omega_2<y\}, \quad q_{01}(t,y)=\frac{\partial Q_{01}(t,y)}{\partial y},\\
Q_{11}(t,x,y)=\mathbb{P}\{\xi(t)=11,\omega_1<x,\omega_2<y\}, \quad q_{11}(t,x,y)=\frac{\partial_2 Q_{11}(t,x,y)}{\partial x\partial y}.
\end{gathered}$$

Заметим, что имеют место соотношения:

$$p_{10}(t)=\int\limits_0^{\tau} q_{10}(t,x)dx, \quad p_{01}(t)=\int\limits_0^{2\tau} q_{01}(t,y)dy, \quad p_{11}(t)=\int\limits_0^{\tau} dx\int\limits_0^{\tau+x} q_{11}(t,x,y)dy.$$

Вероятностные рассуждения и предельные переходы приводят к системе:

$$\begin{cases}
\dfrac{dp_{00}(t)}{dt}+\lambda p_{00}(t)=q_{10}(t,\tau)\\
\dfrac{\partial q_{10}(t,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial q_{10}(t,x)}{\partial x}+\lambda q_{10}(t,x)=0, \quad x\in[0,\tau]\\
\dfrac{\partial q_{11}(t,x,y)}{\partial t}+\dfrac{\partial q_{11}(t,x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial q_{11}(t,x,y)}{\partial y}=0, \quad x\in[0,\tau], y\in[0,x+\tau]\\
\dfrac{\partial q_{01}(t,y)}{\partial t}+\dfrac{\partial q_{01}(t,y)}{\partial y}+\lambda q_{01}(t,y)=q_{11}(t,\tau,y), \quad y\in[0,\tau]\\
\dfrac{\partial q_{01}(t,y)}{\partial t}+\dfrac{\partial q_{01}(t,y)}{\partial y}=q_{11}(t,\tau,y), \quad y\in[\tau,2\tau]\\
q_{10}(t,0)=\lambda p_{00}(t)+q_{01}(t,2\tau)\\
q_{11}(t,0,y)=\lambda q_{01}(t,y), \quad y\in[0,\tau]\\
q_{11}(t,x,0)=\lambda q_{10}(t,x)+q_{01}, \quad x\in[0,\tau]\\
q_{01}(t,0)=0
\end{cases} \tag{1}$$

2. Решение системы (1) в стационарном режиме. Основные результаты

В стационарном режиме система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \lambda p_{00} = g_{10}(\tau) \\ \dfrac{dg_{10}(x)}{\partial x} + \lambda g_{10}(x) = 0, \quad x \in [0,\tau], \quad g_{10}(0) = \lambda p_{00} + g_{01}(2\tau) \\ \dfrac{\partial g_{11}(x,y)}{\partial x} + \dfrac{\partial g_{11}(x,y)}{\partial y} = 0, \quad x \in [0,\tau], \quad y \in [0, x+\tau] \\ g_{11}(0,y) = \lambda g_{01}(y), \quad g_{11}(x,0) = \lambda g_{10}(x) \\ \dfrac{dg_{01}(y)}{dy} + \lambda g_{01}(y) = g_{11}(\tau, y), \quad y \in [0,\tau], \quad g_{01}(0) = 0 \\ \dfrac{g_{01}(y)}{dy} = g_{11}(\tau,y), \quad y \in [\tau, 2\tau] \end{cases}, \tag{2}$$

где

$$g_{10} = \lim_{t\to\infty} q_{10}(t,x), \quad g_{01} = \lim_{t\to\infty} q_{01}(t,y), \quad g_{11} = \lim_{t\to\infty} q_{11}(t,x,y).$$

Вероятности стационарных состояний изучаемой системы обслуживания обозначены через

$$p_{10} = \lim_{t\to\infty} p_{10}(t) = \int\limits_0^\tau g_{10}(x)dx, \quad p_{01} = \lim_{t\to\infty} p_{01}(t) = \int\limits_0^{2\tau} g_{01}(y)dy,$$

$$p_{11} = \lim_{t\to\infty} p_{11}(t) = \int\limits_0^\tau dx \int\limits_0^{x+\tau} g_{11}(x,y)dy, \quad p_{00} = \lim_{t\to\infty} p_{00}(t).$$

Система (2) состоит из линейных однородных уравнений первого порядка, из неё можно выразить неизвестные функции друг через друга, а значит стационарные вероятности состояний также выражаются друг через друга (кроме того, одно из соотношений системы (2) может быть получено из остальных). Нормировочное соотношение $p_{00}+p_{01}+p_{10}+p_{11} = 1$ позволяет найти каждую из стационарных вероятностей данной системы обслуживания. После простых вычислений получаем:

$$g_{10}(x) = \lambda p_{00} e^{\lambda(\tau - x)}, \ x \in [0,\tau]$$

$$g_{11}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 p_{00} e^{\lambda(\tau - x + y)}, & x \in [0,\tau], \ y \in [0,x] \\ \lambda^2 p_{00} \operatorname{sh} \lambda(y-x), & x \in [0,\tau], \ y \in [x, x+\tau] \end{cases}$$

$$g_{10}(y) = \begin{cases} \lambda p_{00} \operatorname{sh} \lambda y, & y \in [0,\tau] \\ \lambda p_{00}(\operatorname{sh}\lambda\tau - 1 + \operatorname{ch}\lambda(y-\tau)), & y \in [\tau, 2\tau] \end{cases}$$

$$p_{10} = p_{00}(e^{\lambda\tau} - 1), \ p_{11} = p_{00}(\lambda\tau e^{\lambda\tau} + e^{\lambda\tau} - 1 - \lambda\tau + \lambda\tau \operatorname{ch}\lambda\tau)$$

$$p_{01} = p_{00}(e^{\lambda\tau} - 1 - \lambda\tau + \lambda\tau \operatorname{sh}\lambda\tau), \ p_{00} = (3e^{\lambda\tau} + 2\lambda\tau e^{\lambda\tau} - 2 - 2\lambda\tau)^{-1}$$

Вероятность потери требования в стационарном режиме равна:

$$p = p_{11} + \int_{\tau}^{2\tau} g_{01}(y)dy = \frac{2\lambda\tau e^{\lambda\tau} + e^{\lambda\tau} + \operatorname{sh}\lambda\tau - 1 - 2\lambda\tau}{3e^{\lambda\tau} + 2\lambda\tau e^{\lambda\tau} - 2 - 2\lambda\tau}.$$

Заключение

В работе получены стационарные вероятности системы $M/D/1$ с одной орбитой в случае, когда время пребывания на орбите вдвое больше времени обслуживания: $T = 2\tau$. Случай $T \neq 2\tau$ оказался существенно сложнее. В дальнейшем авторы намерены избавиться от этого ограничения.

Список литературы

1. Фролоу И., Синпотт ДЖ.Х. Моделирование требований к национальной аэронавигационной системе и её пропускной способности. // Труды института инженеров по электронике и радиоэлектронике. – 1989. – 77, №11 – С.23-31.
2. Афанасьев Л.Г., Кочеткова З.С., Тэймуразов Э.С. Стохастические модели управления воздушным движением. // Вопросы кибернетики. Проблемы управления воздушным движениием: Сб.науч.тр. – М., 1992. – С.52-64.
3. Lacatos L.A. A probability model connected with landing of airplanes. // Safety and Reliability. – 1999. – 1. – P.151-154.
4. Коваленко И.Н., Коба Е.В. Три системы обслуживания с повторными вызовами, отражающие некоторые особенности процесса посадки воздушных судов. // Проблемы управления и информатики. – 2002. – №2. – С.61-66.
5. Коба Е.В. Вероятность потери заявки в системе обслуживания $M/D/1$ с постоянным временем возвращения // Доп. НАН Украiни. – 2002. – №4 – С.61-66.
6. Коба Е.В. Достаточное условие эргодичности системы $M/D/1$ с T-возвращением и приоритетом задержанных заявок // Доп. НАН Украiни. – 2003. – №5 – С.17-20.