**УДК 519.8**

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЧАСТИЧНОЙ УПОРЯДОЧЕННОСТИ ИСХОДОВ

**В.В.Розен**

Саратовский государственный университет
г.Саратов,ул. Астраханская,83,410012
e-mail: *RozenVV@info.sgu.ru*

**Abstract.**
We consider a decision making problems in which the goal structure by a partial order relation is given. The main problem for such models is an extension of an order relation on the set of probability measures.One method for such extension is proposed.The existence of optimal decision for games with ordered outcomes,for games against nature and for vector optimization problem with ordered set of criteria is proved.

## Введение

Основной метод анализа целевых структур, используемый в настоящее время в исследовании операций, теории принятия решений и теории игр, состоит в задании на множестве исходов (ситуаций, состояний) функции полезности. Впервые этот метод был обоснован аксиоматически Нейманом и Моргенштерном [1]. Однако на практике посторение функции полезности (целевой функции)вызывает значительные трудности, связанные со следующими обстоятельствами.

1) Для существования функции полезности необходимо, чтобы структура предпочтений представляла собой с формально логической стороны отношение линейного квазипорядка, то есть являлась транзитивным бинарным отношением, удовлетворяющим аксиоме линейности(полноты).
2) Задачи управления реальными системами являются, как правило, многокритериальными. Поэтому при посторении целевой функции возникает проблема агрегирования локальных критериев, измеренных в разных шкалах, в единый числовой показатель.

Решение этих проблем требует очень большого объема дополнительной информации о соотношении локальных критериев. Известный парадокс Эрроу [2] показывает, что сложности в построении результирующего линейного квазипорядка на базе заданных линейных квазипорядков по частным критериям носят не технический, а принципиальный характер.

*Предлагаемый нами подход* состоит в то, что целевая структура задачи принятия решения формализуется не в виде целевой функции,а в виде отношения (частичного)порядка, то есть рефлексивного, транзитивного и антисимметрического бинарного отношения.

Необходимо отметить, что прямой перенос понятий, методов и утверждений, известных для моделей принятия решений с целевыми функциями, на модели с отношениями предпочтения, во-первых, не всегда возможен, во-вторых, требует введения дополнительных нетривиальных конструкций и, в-третьих, иногда приводит к неверным результатам. Рассмотрим в качестве примера введение понятия оптимальной стратегии для антагонистических игр с упорядоченными исходами. Такая игра задается в виде

$$G = (X, Y, A, \omega, F), \tag{1}$$

где $X$ - множество стратегий игрока 1, $Y$ - множество стратегий игрока 2, $A$- множество исходов, $F : X \times Y \to A$ - функция реализации, $\omega$ - отношения порядка на $A$, выражающее предпочтения игрока 1 (предпочтения игрока 2 задаются обратным отношением порядка $\omega^{-1}$). Поскольку в игре $G$ может не существовать $inf_y F(x, y)$, различными авторами предлагалось в качестве оценки стратегии х рассматривать множество $V_x = \{a \in A : \forall y \in Y(F(x, y)) \geq^{\omega} \alpha)\}$

Далее вводится отношение $\alpha$ - доминированная стратегий игрока 1 по формуле: $x_1 \gtrsim^{\alpha} x_2 \Leftrightarrow V x_1 \supseteq V x_2$.

Для антагонистической игры с числовой функцией выигрыша $f(x, y)$ условие $x_1 \gtrsim^{\alpha} x_2$ тому, что $inf_y f(x_1, y) \geq inf_y f(x_2, y)$. Таким образом, в этом случае $\alpha$ - наибольшая стратегия игрока 1 совпадает с его максиминной стратегией. Представляется "почти очевидным", что понятие $\alpha$ - наибольшей стратегии является естественным обобщением понятия максиминной стратегии. Однако это не так. Дело в том, что принцип $\alpha$ - доминирования стратегий обладает рядом аномалий, в частности,

a) могут быть эквивалентные по $\alpha$-доминированию стратегии, одна из которых строго доминирует другую по Парето;
b) отношение $\alpha$-доминирования может не сохраняться при добавлении несущественных (то есть нереализуемых) исходов;
c) $\alpha$-наибольшая стратегия может переопределяться при изотонном преобразовании порядка игры.

Автором показано [3], что указанные аномалии исчезают, если перейти к другому "окружению" (в качестве которого берется полная решетка мажорантно стабильных подмножеств упорядоченного подмножества $\langle A, \omega\rangle$). Таким образом, одна из проблем при рассмотрении моделей принятия решений с отношениями предпочтения - проблема выбора удачного "окружения".

## 1. Продолжение упорядоченности на множество вероятностных мер

Для задач принятия решения с упорядоченнми исходами центральной является проблема продолжения порядка на множество вероятностных мер. Эта проблема решается следующим образом. Пусть $P_\omega(A)$ - множество вероятностных мер на упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$ в $\mathbb{R}$. При любых $\varphi \in C(\omega)$ и $\mu \in P_\omega(A)$ полагаем $(\varphi, \mu) = \int_A \varphi d\mu$. Автором показано, что отношение $\tilde{\omega}$, определенное на множестве вероятностных мер $P_\omega(A)$ формулой

$$\mu_1 \leq^{\tilde{\omega}} \mu_2 \Leftrightarrow \forall \varphi \in C(\omega)(\varphi, \mu_1) \leq (\varphi, \mu_2), \tag{2}$$

является отношением порядка на $P_\omega(A)$; оно называется *каноническим продолжением* порядка $\omega$ на множество вероятностных мер. Эффективное выражение канонического продолжения имеет следующий вид:

$$\mu_1 \leq^{\tilde{\omega}} \mu_2 \Leftrightarrow \forall B \in M(\omega)(\mu_1(B) \leq \mu_2(B)), \tag{3}$$

где $M(\omega)$- семейство всех мажорантно устойчивых в $\langle A, \omega \rangle$ подмножеств.

При описании оптимальных решений в задачах, где используется каноническое продолжение порядка, основную роль играет следующая

**Теорема 1.** *Пусть $M$ - выпуклый многогранник вероятностных мер на конечном упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$. Для того, чтобы вероятностная мера $\mu^0 \in M$ была максимальным элементом в $M$ относительно порядка $\tilde{\omega}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало строго изотонное отображение $\varphi : A \to \mathbb{R}$, при котором $(\varphi, \mu) \leq (\varphi, \mu^0)$ для всех $\mu \in M$.*

## 2. Игры с упорядоченными исходами

Математическая модель совместного принятия решения при наличии порядковой информации о структуре исходов называется *игрой с упорядоченными исходами*. Она может быть задана в виде набора

$$G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, A(\omega_i)_{i \in N}, F \rangle, \tag{4}$$

где $N = \{1, ..., n\}$ - множество принимающих решения подсистем (в теоретико-игровой терминологии-игроков), $X_i$ - множество стратегий игрока $i$, $A$ - множество исходов, $\omega_i$ - отношение порядка на $A$, выражающее предпочтения игрока $i, F : \prod_{i \in N} X_i \to A$ - функция реализации. При отсутствии информационных связей между принимающими решения подсистемами наиболее естественным принципом оптимальности является принцип равновесия.

**Определение 1.** Ситуация $x^0 \in \prod_{i \in N} X_i$ называется *ситуацией равновесия*, если ни один игрок $i \in N$ не получит более предпочтительного для себя исхода при одностороннем отклонении от ситуации $x^0$, то есть не существует таких $i \in N, x_i \in X_i$, при которых $F(x^0 \parallel x_i) >^{\omega_i} F(x^0)$.

*Смешанным расширением* игры $G$ является игра $\tilde{G}$, в которой стратегиями игроков являются вероятностные меры на множествах их чистых стратегий, функция реализации $\tilde{A}$ продолжается на ситуации в смешанных стратегиях, а в качестве отношения предпочтения игрока $i$ берется каноническое продолжение порядка $\omega_i$ на множестве вероятностных мер. Из теоремы 1 следует, что множество $E(\tilde{G})$ представимо в виде

$$E(\tilde{G}) = \bigcup_{\varphi \in \prod_{i \in N} C^*(\omega_i)} E(G_\varphi)$$

где $C^*(\omega_i)$ - множество строго изотонных отображений упорядоченного множетсва $\langle A, \omega \rangle$ в , $E(G_\varphi)$ - множество ситуаций равновесия по Нэшу в смешанном расширении игры с функциями выигрыша $G_\varphi = \langle N, (X_i)_{i \in N}, (\varphi_i \circ F)_{i \in N} \rangle$.

Рассмотрим теперь игру в развернутой форме - игру на графе со случайными ходами, при чем на множестве окончательных вершин графа для каждого $i \in N$ должно быть задано отношение порядка $\omega_i$. Всякая ситуация в чистых стратегиях $\sigma = (\sigma_1, ...\sigma_n)$ определяет при фиксированной начальной позиции $a \in A$ вероятностную меру $\mu(a, \sigma)$ на множестве окончательных вершин графа. При каноническом продолжении порядка $\omega_i$ на множество вероятностных мер справедлив следующий результат.

**Теорема 2.** *Игра на графе со случайными ходами имеет ситуацию абсолютного равновесия в чистых стратегиях.*

## 3. Принятие решения в условиях риска

Задача принятия решения в условиях риска с упорядоченным множеством исходов может быть задана в виде набора (1), где $Y$ интерпретируется как множество состояний среды, причем принимающему решение для каждого состояния среды $y \in Y$ известна вероятность его наступления $q(y)$ (множетсва $X$ и $Y$ предполагаются здесь конечными). Каждой вероятностной мере $p \in P(X)$ на множестве стратегий $X$ соответсвует вероятностная мера $F(p, q)$ на множестве исходов $A$, причем множество вероятностных мер на $A$ упорядочено каноническим продолжением $\tilde{\omega}$ порядка $\omega$. Под оптимальной стратегией в задаче принятия решения в условиях риска понимается такая стратегия $x_0 \in X$, для которой вероятностная мера $F(x_0, q)$ является максимальным элементом выпуклого многогранника $\{F(p, q) : P \in P(X)\}$ относительно порядка $\tilde{\omega}$. В силу теоремы 1 стратегия $x_0 \in X$ является оптимальной тогда и только тогда, когда $x_0$ максимизирует по всем $p \in P(X)$ математическое ожидание выигрыша в задаче $\langle X, Y, \varphi \circ F \rangle$, где $\varphi$ - некоторое строго изотонное отображение упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в $\mathbb{R}$.

Метод нахождения множества оптимальных стратегий состоит в последоавтельном отбрасывании тех $x_i \in X$, для которых вероятностная мера $F(x_i, q)$ мажорируется относительно порядка $\tilde{\omega}$ выпуклой линейной комбинацией вероятностных мер $F(x_j, q)$ , где $i \neq j$. Согласно (3), выполнение такого мажорирования сводится к разрешимости некоторой системы линейных неравенств.

## 4. Многокритериальные задачи принятия решения

Рассмотрим многокритериальную задачу принятия решения с частично упорядоченным множеством критериев. такая задача может быть задана в виде пары $(D, \omega)$, где $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\omega$ - отношение (частичного) порядка на множестве $\{1, ..., n\}$. Вектор $(x^1, ..., x^n) \in D$ интерпретируется как набор значений локальных критериев качества, а отношение порядка $\omega$ - как отношение предпочтения критериев по их значимости для принимающего решение. На множестве $D$ следующим образом введем отношение порядка $\omega_+$ :

$$x \leq^{\omega_+} y \Leftrightarrow \forall \varphi \in C_+(\omega)((\varphi, x) \leq (\varphi, y)),$$

где $x, y \in D$, $C_+(\omega)$ - конус всех изотонных отображений из $\{1, ..., n\}$ в $\mathbb{R}_+$, $(\varphi, x)$ - скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Под оптимальным решением понимается вектор $x^* \in D$, являющийся максимальным элементом относительно порядка $\omega_+$.

**Теорема 3.** *Отношение порядка $\omega_+$ эффективно задается в виде*

$$x \leq^{\omega_+} y \Leftrightarrow \forall B \in M(\omega)(x(B) \leq y(B)),$$

*где $M(\omega)$ - множество мажорантно стабильных относительно порядка $\omega$ подмножеств, $x(B) = \Sigma_{i \in B} x_i$.*

На основании теоремы 3 указанная задача многокритериальной оптимизации сводится к задаче нахождения Парето-оптимального вектора с другим множеством критериев: $(f_B)_{B \in M(\omega)}$, где $f_B(x) = \sum_{i \in B^{x^i}}$ .

## Заключение

Изложенные результаты *позволяют сделать вывод о достаточности порядковой информации относительно структуры исходов для обеспечения реализуемости важнейших принципов оптимальности в задачах принятия решения основных типов:* принятия решения в условиях неопределенности, риска, теоретико-игровых моделях и задачах многокритериальной оптимизации.

## Список литературы


1. *Н*ейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение: пер.с англ. под ред. Н. Н. Воробьева. - М.: Наука, 1970
2. *Л*ьюс Р., Райфа Х. Игры и решения: пре. с англ. под ред. Д.Б.Юдина. - ИЛ, 1961.
3. *Р*озен В.В. Порядковые инварианты и проблема "окружения" для игр с упорядоченными исходами. - Кибернетика и системный анализ. - №2, 2001, С.145-159.