УДК 517

КОМПАКТНОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА СВЕРТКИ В ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е.А.Павлов

Киевский национальный экономический университет,
Крымский экономический институт,
ул.Севастопольская,21/4,г.Симферополь,Крым , Украина, 95015

Abstract
In this paper problem of compacts convolutions operators in ideal spaces is considered.

Вопросы непрерывности, регулярности и компактности интегральных и частично интегральных операторов играют важную роль в теории интегральных операторов и их приложении [1];[2];[3]. В данной статье *получено достаточное условие компактности интегрального оператора типа свертки в идеальных пространствах.*

В этой статье изучены изучены условия, при которых интегральный оператор типа свертки является компактным (вполне непрерывным) как оператор действующий из одного симметрического пространства $E((0,1);dt)$ *в другое симметрическое пространство* $F((0,1);dt)$.

При получении результатов данной статьи существенно использованы результаты, полученные П.П.Забрейко в монографии [2], *а так же в* [3], [4].

Теорема 1. *Пусть* $E((0,1);dt)-$ *идеальная структура(идеальное пространство) с нормой, обладающей свойством Минковского. Пусть* $K \in L_1((-1,1);dt)$ *и* $T_k : E \longrightarrow E$, *где*

$$(T_k f)(s) = \int\limits_0^1 K(s-t)f(t)dt. \tag{1}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|T_k\|_{E\longrightarrow F} \leq \|K\|_{L_1((-1,1);dt)} \tag{2}$$

Доказательство. Получаем

$$\left|\int\limits_0^1 K(s-t)f(t)dt\right| \leq \int\limits_{s-1}^{s} |K(\tau)||f(s-\tau)|d\tau \leq \int\limits_{-1}^{1} |K(\tau)||f(s-\tau)|d\tau \tag{3}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, получаем:

$$\|\int\limits_0^1 K(s-t)f(t)dt\|_E \leq \int\limits_{-1}^{1} |K(\tau)||f(s-\tau)|_E d\tau \leq \int\limits_{-1}^{1} |K(\tau)|d\tau\|f\|_E \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть $E((0,1);dt)$ и $E^1((0,1);dt)$– правильные идеальные структуры. Тогда если ядро $K(s) \in L_1((-1,1);dt)$, то интегральный оператор типа свертки $K(s)$ является компактным в пространстве $E((0,1);dt)$.*

Доказательство. Пусть последовательность $K_n \in E^1((0,1);dt)$ и $K_n \longrightarrow K$ в $L_1((-1,1);dt)$. Рассмотрим последовательность операторов $T_n f = K_n f$. Получаем:

$$\| \| K_n(s-t) \|_{E^1} \|_E = \| \sup_{\|f\|_E \le 1} \int_0^1 K_n(s-t) f(t) dt \|_E = \| \sup_{\|f\|_E \le 1} \int_{s-1}^{s} |K_n(\tau)| |f(s-\tau)| d\tau \|_E \le$$

$$\le \| \sup_{\|f\|_E \le 1} \int_{-1}^{1} |K_n(\tau)| |f(s-\tau)| d\tau \|_E \tag{5}$$

Если функцию $f \in E((0,1);dt)$ продолжить влево на интервал $(-1,1)$ нулем, то продолженную функцию можно считать принадлежащей идеальному пространству $E((-1,1);dt)$. Итак, получаем:

$$\| \| K_n(s-t) \|_{E^1((0,1);dt)} \|_{E((0,1);ds)} \le \| \sup_{\|g\|_{E((-1,1);dt)} \le 1} \int_{-1}^{1} |K_n(\tau)| |g(\tau)| d\tau \|_{E((0,1);ds)} \le$$

$$\le C \|K_n\|_{E^1((-1,1);dt)}$$

Итак, мы получаем соотношение:

$$\| \| K_n(s-t) \|_{E^1} \|_E < \infty \tag{6}$$

Другими словами (см., например, [2] стр.157) $K_n \in \{E^1, E\}$. Тогда (см., например, [2],[3]). Оператор $T_n f = K_n f$ компактен как оператор из в. Далее из теоремы 1, получаем: $\|T_k - T_n\| \le \|K - K_n\|_{L_1((-1,1);dt)} \longrightarrow 0$. Следовательно, оператор $T_k : E \longrightarrow E$ является компактным.

Список литературы

1. Бухвалов А.В., Векслер А.И., Лозановский Г.Я.Банаховы решетки-некоторые банаховы аспекты теории //Успехи мат. наук.-1979.-Т.34, Вып 2(206).-С.137-183.
2. Забрейко П.П.Нелинейные операторы//Тр.Семинара по функциональному анализу:Воронежский гос. ун-т.-1966.- Вып.8.-С.3.-148.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П.Функциональный анализ.-М.: Наука.-1977.
4. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.Интерполяция линейных операторов.-М.: Наука.-1978.
5. Павлов Е.А.Об операторах, инвариантных относительно сдвига в симметричных пространствах //Сибирский мат. журнал.-1977,Т.18,№1.-С.80-85.