УДК 517.9

ТРАЕКТОРНЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е. В. Королева

Белорусский государственный университет,
механико-математический факультет,
пр. Ф. Скарины, 4, г. Минск, Беларусь, 220050

Abstract

The paper presents a trajectorial approach to the calculation of the conditions for singular integral operators with discontinuous oscillating coefficients to possess the Fredholm property.

Введение. Постановка задачи

Пусть M — ориентированная замкнутая простая кривая Ляпунова, $L^2(M)$ — гильбертово пространство всех измеримых на M функций, квадраты модулей которых интегрируемы на M. Обозначим через B алгебру, порожденную операторами, действующими в $L^2(M)$, вида

$$b = c_1 + c_2 S,$$

где S — сингулярный интегральный оператор, c_1 и c_2 - операторы умножения на функции из пространства $C(M \setminus \{m_0\})$, имеющие конечные пределы при $m \to m_0 \pm 0$, $m_0 \in M$.

Как известно ([1], [[2], 33.12], [[3], 53.12]), пространство примитивных идеалов алгебры $[B] = B/K$, где K – идеал компактных операторов в $L(L^2(M))$, можно представить в виде дизъюнктного объединения

$$\mathrm{Prim}[B] = M_+ \cup M_- \cup \mathbf{R}_{m_0} \cup (m_0, +, \pm) \cup (m_0, -, \pm),$$

где M_+ и M_- — копии множества $M \setminus \{m_0\}$, $\mathbf{R}_{m_0}$ — прямая, $(m_0, +, \pm)$, $(m_0, -, \pm)$ — четыре точки. Кроме того [1], пространство $\mathrm{Prim}[B]$ можно отождествить с пространством $[\widehat{B}]$ всех неприводимых представлений алгебры $[B]$.

Пусть U_h, $h \in \mathbf{R}$, — оператор умножения на функцию $a_h(m)$, непрерывную на $M \setminus \{m_0\}$, которая в некоторой симметричной окрестности $O(m_0)$ точки $m_0 \in M$ имеет вид

$$a_h(m) = \begin{cases} e^{-ih\ln(m_0-m)} & \text{при } m < m_0, \\ e^{-ih\ln(m-m_0)} & \text{при } m_0 < m, \end{cases} \tag{1}$$

а далее тождественно равна 1.

Обозначим через $C^*(B, U_h)$ C^*-алгебру, порожденную алгеброй B и оператором U_h, а через G — группу, порожденную функцией a_h, т.е.

$$G = \{a_h^k : k \in \mathbf{Z}\}.$$

Заметим, что отображение $k \to a_h^k$ — представление группы $\mathbf{Z}$.

В работе [4] описаны локальные представители $\pi(d)$ элементов $d \in C^*(B, U_h)$ и условие фредгольмовости в их терминах.

Целью настоящей работы является получение условий фредгольмовости элементов из $C^*(B, U_h)$ в терминах (простейших) траекторных представлений динамической системы, порожденной действием операторов $U_{kh}, k \in \mathbf{Z}$ на алгебре $[\widehat{B}]$.

1. Траекторное описание условий фредгольмости сингулярных интегральных операторов с разрывными осциллирующими коэффициентами

Автоморфизм $\widehat{U}_h = U_h(.)U_h^*$ порождает на пространстве $\mathrm{Prim}[B]$ $(= [\widehat{B}])$ гомеоморфизм t_h (см. [[2], 12.12]):

$$t_h(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in M_+ \cup M_- \cup (m_0, +, \pm) \cup (m_0, -, \pm), \\ x + h & \text{при } x \in \mathbf{R}_{m_0}. \end{cases}$$

Обозначим через $X_k, \quad k \in \mathbf{Z}$, множество:

$$X_k = \{x \in \mathrm{Prim}[B] : t_h^k(x) = x\}.$$

Тогда для любого $k \neq 0$ имеем:

$$X_k = M_+ \cup M_- \cup (m_0, +, \pm) \cup (m_0, -, \pm),$$

а X_0, очевидно, совпадает со всем $\mathrm{Prim}[B]$.

Пусть $G_x = \{k \in \mathbf{Z} : x \in \overset{\circ}{X}_k\}$. Эта подгруппа группы $\mathbf{Z}$ нормальна для всех $x \in \mathrm{Prim}[B]$, а факторгруппа $G^x = \mathbf{Z}/G_x$ действует топологически свободно на X_∞, где

$$X_\infty = \mathrm{Prim}[B] \backslash \left[\bigcup_{k \neq 0} \overset{\circ}{X}_k \right] = \mathbf{R}_{m_0} \cup (m_0, +, \pm) \cup (m_0, -, \pm),$$

т.е. для любого конечного множества $\{k_1, \ldots, k_n\}$ элементов группы G таких, что $[k_i] \neq [0]$, множество $\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_{k_i} \right]$ не содержит никакой окрестности точки x.

Пусть $x \in [\widehat{B}]$. Зададим (траекторные) представления π_x (операторы, действующие в пространстве $l^2(G^x, \ H_x)$, где H_x – соответствующее точке x пространство представления), следующим образом.

(1) Если $x \in M_+ \cup M_-$, т. е. $x = (m, \theta) = (m, \pm)$, то $G^x = [0]$, $H_x = \mathbf{C}$, и действие представления $\pi_x : C^*(B, U_h) \to L(\mathbf{C})$ на операторах $b \in B$ и операторе U_h имеет вид:

$$\pi_x(b)\xi = \pi(m, \theta)(b) \cdot \xi,$$

$$\pi_x(U_h)\xi = a_h(m) \cdot \xi,$$

где $\xi \in \mathbf{C}$.

(2) Если $x \in \mathbf{R}_{m_0}$, т. е. $x = (m_0, t)$, то $G^x = \mathbf{Z}$, $H_x = \mathbf{C}^2$ и

$$(\pi_x(b)\xi)(k) = (\pi(m_0, t + kh)(b))\xi(k),$$

$$(\pi_x(U_h)\xi)(k) = T_h\xi(k),$$

где $\xi \in l^2(\mathbf{Z}, \mathbf{C}^2)$, $\pi(m_0, t + kh)(b) \in L(\mathbf{C}^2)$, а T_h – оператор сдвига:

$$T_h\xi(k) = \xi(k + 1).$$

(3) Если $x = (m_0, \varphi, \theta)$, где $\varphi = \pm$, $\theta = \pm$, то $G^x = \mathbf{Z}$, $H_x = \mathbf{C}^2$ и

$$(\pi_x(b)\xi)(k) = \pi(m_0, \varphi, \theta)(b)\xi(k),$$

$$(\pi_x(U_h)\xi)(k) = T_h\xi(k).$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1. *Если* $\nu \in [\widehat{C^*(B, U_h)}]$, $\nu|_{[B]}$ *— соответствующее предствление алгебры* $[B]$ *и*

$$Y = supp\, Ker\ \nu\ |_{[B]} = \{y \in Prim[B] : y \supset Ker\ \nu\ |_{[B]}\},$$

то существует такая точка $y_0 \in Y$, *имеющая всюду плотную в* Y *орбиту, т.е.*

$$\overline{\{t_h^k(y_0)\}}_{k \in \mathbf{Z}} = Y.$$

Доказательство. Так как можно отождествить $[\widehat{B}]$ и $\mathrm{Prim}[B]$, то

$$Y = \{\pi \in [\widehat{B}] : \pi(\mathrm{Ker}\ \nu\ |_{[B]}) = 0\}.$$

Множество Y замкнуто в $\mathrm{Prim}[B]$ и инвариантно относительно автоморфизмов $\widehat{U}_{kh}$, поэтому мы можем отождествить его с $\mathrm{Prim}\ \nu([B])$.

Алгебра $[B]$ сепарабельна, следовательно $\nu([B])$ также сепарабельна и топология на Y имеет счетную базу ([[6], 3.3.4]). Обозначим через V_n, $n = \overline{1, \infty}$, — базу топологии на Y. Точка $y \in Y$ имеет неплотную орбиту в том и только в том случае, когда существует такое открытое множество V_j из базы топологии, что

$$y \in Y \setminus \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} t_h^k(V_j).$$

Из неприводимости ν следует, что множество

$$W_j = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} t_h^k(V_j)$$

всюду плотно в Y. Пространство $\mathrm{Prim}[B]$ является пространством Бэра ([[6], 3.4.13]), поэтому множество $W = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} W_j$ не пусто. Выбирая произвольную точку $y_0 \in W$, получим, что её орбита всюду плотна в Y. Лемма доказана.

В наших предложениях возможны только три случая:

(a) $Y = \{m\}, m \in M_+ \cup M_-$,
(b) $Y = \underline{\{x\}, x \in (m_0, +, +)} \cup (m_0, +, -) \cup (m_0, -, +) \cup (m_0, -, -)$,
(c) $Y = \overline{\{t_0 + kh : k \in \mathbf{Z}\}}$.

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Представление*

$$\overline{\pi} : d \to \bigoplus_{x \in [\widehat{B}]} \pi_x(d),$$

где $d \in C^*(B, U_h)$, $\pi_x(d) \in L(l^2(G^x, H_x))$, *устанавливает изоморфизм*

$$C^*(B, U_h)/K \cong \overline{\pi}(C^*(B, U_h)).$$

Элемент $d \in C^*(B, U_h)$ *фредгольмов в том и только в том случае, когда все* $\pi_x(d)$, $x \in [\widehat{B}]$, *обратимы, т. е. множество* $\{\pi_x\}_{x \in [\widehat{B}]}$ *является достаточным множеством представлений для* $[C^*(B, U_h)]$.

Доказательство. Заметим, что для любого $x \in X_\infty$ справедливо равенство

$$\pi_x([B]) \underset{[\widehat{U}_x]}{\times} \mathbf{Z} \cong \pi_x([C^*(B, U_h)]) \tag{2}$$

где $[\widehat{U}_x]$ — группа автоморфизмов алгебры $\pi_x([B])$, действующих следующим образом $F \mapsto \pi_x([k]) F \pi_x^*([k])$, $k \in \mathbf{Z}$, и $\pi_x([B]) \underset{[\widehat{U}_x]}{\times} \mathbf{Z}$ — скрещенное произведение алгебры $\pi_x([B])$ и группы $\mathbf{Z}$ посредством автоморфизмов $[\widehat{U}_x]^k$ [5].

Это следует из того факта, что $\pi_x([C^*(B, U_h)])$, $x \in X_\infty$ — правое регулярное представление для $\pi_x([B]) \underset{[\widehat{U}_x]}{\times} \mathbf{Z}$ (см. [[2], 15.3]). Из (2), в свою очередь, вытекает изоморфизм

$$\bigoplus_{x \in X_\infty} \pi_x([B]) \underset{[\widehat{U}_x]}{\times} \mathbf{Z} \cong \bigoplus_{x \in X_\infty} \pi_x([C^*(B, U_h)]). \tag{3}$$

Докажем теперь, что для любой точки $x \in [\widehat{B}]$ π_x является *представлением* для $[C^*(B, U_h)]$.

Так как для точек $x \notin X_\infty$ это очевидно, то достаточно проверить этот факт для случая $x \in X_\infty$.

Заметим, что так как гомеоморфизмы t_h^k действуют топологически свободно на X_∞, то выполняется неравенство

$$\Big\|\Big[\sum_F b_g U_g\Big]\Big\| \geqslant \max_{x\in X_\infty}\Big\|\Big[b_0\Big](x)\Big\|. \tag{4}$$

Из этого неравенства, теоремы об изоморфизме [[2], 12.8] и явного вида локальных представителей для $[C^*(B,U_h)]$ следует, что имеет место следующий изоморфизм:

$$\bigoplus_{x\in X_\infty}\pi_x([B])\underset{[\widehat{U}_x]}{\times}\mathbf{Z}\cong C^*([B]|_{\mathbf{R}_{m_0}},[U_h]|_{L^2(\mathbf{R}_{m_0},\mathbf{C}^2)}). \tag{5}$$

Значит

$$\pi_x([B])\underset{[\widehat{U}_x]}{\times}\mathbf{Z},\ x\in X_\infty,$$

а потому, в силу (2), $\pi_x([C^*(B,U_h)])$ является представлением для

$$C^*([B]|_{\mathbf{R}_{m_0}},[U_h]|_{L^2(\mathbf{R}_{m_0},\mathbf{C}^2)}),$$

а, значит, и для $C^*([B],[U_h])$.

Докажем наконец, что

(*) *для любого неприводимого представления ν алгебры $[C^*(B,U_h)]$ существует такая точка x_0 в $[\widehat{B}]$, что ν — представление для $\pi_{x_0}(C^*(B,U_h))$.* Отсюда будет следовать, что набор представлений $\{\pi_x\}_{x\in[\widehat{B}]}$ является достаточным (так как $[d]\in[C^*(B,U_h)]$ обратим в том и только в том случае, когда все $\nu([d]),\ \nu\in[\widehat{C^*(B,U_h)}]$ обратимы).

Зафиксируем неприводимое представление $\nu\in[\widehat{C^*(B,U_h)}]$ и соответствующее представление $\nu|_{[B]}$ алгебры $[B]$. По доказанной выше лемме существует точка $y_0\in Y$ со всюду плотной орбитой в Y.

Возможны следующие два случая.

(a) Пусть $y_0\in X_\infty$. Так как y_0 имеет всюду плотную орбиту в Y, то для такого $x_0\in[\widehat{B}]$, что $y_0=\mathrm{Ker}\,x_0$, получаем:

$$\pi_{x_0}([B])\cong\nu([B]).$$

Из (2) следует, что

$$\pi_{x_0}([C^*(B,U_h)])\cong\nu([B])\underset{[\widehat{U}_{x_0}]}{\times}\mathbf{Z}.$$

Значит, $\nu([C^*(B,U_h)])$ — представление алгебры $\pi_{x_0}([C^*(B,U_h)])$.

(b) Пусть $y_0\notin X_\infty$, т. е. $y_0\in M_+\cup M_-$. Тогда $Y=\{y_0\}$ и, следовательно,

$$\pi_{y_0}([C^*(B,U_h)])\cong\nu(C^*(B,U_h)).$$

Доказательство завершено.

Заключение

Получено явное описание дискретных траекторных представлений, являющихся достаточным набором для вычисления условий фредгольмовости сингулярных интегральных операторов с разрывными осциллирующими коэффициентами

Список литературы

1. Пламеневский Б. А. Алгебры псевдодифференциальных операторов. - Москва: Наука. - 1986. - 256 с.
2. Antonevich A., Lebedev A. Functional differential equations: I. C^* - theory. - London-New York: Longman Scientific & Technical. - 1994. - 504 pp.
3. Antonevich A., Lebedev A. Functional differential equations: II. C^* - applications. Part 2. - London-NewYork: Longman Scientific & Technical. - 1998. - 400 pp.
4. Акулич Е. В., Лебедев А. В. Символическое исчисление для сингулярных интегральных операторов с разрывными осциллирующими коэффициентами. // Докл. АН Беларуси 2003. - Т. 47, №1. - С. 10 - 14.
5. Pedersen G. K. C^*-algebras and their automorphisms groups. - New York: Academic Press. 1979. - 328 pp.
6. Dixmier J. Les C^*-algebras et leurs representations. - Paris: Gautheir-Villars. 1969. - 432 pp.