

ГЛАДКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ КОММИВОЯЖЕРА

Файзуллин Р.Т., Файзуллин Р.Р.

ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
Россия, Омск-77 пр-т Мира 55А, 644077
E-MAIL: rtf@univer.omsk.su

Abstract.

We propose heuristic algorithm for traveling salesman problem with Euclidian metric based on functional approach for finding approximation as smooth trajectory.

Задача коммивояжера — классический пример труднорешаемой задачи. Известно, что даже в простейшей постановке (евклидова метрика) задача является NP-полной [1]. Алгоритмы нахождения решения задачи можно условно разделить на две группы: точные и приближенные. Существующие алгоритмы нахождения точного решения сводятся, в сущности, к организации полного перебора вариантов. Несмотря на то, что многие из них находят решение достаточно быстро, для каждого такого алгоритма существует широкая область задач, на которой приходится перебирать все $n!$ путей.

Из быстрых приближенных алгоритмов наиболее известен алгоритм ИБ — «иди к ближайшему соседу». Суть его такова: мы начинаем обход из произвольного города и на каждом шаге выбираем ближайший еще не пройденный пункт. Для задачи с неравенством треугольника известно, что алгоритм ИБ является асимптотически сходящимся, т.е. он сходится к оптимальному решению но вероятности с ростом числа точек (Э.Гимади) и для конкретных значений N результат превышает точное решение не более чем в $1/2(\lceil \log_2 N \rceil + 1)$ раза [1].

«Неудачи» ИБ связаны с тем, что алгоритм по своей сути является локальным и полученный приближенный путь есть аппроксимация кусочно-непрерывной функции.

Представляется целесообразным попытаться построить процедуру нахождения непрерывного пути, основанную на минимизации некоторого естественного функционала, зависящего от длины пути, или точнее поиска достаточно гладкой кривой, аппроксимирующей путь, в вспомогательном пространстве высокой размерности.

Для этого рассмотрим задачу поиска минимума функционала от $2N$ переменных на конечном наборе заданных точек с координатами (x_i, y_i) , $i = 1 \dots N$:

$$J(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1, \dots, N-1} ((x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2)^p + ((x_1 - x_N)^2 + (y_1 - y_N)^2)^p \quad (1)$$

где p может принимать значения 1 или 0.5. Случай $p = 0.5$ отвечает задаче коммивояжера с евклидовым расстоянием [1]. Условия минимума функционала (1) при $p = 1$, сводятся к однородной системе алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

где матрица A ленточная и для $p = 1$ элементы матрицы равны:

$$a_{ii} = 2, \quad a_{i,i\pm 1} = -1, \quad a_{1,N} = -1, \quad a_{N,1} = -1$$

Если же $p = 0.5$, то

$$a_{ii} = \frac{1}{\sqrt{(x_{i-1} - x_i)^2 + (y_{i-1} - y_i)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}$$

$$a_{ii\pm 1} = -\frac{1}{\sqrt{(x_{i\pm 1} - x_i)^2 + (y_{i\pm 1} - y_i)^2}}$$

Обратим внимание на то, что левая часть (2) и при $p = 1$ и $p = 0.5$ задает аппроксимацию оператора краевой задачи:

$$\begin{aligned} -X'' &= \lambda X & X(0) &= X(\pi), Y(0) = Y(\pi) \\ -Y'' &= \lambda Y \end{aligned} \quad (3)$$

Каждому собственному числу λ_i отвечает собственный вектор V_i и его приближения V_i^h согласно аппроксимации, задаваемой левой частью (2). Для произвольного пути коммивояжера, определяемого набором $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ можно записать разложение по приближенным значениям собственных векторов:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \alpha_i V_i \quad (4)$$

Результат воздействия левой части (2) на вектор $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ можно записать в виде:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i V_i \quad (5)$$

и наименьшее значение нормы вектора (5), не обязательно равное нулю, достигается на каком-то из возможных путей, которые можно сконструировать из заданного набора точек. Также, очевидно, что величина нормы (5) зависит от степени убывания коэффициентов разложения по базису собственных векторов в (5), т.е. чем быстрее убывают эти коэффициенты, тем относительно меньше норма, т.е. длина пути.

Учитывая известный вид собственных функций краевой задачи (3), можно построить процедуру исчерпывания, аналогичную методу наименьших квадратов, для поиска наиболее гладкой кривой, аппроксимирующей приближенное решение задачи коммивояжера.

Алгоритм исчерпывания заключается в следующем: на каждом шаге, с помощью метода наименьших квадратов выбирается такой коэффициент при известной собственной функции, чтобы получившееся слагаемое в (5) было наименее удалено в норме L_2 от совокупности текущих координат ТК (ТК – исходные координаты точек минус сумма значений предыдущих приближений). На первом шаге мы выбираем эллипс, наименее уклоняющийся от заданного множества точек, т.е. определяем первые гармоники разложения. Затем, проектируя заданные точки на эллипс, мы получаем новые координаты (s_i^0, n_i^0) , связанные с эллипсом и последовательно находим следующие гармоники. Очевидно, что число рассматриваемых собственных функций ограничено критерием Найквиста.

После получения гладкой кривой строится ломаная, соединяющая точки в порядке их следования вдоль финальной кривой, т.е. по порядку возрастания координаты s . Для локальной оптимизации используется алгоритм, аналогичный сортировке пузырьком, т.е. берутся две или более соседних точки, и маршрут обхода (ломаная) модифицируется перестановкой локального обхода этих точек, если это, конечно, приводит к уменьшению длины пути.

Если априори известно, что данные представляют собой «след» траектории, то алгоритм будет эффективен. С другой же стороны мониторинг характера убывания первых коэффициентов Фурье позволяет в режиме «on-line» делать вывод о наличии, или отсутствии траектории. Так, если первые коэффициенты Фурье убывают по закону $1/n$, т.е. так же, как и для произвольного множества равномерно распределенных точек, можно сделать обоснованный вывод о том, что опорные точки не лежат на траектории.

Необходимо отметить, что, представленный алгоритм ГК (алгоритм гладкой кривой) является по всей видимости только эвристикой т.к.:

- (1) не доказано, что выбор эллипса на первом шаге осуществляется единственным образом, т.е. возможно, что находится всего лишь локальный экстремум,
- (2) даже если решение первоначальной задачи единственно, то изменение порядка следования точек вдоль кривых вызывает необходимость применять обратную рекурсию, для уточнения ранее найденных коэффициентов Фурье для новой кривой.

Как показал вычислительный эксперимент, алгоритм ГК дает стабильно лучшие результаты, чем алгоритм ИБ (80 – 90% длины пути ИБ для $n \leq 1000$), как для случайно сгенерированных данных, так и для известных тестовых данных (таблица 1). Данное обстоятельство позволило эффективно применить ГК в задачах распознавания треков элементарных частиц в экспериментах физики высокой энергии [2]. Основываясь на предложенном подходе, удалось разработать модификацию алгоритма эластичной нейронной сети [3], учитывающую априорную гладкость траекторий частиц, регистрируемых приборами в экспериментах физики высокой энергии.

ТАБЛИЦА 1. Сравнение результатов работы алгоритмов ГК и ИБ с известными оптимальными решениями, использовались данные: www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/tsp/

Пример и число пунктов	Оптимальный результат	Результат алгоритма «приближение кривой»	Результат алгоритма «иди к ближнему»
Bcr1in52	7542	8731	8980
att532	27686	104910	110300
a280	2586	3129	3169
d657	48912	64909	61261
dsj1000	18660188	26231478	24395823
fl1577	22249	30963	29091
ali535	2401	2532	2652
bays29	9291	9415	9895
bier127	118282	138887	129397
ch130	6110	7088	7467
ch150	6528	7746	8141
eil101	629	734	832
eil51	426	469	512
gr120	1666	1904	2086
kroA100	21282	22498	26762
kroC100	20749	22314	25810
lin105	14379	16629	20213
pr76	108159	119489	153380
st70	675	746	795
ulysses16	74	77	104
pr1002	259045	373187	322323

На рисунке 1 приведена графическая иллюстрация работы алгоритма на случайном наборе точек, $n = 1000$. Как можно видеть, путь ГК (без модификации) при большом n содержит высокочастотные колебания малой амплитудой и при больших n результаты ИБ несколько лучше чем результаты полученные с помощью ГК. С другой стороны решения задачи коммивояжера, полученные с помощью алгоритма ГК при малом числе точек, почти не отличаются от оптимальных (рис. 2). Отметим также, что для малого числа точек аппроксимирующая кривая, является одновременно хорошим приближением и как место расстановки точек Штейнера, для приближенного решения задачи Штейнера методом гравитационной аналогии [4].

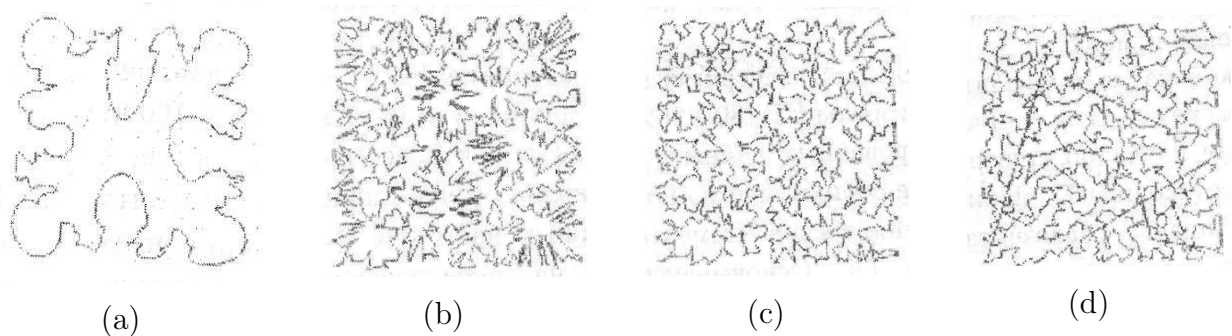


Рис. 1. Слева направо: (а) промежуточный шаг построения гладкой кривой, (б) результат работы алгоритма ГК, (с) результат работы алгоритма ГК – эластичная сеть, (д) результаты работы ИБ

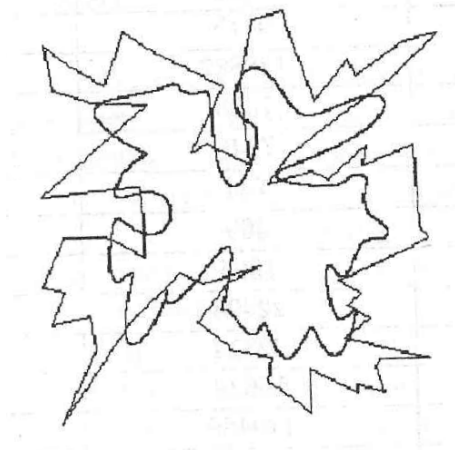


Рис. 2. Пример работы алгоритма ГК на малом числе точек (st70), кривая и окаймляющая её ломаная, близкая к оптимальному пути.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гэри, Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи Мир, 1984,
2. Горбунов С.В., Кисель И.В., Конотопская Е.В., Файзуллин Р.Т. Сравнение методов гарантированной гладкости и эластичной сети для задачи коммивояжера на плоскости // Сообщение (препринт) ОИЯИ. – 1997. – P5 – 97 – 258, Дубна,1.
3. Kisel,I., Kovalenko V. Estetic net for broken multiple scattered tracks // Computer Physics Communications. – 1996. – 98. – P. 45-51
4. Богаченко Н.Ф., Файзуллин Р.Т. Механические аналогии в задаче Штейнера // Математические структуры и моделирование: Сб. научн. Тр. Под ред А.Г. Гуца. Омск: Омск.гос.университет. – 2002. Вып.8. – С. 80-87.