II. МАТЕМАТИКА

УДК 517:519

МАСШТАБНА ІНВАРІАНТНІСТВ СИСТЕМИ НЕЛ'Н'ЙНИХ ЕВОЛЮЦ'ЙНИХ Р'ВНЯНЬ

П.В. Марко

Социально-экономический университет, кафедра экономической кибернетики,
ул. Героев Севастополя, 13, Севастополь, 99001, Украина
e-mail: *program@msusevastopol.net*

Abstract

There are obtained the new classes of the parabolic systems of the partial differential equations, that are admitting the groups of Euclid, Galilei and their extensions with operator of the scale transformations.

Вступ

Характерною особливістю сучасного природознавства стала заміна вербальних, схематичних методів опису математичними, а витіснення інтуїтивних висновків дедуктивними іноді називають «дедуктивним терором».

Ступінь зрілості науки про природу визначається ефективністю математичних моделей (ММ) її об'єктів дослідження.

Глобальні екологічні проблеми выкликали необхідність у створенні прогностичних моделей розвитку як окремих регіонів, так і планети в цілому.

Із середини 20 ст. за допомогою ЕОМ проводяться числові розрахунки траєкторій космічних ракет і супутників, поведінки уранових котлів у різних режимах, теоретичних результатів ядерних вибухів, хімічних реакцій, дифузії, дренажу грунтових вод і т. ін. Їхньою метою є підвищення безпеки і мінімізація часових, енергетичних і фінансових витрат. Для найпоширеніших нелінійних систем кожей результат є новим і може викликати сумніви. Аварії під час посадки на Марс та у Чорнобилі свідчать про високу ціну можливих помилок. Починати числове дослідження ММ без попереднього аналізу різних граничних випадків неприпустимо, оскільки джерела помилок можуть бути пов'язані не лише з вибором моделі, але й використаними числовими методами і алгоритмами розв'язання. Як правило, граничні випадки допускають точні аналітичні розв'язки, які дають уявлення про порядки досліджуваних величин та їхню якісну поведінку, а також слугують тестом для відбору числового алгоритму за стійкістю схеми розрахунків, за швидкістю збіжності та за областю застосування. Для тестових розрахунків знания точних розв'язків виявляється незамінним.

Симетрійний підхід і пов'язана з ним процедура редукції дозволяють будувати інваріантні розв'язки широких класів нелінійних рівнянь у частинних похідних.

Параболічні системи описують важливі еволюційні, теплові, хімічні, дифузійні процеси. Ці рівняння широко досліджуються [1], [2], проте їхнє вивчення все ще далеке від завершення.

Добре відомо [3], що максимальною групою симетрії, яку допускає нелінійне рівняння реакції-дифузії

$$u_{x_0} + \lambda \Delta_3 u = F(u), \quad u_0 \equiv u_{x_0} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_0}, \quad x_0 \equiv t \tag{1}$$

з довільною гладкою функцією $F(u)$,є 7-параметрична група Евкліда $E(1,3)$, задана наступними генераторами:

$$P_t = \partial_t, \quad P_a = \partial_a, J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \tag{2}$$

де $\partial_a \equiv \partial_{x_a} \equiv {}^{\partial}/_{\partial_{x_a}}, \quad a, b = 1, 2, 3.$

Розширення симетрії рівняння (1) були досліджені для дійсного простору у роботі [4], для комплексного — у роботі [5]. Як показано у роботі [4], усі системи рівнянь дифузії (нагрівання) у формі

$$u^1_{x_0} + \lambda \Delta_3 u^1 = u^1 F_1\left(\frac{u^1}{u^2}\right), \quad u^2_{x_0} + \lambda \Delta_3 u^2 = u^2 F_2\left(\frac{u^1}{u^2}\right) \tag{3}$$

інваріантні щодо алгебри Галілея $AG(1,3)$, заданої генераторами (2) та

$$G_a = 2tP_a + \frac{1}{\lambda} x_a M, \quad M = u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}. \tag{4}$$

Як виявлено в [4], рівняння (3) з нелінійністю

$$F_1 = C_1 u_1 \left(\frac{u^1}{u^2}\right)^{\frac{2}{a_2 - a_1}}, \quad F_2 = C_2 u_2 \left(\frac{u^1}{u^2}\right)^{\frac{2}{a_2 - a_1}} \tag{5}$$

допускає однопараметричну групу масштабних перетворень $D(1)$, задану наступним генератором:

$$D = 2t\partial_0 + x_a \partial_a + a_1 u^1 \partial_{u^1} + a_2 u^2 \partial_{u^2}. \tag{6}$$

Група з генераторами (2), (4) та (6) називається розширеною групою Галілея $G(1,3)$.

У роботі [6] запропоновано повне розв'язання симетрійної класифікації системи двох дійсних рівнянь

$$\begin{gathered} u^j_0 + \lambda \Delta u^j = F_j\left(u^1, u^2\right), \quad j = 1, 2, \\ u_0 = \frac{\partial u}{\partial x_0}; \quad x_0 \equiv t; \quad u = u(x_0, x_1, x_2, x_3); \end{gathered} \tag{7}$$

$\Delta u = u_{11} + u_{22} + u_{33}; \quad u_{kk} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}; \quad F_1, F_2$ — деякі гладкі функції, що допускає розширені групи Евкліда і Галілея, з точністю до перетворень еквівалентності

$$\begin{gathered} u^j \to \tilde{u}^j = \sum_{k=1}^{2} \alpha_{jk} u^k + \beta^j, \quad j = 1, 2, \\ \alpha_{jk}, \beta^j - \text{довільні константи} \det \|\alpha_{jk}\| \neq 0. \end{gathered} \tag{8}$$

1. Симетрія системи $u_0^j + \lambda \Delta u^j = F_j\left(u^1, u^2, u^3\right), \quad j = 1, 2, 3.$

Тут ми пропонуємо повне розв'язання симетрійної класифікації системи трьох дійсних рівнянь

$$u_0^j + \lambda \Delta u^j = F_j\left(u^1, u^2, u^3\right),$$
$$u_0 = \frac{\partial u}{\partial x_0}; \quad x_0 \equiv t; \quad u = u\left(x_0, x_1, x_2, x_3\right); \quad \Delta u = u_{11} + u_{22} + u_{33}; \quad u_{kk} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}; \tag{9}$$
$$F_j - iii, j = 1, 2, 3$$

що допускає розширені групи Евкліда і Галілея, з точністю до невироджених лінійних перетворень залежних змінних

$$u^j \to \tilde{u}^j = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{jk} u^k + \beta^j, \quad j = 1, 2, 3,$$
$$\alpha_{jk}, \beta^j - ii\ i \quad \det \|\alpha_{jk}\| \neq 0, \tag{10}$$

які залишають незмінною диференційну структуру системи (9).

Теорема 1. *Система рівнянь у частинних похідних* (9) *інваріантна щодо розширеної групи Евкліда* $\tilde{E}(1,3) \quad =< E(1,3), D >$, *коли і лише коли еквівалентна одній із наступних систем (для всіх випадків* $F_j \equiv F_j(\omega_1, \omega_2)$, $j = 1, 2, 3$):

(1) $u_0^1 + \lambda \Delta u^1 = F_1 u_1^{\frac{a-2}{a}}$, $\quad u_0^2 + \lambda \Delta u^2 = F_2 u_2^{\frac{\lambda_2 - 2}{\lambda_2}}$, $\quad u_0^3 + \lambda \Delta u^3 = F_3 u_3^{\frac{\lambda_3 - 2}{\lambda_3}}$,
$\omega_1 = \frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^a}$, $\quad \omega_2 = \frac{u_1^{\lambda_3}}{u_3^a}$;

(2) $u_0^1 + \lambda \Delta u^1 = F_1 \exp\left(-\frac{2}{b} u_1\right)$, $\quad u_0^2 + \lambda \Delta u^2 = F_2 \exp\left\{(\lambda_2 - 2)\frac{u_1}{b}\right\}$,
$u_0^3 + \lambda \Delta u^3 = F_3 \exp\left\{(\lambda_3 - 2)\frac{u_1}{b}\right\}$, $\quad \omega_1 = \lambda_2 u_1 - b \ln u_2$, $\quad \omega_2 = \lambda_3 u_1 - b \ln u_3$;

(3) $u_0^1 + \lambda \Delta u^1 = \left\{F_1 + \frac{u_1}{u_2} F_2\right\} \exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_1}{u_2}\right\}$, $\quad u_0^2 + \lambda \Delta u^2 = F_2 \exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_1}{u_2}\right\}$,
$u_0^3 + \lambda \Delta u^3 = F_3 \exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_1}{u_2}\right\}$, $\quad \omega_1 = \frac{\exp\left(\frac{u_1}{u_2}\lambda_2\right)}{u_3}$, $\quad \omega_2 = \frac{\exp\left(\frac{u_1}{u_2}\lambda_1\right)}{u_2}$;

(4) $u_0^1 + \lambda \Delta u^1 = (F_1 + u_2 F_2) \exp\left(-\frac{2}{b} u_2\right)$, $\quad u_0^2 + \lambda \Delta u^2 = b F_2 \exp\left(-\frac{2}{b} u_2\right)$,

$$u_0^3 + \lambda \Delta u^3 = F_3 \exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_2}{b}\right\}, \quad \omega_1 = 2 b u_1 - u_2^2, \quad \omega_2 = \lambda_1 u_2 - b \ln u_3; \tag{11}$$

(5) $u_0^1 + \lambda \Delta u^1 = (F_1 + u_3 F_2) \exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_3}{b}\right\}$, $\quad u_0^2 + \lambda \Delta u^2 = b F_2 \exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_3}{b}\right\}$,
$u_0^3 + \lambda \Delta u^3 = F_3 \exp\left(-\frac{2}{b} u_3\right)$, $\quad \omega_1 = b \ln u_2 - \lambda_1 u_3$, $\quad \omega_2 = b\frac{u_1}{u_2} - u_3$;

(6) $u_0^1 + \lambda \Delta u^1 = \left(F_1 + \frac{u_2}{u_3} F_2 + \frac{u_1}{u_3} F_3\right) \exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_2}{u_3}\right\}$,
$u_0^2 + \lambda \Delta u^2 = b F_2 \exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_3}{b}\right\}$,
$u_0^3 + \lambda \Delta u^3 = F_3 \exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_2}{u_3}\right\}$, $\quad \omega_1 = \ln u_3 - \lambda_1 \frac{u_2}{u_3}$, $\quad \omega_2 = 2\frac{u_1}{u_3} - \left(\frac{u_2}{u_3}\right)^2$;

(7) $u_0^1 + \lambda \Delta u^1 = (F_1 + \omega_0 F_2 + \omega_0^2 F_3) \exp\left(-2\frac{u_3}{b}\right)$, $\quad u_0^2 + \lambda \Delta u^2 = (F_2 + 2\omega_0 F_3) \exp(-2\omega_0)$,
$u_0^3 + \lambda \Delta u^3 = 2 F_3 \exp(-2\omega_0)$, $\quad \omega_0 = \frac{u_3}{b}$, $\quad \omega_1 = 2u_2 - \frac{u_3^2}{b}$, $\quad \omega_2 = \frac{u_3^3}{3b^2} - \frac{u_2 u_3}{b} + u_1$;

(8) $u_0^1{+}\lambda\Delta u^1=(u_2F_1+u_1F_2)\exp\left(-\frac{2}{b}arctg\frac{u_1}{u_2}\right),\quad u_0^3{+}\lambda\Delta u^3=u_3F_3\exp\left(-\frac{2}{b}arctg\frac{u_1}{u_2}\right),$

$u_0^2{+}\lambda\Delta u^2=(u_2F_2-u_1F_1)\exp\left(-\frac{2}{b}arctg\frac{u_1}{u_2}\right),\quad \omega_1=\frac{\left(u_1^2+u_2^2\right)^{\lambda_1}}{u_3^{2a}},\quad \omega_2=\frac{\exp\left(\frac{\lambda_1}{b}arctg\frac{u_1}{u_2}\right)}{u_3};$

(9) $u_0^1+\lambda\Delta u^1=\left\{F_1\cos\left(\frac{b}{c}u_3\right)+F_2\sin\left(\frac{b}{c}u_3\right)\right\}\exp\left(\frac{\lambda_1-2}{c}u_3\right),$

$u_0^2+\lambda\Delta u^2=\left\{F_2\cos\left(\frac{b}{c}u_3\right)-F_1\sin\left(\frac{b}{c}u_3\right)\right\}\exp\left(\frac{\lambda_1-2}{c}u_3\right),$

$u_0^3+\lambda\Delta u^3=F_3\exp\left(-\frac{2}{c}u_3\right),\quad \omega_1=\ln\left(u_1^2+u_2^2\right)-2\lambda_1\frac{u_3}{c},\quad \omega_2=arctg\frac{u_1}{u_2}-b\frac{u_3}{c};$

(10) $u_0^j+\lambda\Delta u^j=0,\quad j=1,2,3,$

де F_1,F_2,F_3 *— довільні гладкі функції від* $\omega_1,\quad \omega_2,\quad a,\quad b,\quad c$ *— довільні константи, відмінні від нуля,* $\lambda,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ *— довільні константи.*

Суттєво, що базисні генератори $P_t\equiv P_0,P_a,J_{ab}$ *даються формулами*

$$P_0=\partial_0,\quad P_a=\partial_a,\quad J_{ab}=x_aP_b-x_bP_a,$$
$$\partial_0=\frac{\partial}{\partial x_0},\quad \partial_a=\frac{\partial}{\partial x_a},\quad x_0\equiv t,\quad a,b=1,2,3, \tag{12}$$

а генератори відповідних груп масштабних перетворень наступні:

$$\begin{aligned}
&1.\ D_1=2t\partial_0+x_a\partial_a+au_1\partial_{u_1}+\lambda_2u_2\partial_{u_2}+\lambda_3u_3\partial_{u_3};\\
&2.\ D_2=2t\partial_0+x_a\partial_a+b\partial_{u_1}+\lambda_2u_2\partial_{u_2}+\lambda_3u_3\partial_{u_3};\\
&3.\ D_3=2t\partial_0+x_a\partial_a+\lambda_1\left(u_1\partial_{u_1}+u_2\partial_{u_2}\right)+u_2\partial_{u_1}+\lambda_2u_3\partial_{u_3};\\
&4.\ D_4=2t\partial_0+x_a\partial_a+u_2\partial_{u_1}+b\partial_{u_2}+\lambda_1u_3\partial_{u_3};\\
&5.\ D_5=2t\partial_0+x_a\partial_a+\lambda_1\left(u_1\partial_{u_1}+u_2\partial_{u_2}\right)+u_2\partial_{u_1}+b\partial_{u_3};\\
&6.\ D_6=2t\partial_0+x_a\partial_a+\lambda_1\left(u_1\partial_{u_1}+u_2\partial_{u_2}+u_3\partial_{u_3}\right)+u_2\partial_{u_1}+u_3\partial_{u_2};\\
&7.\ D_7=2t\partial_0+x_a\partial_a+u_2\partial_{u_1}+u_3\partial_{u_2}+b\partial_{u_3};\\
&8.\ D_8=2t\partial_0+x_a\partial_a+\lambda_1\left(u_1\partial_{u_1}+u_2\partial_{u_2}\right)+b\left(u_2\partial_{u_1}-u_1\partial_{u_2}\right)+\lambda_2u_3\partial_{u_3};\\
&9.\ D_9=2t\partial_0+x_a\partial_a+\lambda_1\left(u_1\partial_{u_1}+u_2\partial_{u_2}\right)+b\left(u_2\partial_{u_1}-u_1\partial_{u_2}\right)+c\partial_{u_3};\\
&10.\ D_{10}=2t\partial_0+x_a\partial_a,
\end{aligned} \tag{13}$$

усюди вище $a,b,c\neq 0$.

Теорема 2. *Система РЧП (9) інваріантна щодо групи Галілея* $G(1,3)=<E(1,3),G_a,M>$*, коли і лише коли еквівалентна системі*

$$u_0^j+\lambda\Delta u^j=u^jF_j\left(\frac{u_1}{u_2},\frac{u_2}{u_3}\right),\quad j=1,2,3,\ \text{де}F_j\ \text{— довільні гладкі функції.} \tag{14}$$

Суттєво, що базисні генератора P_0,P_a,J_{ab} даються формулами (12), а оператори Галілея G_a можуть мати лише такий вигляд:

$$G_a=t\partial_a+x_aM,\quad a=1,2,3,\ \text{де}\ M=\frac{1}{2\lambda}u^i\partial_{u_i},\quad i=\overline{1,3}. \tag{15}$$

Теорема 3. *Система РЧП (9) інваріантна щодо розширеної групи Галілея $G_1(1,3) =< G(1,3), D >$, коли і лише коли еквівалентна одній із наступних систем:*

$$
\begin{aligned}
&1.\ u_0^k + \lambda\Delta u^k = F^k(\omega)\cdot u_k \cdot \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{\frac{2}{\lambda_2-\lambda_1}}, \quad k=1,2,3, \quad \omega = u_3^{\lambda_2-\lambda_1} u_2^{\lambda_1-\lambda_3} u_1^{\lambda_3-\lambda_2};\\
&2.\ u_0^1 + \lambda\Delta u^1 = \{F_1(\omega) u_2 + F_2(\omega) u_1\}\omega_0, \quad u_0^2 + \lambda\Delta u^2 = F_2(\omega) u_2\omega_0,\\
&\quad \omega_0 = \exp\left(-2\frac{u_1}{u_2}\right), \quad u_0^3 + \lambda\Delta u^3 = F_3(\omega) u_3\omega_0, \quad \omega = \frac{u_2}{u_3}\exp\left\{\frac{u_1}{u_2}(\lambda_2-\lambda_1)\right\};\\
&3.\ u_0^1 + \lambda\Delta u^1 = \{F_1(\omega) u_3 + F_2(\omega) u_2 + F_3(\omega) u_1\}\omega_0,\\
&\quad u_0^2 + \lambda\Delta u^2 = \{F_2(\omega) u_3 + F_3(\omega) u_2\}\omega_0,\\
&\quad u_0^3 + \lambda\Delta u^3 = F_3(\omega) u_3\omega_0, \quad \omega_0 = \exp\left(-2\frac{u_2}{u_3}\right), \quad \omega = 2\frac{u_1}{u_2} - \left(\frac{u_2}{u_3}\right)^2;\\
&4.\ u_0^1 + \lambda\Delta u^1 = \{F_1(\omega) u_2 + F_2(\omega) u_1\}\omega_0,\ u_0^2 + \lambda\Delta u^2 = \{F_2(\omega) u_2 - F_1(\omega) u_1\}\omega_0,\\
&\quad u_0^3 + \lambda\Delta u^3 = F_3(\omega) u_3\omega_0, \quad \omega_0 = \exp\left(-\frac{2}{b}\operatorname{arctg}\frac{u_1}{u_2}\right),\\
&\quad \omega = \frac{u_1^2+u_2^2}{u_3^2}\exp\left\{\frac{2}{b}(\lambda_1 - a)\operatorname{arctg}\frac{u_1}{u_2}\right\};\\
&5.\ u_0^k + \lambda\Delta u^k = 0, \quad k=1,2,3,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

де F_1, F_2, F_3 — довільні гладкі функції, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, a, b$ — довільні сталі, $b \neq 0$.

Суттєво, що базисні оператори P_0, P_a, J_{ab}, G_a, M даються формулами (12), (15), а генератори відповідних груп масштабних перетворень виглядають так:

$$
\begin{aligned}
&1.\ D_1 = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + \lambda^j u_j \partial_{u_j}, \quad j=\overline{1,3};\\
&2.\ D_2 = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + \lambda_1(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + u_2\partial_{u_1} + \lambda_2 u_3\partial_{u_3};\\
&3.\ D_3 = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + \lambda_1(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2} + u_3\partial_{u_3}) + u_2\partial_{u_1} + u_3\partial_{u2};\\
&4.\ D_4 = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + a(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + b(u_2\partial_{u_1} - u_1\partial_{u_2}) + \lambda_1 u_3\partial_{u_3};\\
&5.\ D_5 = 2t\partial_0 + x_a\partial_a, b \neq 0.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Доведения теорем 1-3 виконані за допомогою алгоритму Лі [1]. У рамках підходу Лі оператор симетрії для системи (9) шукається у формі

$$
\begin{gathered}
X = \xi^\mu(x,u)\partial_\mu + \eta^k(x,u)\partial_{u^k}, \quad k=1,2,3,\\
\text{де } \xi^\mu(x,u), \quad \eta^k(x,u) - \text{ деякі гладкі функції.}
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Для системи РЧП (9) необхідна і достатня умова бути інваріантною щодо групи, заданої інфінітезимальним оператором (18), записується так:

$$\tilde{X}\left(u_0^j+\lambda\Delta u^j-F_j\right)\Bigg|_{\substack{u_0^1+\lambda\Delta u^1-F_1=0;\\ u_0^2+\lambda\Delta u^2-F_2=0;\\ u_0^3+\lambda\Delta u^3-F_3=0;}} = 0,\ j=1,2,3, \tag{19}$$

де $\tilde{X}$ - вживається для другого продовження оператора X:

$$\tilde{X}\equiv \underset{2}{X} = X+\tau^k_{v_1}\cdot\frac{\partial}{\partial u^k_{v_1}}+\tau^k_{v_1v_2}\frac{\partial}{\partial u^k_{v_1v_2}}, \tag{20}$$

$$\tau^k_{v_1}=\eta^k_{v_1}+u^{l_1}_{v_1}\eta^k_{u^{l_1}}-u^k_v\left(\xi^v_{v_1}+u^{l_1}_{v_1}\xi^v_{u^{l_1}}\right), \tag{21}$$

$$\tau^k_{v_1v_2}=\eta^k_{v_1v_2}+u^l_{v_1}\eta^k_{v_2u^l}+u^l_{v_2}\eta^k_{v_1u^l}-u^k_v\xi^v_{v_1v_2}+u^{l_1}_{v_1}u^{l_2}_{v_2}\eta^k_{u^{l_1}u^{l_2}}-u^k_v\left(u^l_{v_1}\xi^v_{v_2u^l}+u^l_{v_2}\xi^v_{v_1u^l}\right)+$$
$$+u^l_{v_1v_2}\eta^k_{u^l}-u^k_{v_1v}\xi^v_{v_2}-u^k_{v_2v}\xi^v_{v_1}-u^k_vu^{l_1}_{v_1}u^{l_2}_{v_2}\xi^v_{u^{l_1}u^{l_2}}-u^l_{v_1v_2}u^k_v\xi^v_{u^l}-u^k_{v_1v}u^l_{v_2}\xi^v_{u^l}-u^k_{v_2v}u^l_{v_1}\xi^v_{u^l}. \tag{22}$$

Внаслідок визначальних рівнянь:

$$\begin{cases}\xi^i=b^{ij}x_j+\dot{d}\cdot x_i+e^i;\ \xi^0=-2d\\ \eta^k=-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{2}\ddot{d}x^2+\dot{e}x+h^k_{\sum\limits_k}\right)u_k+R^{kl}_{k\neq l}u_l+P^k\end{cases}, \tag{23}$$

де e^i, d, h^k, R^{kl} – функції від t, а $P^k=P^k(t,x)$, $\quad b^{ij}=const$.

Функції ξ^μ та η^k повинні задовольняти рівняння:

$$\eta^k_0+\lambda\Delta\eta^k+\eta^k_{u_l}F^l-\eta^lF^k_{u_l}-F^k\xi^0_0=0. \tag{24}$$

Із (23), (24) випливає, що система РЧП (9) інваріантна щодо групи Евкліда $E(1,3)$, заданої генераторами (10), при довільних F^1, F^2. Описати всі функції F^1, F^2 – такі, що система (9) допускає розширену групу Евкліда $\tilde{E}(1,3)=<E(1,3),D>$, означає розв'язати наступні дві проблеми:

* описати всі генератора D у формі (23), які разом із операторами (10) задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Лі групи $\tilde{E}(1,3)$:

$$\begin{gathered}[P_a,J_{bc}]=\delta_{ab}P_c-\delta_{ac}P_b;\quad [P_a,P_b]=[P_0,P_a]=[P_0,J_{bc}]=0;\\ [J_{ab},J_{cd}]=\delta_{ad}J_{bc}+\delta_{bc}J_{ad}-\delta_{ac}J_{bd}-\delta_{bd}J_{ac};\\ [P_0,D]=2P_0;\quad [P_a,D]=P_a;\quad [J_{ab},D]=0.\end{gathered} \tag{25}$$

* розв'язати систему РЧП (24) для кожного одержаного оператора D.

Внаслідок КС (25) та визначальних рівнянь оператор масштабних перетворень D отримує вигляд:

$$D=2t\partial_0+x_i\partial_i+\left(R^{kl}u_e+P^k\right)\partial_{u_k}, \tag{26}$$

а визначальне рівняння для F^j (24) стає таким:

$$\eta^k F^j_{u_k} + \xi^0_0 F^j - \eta^i_{u_e} F^l = 0, \text{ тобто } \left(R^{kl} u_e + P^k\right) F^j_{u_k} + 2F^j - R^{jl} F^l = 0. \qquad (27)$$

З точністю до перетворень (10) оператор D (26) належить до одного з класів (13), а розв'язки рівнянь (27) для кожного зображення (13) дають теорему 1.

Для доведения теореми 2 запишемо комутаційні співвідношення алгебри Лі групи Галілея $G(1,3) =< E(1,3), M, G_a >$, які повинні задовольняти оператори Галілея G_a і центр групи M:

$$\begin{gathered}[G_a, J_{bc}] = \delta_{ab} G_c - \delta_{ac} G_b; \quad [G_a, G_b] = 0; \quad [P_0, G_a] = P_a; \\ [P_b, G_a] = \delta_{ab} M; \quad [M, J_{ab}] = [P_0, M] = [P_a, M] = [M, G_a] = 0.\end{gathered} \qquad (28)$$

Внаслідок КС (28) G_a – фіксовані, а оператор M — єдиний:

$$G_a = t\partial_a + x_a M; \quad a = 1, 2, 3, \quad M = \frac{u_k}{2\lambda} \partial_{u_k}. \qquad (29)$$

Визначальні рівняння (24) перепишуться так:

$$u_l F^k_{u_l} - F^k = 0, \quad k, l = 1, 2. \qquad (30)$$

Як розв'язок (29), отримуємо систему (14), що завершує доведення теореми 2.

Тепер, щоб довести теорему 3, запишемо КС розширеної групи Галілея $G(1,3) =< E(1,3), M, D >$, які мають бути виконані для оператора масштабних перетворень D, операторів Галілея G_a і центра M:

$$[D, G_a] = G_a; \quad [D, M] = 0. \qquad (31)$$

Внаслідок цих КС оператори G_a і M залишаються у вигляді (15), а оператор D отримує форму

$$D = 2t\partial_0 + x_i \partial_i + R^{kl} u_e \partial_{u_k}.$$

Тому система (9) повинна одночасно мати і вигляд (14), і одну з наступних форм:

1. $u_0^j + \lambda\Delta u^j = F_j u_j^{\frac{\lambda_j - 2}{\lambda_j}}, \quad j = 1,2,3, \quad \omega_1 = \frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}, \quad \omega_2 = \frac{u_1^{\lambda_3}}{u_3^{\lambda_1}};$

2. $u_0^1 + \lambda\Delta u^1 = \left(F_1 + \frac{u_1}{u_2}F_2\right)\exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_1}{u_2}\right\}, \quad u_0^2 + \lambda\Delta u^2 = F_2 \exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_1}{u_2}\right\},$

$$u_0^3 + \lambda\Delta u^3 = F_3 \exp\left\{(\lambda_2 - 2)\frac{u_1}{u_2}\right\}, \quad omega_1 = \frac{\exp\left(\frac{u_1}{u_2}\lambda_2\right)}{u_3}, \quad \omega_2 = \frac{\exp\left(\frac{u_1}{u_2}\lambda_1\right)}{u_2};$$

3. $u_0^1 + \lambda\Delta u^1 = \left(F_1 + \frac{u_2}{u_3}F_2 + \frac{u_1}{u_3}F_3\right)\exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_2}{u_3}\right\},$

$$u_0^2 + \lambda\Delta u^2 = \left(F_2 + \frac{u_2}{u_3}F_3\right)\exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_2}{u_3}\right\},$$

$$u_0^3 + \lambda\Delta u^3 = F_3 \exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_2}{u_3}\right\}, \quad \omega_1 = u_3 \exp\left(-\lambda_1 \frac{u_2}{u_3}\right), \quad \omega_2 = 2\frac{u_1}{u_3} - \left(\frac{u_2}{u_3}\right)^2;$$

4. $u_0^1 + \lambda\Delta u^1 = (u_2 F_1 + u_1 F_2)\exp\left\{-\frac{2}{b}\operatorname{arctg}\frac{u_1}{u_2}\right\},$

$$u_0^2 + \lambda\Delta u^2 = (u_2 F_2 - u_1 F_1)\exp\left\{-\frac{2}{b}\operatorname{arctg}\frac{u_1}{u_2}\right\},$$

$$u_0^3 + \lambda\Delta u^3 = u_3 F_3 \exp\left\{-\frac{2}{b}\operatorname{arctg}\frac{u_1}{u_2}\right\},$$

$$\omega_1 = \frac{(u_1^2 + u_2^2)^{\lambda_1}}{u_3^{2a}}, \quad \omega_2 = u_3 \exp\left\{-\frac{\lambda_1}{b}\operatorname{arctg}\frac{u_1}{u_2}\right\};$$

5. $u_0^j + \lambda\Delta u^j = 0, \quad j = 1,2,3,$ де $F^j = F^j(\omega_1, \omega_2),$

$$(32)$$

які є наслідком визначальних рівнянь (27) з $P^k = 0$ для оператора D у формі (17).

Розглянемо згадані 5 випадків за чертою. Покажемо, як із інваріантів ω_1, ω_2 набору (32) утворюється інваріант ω в наборі (16).

Нехай $\omega_1 = \frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}, \quad \omega_2 = \frac{u_1^{\lambda_3}}{u_3^{\lambda_1}}, \quad \Omega_1 = \frac{u_1}{u_2}, \quad \Omega_2 = \frac{u_2}{u_3}, \quad \omega = u_3^{\lambda_2 - \lambda_1} u_2^{\lambda_1 - \lambda_3} u_1^{\lambda_3 - \lambda_2}. \quad (33)$

Слід показати, що $H_k(\omega)\, u_k \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{\frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1}} = u_k G_k(\Omega_1, \Omega_2) = F_k(\omega_1, \omega_2)\, u_k^{\frac{\lambda_k - 2}{\lambda_k}}. \quad (34)$

З одного боку $\omega = \left(\frac{u_2}{u_3}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{u_3}{u_1}\right)^{\lambda_2}\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{\lambda_3} = \Omega_2^{\lambda_1}(\Omega_1\Omega_2)^{-\lambda_2}\Omega_1^{\lambda_3} = \Omega_1^{\lambda_3 - \lambda_2}\Omega_2^{\lambda_1 - \lambda_2}.$

$$\text{Тому } H_k(\omega)\, u_k \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{\frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1}} = u_k G_k(\Omega_1, \Omega_2). \quad (35)$$

З іншого боку , $\omega^{\lambda_1} = \left\{ \left(\frac{u_2^{\lambda_1}}{u_1^{\lambda_2}} \right) \left(\frac{u_1^{\lambda_3}}{u_3^{\lambda_1}} \right) \left(\frac{u_3^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_3}} \right) \right\}^{\lambda_1} = \left\{ \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\omega_1^{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \right\}^{\lambda_1} = \omega_1^{\lambda_3 - \lambda_1} \omega_2^{\lambda_1 - \lambda_2}.$

Крім того, $\omega_1^{\frac{2}{\lambda_k(\lambda_2-\lambda_1)}} \cdot u_k^{-\frac{2}{\lambda_k}} = \left(\frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}} u_k^{\lambda_1-\lambda_2} \right)^{\frac{2}{\lambda_k(\lambda_2-\lambda_1)}} = \left\{ \left(\frac{u_1}{u_k} \right)^{\lambda_2} \left(\frac{u_k}{u_2} \right)^{\lambda_1} \right\}^{\frac{2}{\lambda_k(\lambda_2-\lambda_1)}} =$

$$= \begin{cases} \Omega_1^{\frac{2}{\lambda_2-\lambda_1}}, k = 1, 2, \\ \Omega_1^{\frac{2}{\lambda_2-\lambda_1}} \cdot \omega^{\frac{2}{\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)}}, k = 3. \end{cases}$$

$$\text{Тому } H_k(\omega) u_k \left(\frac{u_1}{u_2} \right)^{\frac{2}{\lambda_2-\lambda_1}} = F_k(\omega_1, \omega_2) u_k^{\frac{\lambda_k-2}{\lambda_k}}. \tag{36}$$

Разом умови (35) і (36) дають умови (34).

$$\text{Умова } \left\{ F_1(\omega_1, \omega_2) + \frac{u_1}{u_2} F_2 \right\} \exp \left\{ (\lambda_1 - 2) \frac{u_1}{u_2} \right\} = u_1 G_1 \left(\frac{u_1}{u_2}, \frac{u_2}{u_3} \right), \tag{37}$$

$$F_2 \exp \left\{ (\lambda_1 - 2) \frac{u_1}{u_2} \right\} = u_2 G_2 \left(\frac{u_1}{u_2}, \frac{u_2}{u_3} \right), \quad F_3 \exp \left\{ (\lambda_2 - 2) \frac{u_1}{u_2} \right\} = u_3 G_3 \left(\frac{u_1}{u_2}, \frac{u_2}{u_3} \right)$$

еквівалентна умові

$$F_1(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_2} H_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right), \quad F_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_2} H_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right),$$

$$F_3(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_1} H_3 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right), \quad \omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Аналогічно до (37), маємо умову $F_k(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 H_k(\omega_2), \quad k = 1, 2, 3, \omega = \omega_2.$

$$F_k(\omega_1, \omega_2) = H_k(\omega), \text{ де } \omega^{\lambda_1} = \omega_1 \cdot \omega_2^{2(a-\lambda_1)}, \quad k = 1, 2, 3.\ 5. \quad H_k = 0.$$

Отже, система (9), яка допускає одночасно оператори Галілея G_a і дилатації D, повинна належати набору (16) з точністю до перетворень еквівалентності (10). Теорему 3 доведено.

Зауваження. Розглянемо для першого випадку спосіб знаходження інваріанта ω

Слід розв'язати рівняння $u_k G_k \left(\frac{u_1}{u_2}, \frac{u_1}{u_3} \right) = F_k \left(\frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}, \frac{u_1^{\lambda_3}}{u_3^{\lambda_1}} \right) u_k^{\frac{\lambda_k-2}{\lambda_k}}$. Враховуючи рівність $G_k \left(\frac{u_1}{u_2}, \frac{u_1}{u_3} \right) = G_k \left(\frac{\alpha_1 u_1}{\alpha_1 u_2}, \frac{\alpha_1 u_1}{\alpha_1 u_3} \right)$,
маємо $F_k \left\{ \alpha_1^{\lambda_2-\lambda_1} \frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}, \alpha_1^{\lambda_3-\lambda_1} \frac{u_1^{\lambda_3}}{u_3^{\lambda_1}} \right\} = \alpha_1^{\frac{2}{\lambda_k}} F_k \left(\frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}, \frac{u_1^{\lambda_3}}{u_3^{\lambda_1}} \right)$.

Перепишемо його у нових позначеннях: $f \left(\alpha^{\beta_1} \omega_1, \alpha^{\beta_2} \omega_2 \right) = \alpha f(\omega_1, \omega_2)$,
де $\alpha = \alpha_1^{\frac{2}{\lambda_k}}, \quad \beta_1 = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2} \lambda_k, \quad \beta_2 = \frac{\lambda_3-\lambda_1}{2} \lambda_k, \quad \omega_1 = \frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}, \quad \omega_2 = \frac{u_1^{\lambda_3}}{u_3^{\lambda_1}}.$

Після елементарних перетворень воно набуває вигляд: $\beta_1 \omega_1 f_{\omega_1} + \beta_2 \omega_2 f_{\omega_{21}} = f(\omega_1, \omega_2)$. Розв'язком є $f = F_k(\tilde{\omega}) \omega_1^{\frac{1}{\beta_1}}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega_1^{\beta_2}}{\omega_2^{\beta_1}}$.

У початкових позначеннях: $\omega = \tilde{\omega}^{\frac{2}{\lambda_k \lambda_1}} = \frac{\left(\frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}}\right)^{\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_1}}}{\left(\frac{u_1^{\lambda_3}}{u_3^{\lambda_1}}\right)^{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}}} = u_1^{\lambda_3-\lambda_2} u_3^{\lambda_2-\lambda_1} u_2^{\lambda_1-\lambda_3}$.

Автор висловлює вдячність п. Роману Чернізі за увагу і корисну співпрацю. Дане дослідження підтримане фондом наукового розвитку КІРУЕ.

Література

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.М. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с,
2. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
3. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений математической физики. – К.: Наук. думка, 1989. – 336 с.
4. W.I. Fushchych, R.M. Cherniha // J. Phys. A 28 (1995) 5569-5579.
5. W.I. Fushchych, I.A. Yegorchenko // Acta Appl. Math. 28 (1996) 69-52.
6. П.В. Марко. Симетрійний аналіз системи нелінійніх рівнянь дифузії // Наукові записки. – Випуск 43. - Серія: Фізико-математичні науки. – Кіровоград: КДПУ, 2002. – 139 с.