УДК 519.8

ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С БУЛЕВЫМИ СТРАТЕГИЯМИ И МНОЖЕСТВОМ ПЕРЕМЕННЫХ ПЕРЕХВАТА

В.Ф. Блыщик

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *veb@crimea.edu*

Abstract

A conception of antagonistic games with the interception is defined in this paper. It's classification is given, and the method of reduction to the game normal form is offered. The application of the suggested method to the particular case of the game with the interception is shown.

Введение и постановка задачи

Будем рассматривать антагонистическую игру:

$$\Gamma =< B^n, B^m, B^k, H : B^n \times B^m \times B^k \longrightarrow \Re > \tag{1}$$

в которой булевы векторы, состоящие из набора действий, доступных только первому игроку вида $\widetilde{x} = x_1...x_n \in B^n = 0,1^n$ образуют 2^n стратегий, а булевы векторы $\widetilde{y} = y_1...y_m \in B^m = 0,1^m$ образуют 2^m стратегий второго игрока, при этом в игре задано множество действий $\widetilde{z} = z_1...z_k \in B^k = 0,1^k$, которые могут быть выбраны обоими игроками. Значение переменной $z_i, i \in \overline{0,k}$ будем называть незафиксированным и обозначать Δ, если оно не выбрано не одним из игроков. Если игрок выбирает одно из переменных $z_i, i \in \overline{1,k}$, то он фиксирует ее значение равным 0 или 1, и она становится недоступной второму игроку. Функция $H(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ называется платежной функцией в игре Γ и ее значение соответствует выигрышу первого игрока или проигрышу второго взятого со знаком минус. Определенную таким образом игру назовем игрой с перехватом.

Игры с перехватом могут рассматриваться как расширение класса изученных ранее матричных игр с булевыми стратегиями [1], [4] и представляься в виде набора из 2^k матриц размерности $2^n \times 2^m$. Как и в любой антагонистической игре, задачей первого игрока является максимизировать свой выигрыш, задачей второго постараться минимизировать выигрыш первого. Естественно считать оптимальной в игре Γ такую ситуацию $((x_1^*...x_n^*), (y_1^*...y_n^*), (z_1^*...z_n^*)) = (\widetilde{x}^*, \widetilde{y}^*, \widetilde{z}^*)$, от которой ни одному из игроков не выгодно отклонятся. Такая ситуация обычно формализуется как гарантированная и называется равновесной, а принцип оптимальности, основанный на построении ситуации, — принципом равновесия. Если $(\widetilde{x}^*, \widetilde{y}^*, \widetilde{z}^*)$ — ситуация рановесия в игре Γ, то число

$$\nu = H(\widetilde{x}^*, \widetilde{y}^*, \widetilde{z}^*)$$

называют значением игры.

В игре с перехватом (1) значения платежной функции $H = H(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ определяются тремя группами переменных. Присваивать значения переменным $\widetilde{x} = x_1, ..., x_n$ может только первый игрок; переменным $\widetilde{y} = y_1, ..., y_m$ — только второй игрок; переменным $\widetilde{z} = z_1, ..., z_k$ могут присваивать оба игрока. Переменные $\widetilde{x}$ недоступны второму игроку, а переменные $\widetilde{y}$ недоступны первому игроку. Полагается, что выбранные значения переменных $\widetilde{x}$ неизвестны второму игроку (выбранные значения переменных $\widetilde{y}$ неизвестны первому игроку), а выбраные значения перехватываемых переменных $\widetilde{z}$ (если таковые значения зафиксированны) известны и первому, и второму игроку. Выбор игроками значений переменных из $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ производится независимо от выбора значений переменных $\widetilde{z}$.

Методы решения игры (1) с булевыми стратегиями и полной (неполной) информацией о платежной функции при $k = 0$, были рассмотрены в работах [1], [2].

Целью настоящей работы является изучение *нового класса игр вида (1)*, моделирующих противоборство с возможностью "перехвата" инициатив из некоторого допустимого подмножества переменных ($\{z_1, ..., z_k\}$).

Актуальность такой постановки объясняется тем, что в экономических и других приложенияж, как правило, конкурирующие противоборствующие стороны стараются определить противника в выборе некоторого доступного обеим сторонам хода.

1. Игры с последовательным выбором переменных из множества $\widetilde{z}$

Выделим некотрые частные случаи теоретико-игровой модели (1).

Игра Γ_1 будет удовлетворять следующим условиям выбора перехватываемых переменных. Игроки поочередно выбирают ровно по одной переменной из $\widetilde{z}$, значение которой еще не установлено, и присваивают ей значение 0 или 1. Выбор значений переменных из $\widetilde{z}$ продолжается до тех пор пока в $\widetilde{z}$ существуют свободные переменные.

Игра Γ_s будет отличаться от Γ_1 только тем, что на чередующихся шагах выбора игроки могут выбирать значения для произвольного числа $j \in [0, 1, ..., s]$, $1 < s < k$ свободных переменных из $\widetilde{z}$.

В игру Γ_s^{Σ} вводится ряд дополнительных числовых параметоров. Обозначим C_{1i}^{+}, C_{1i}^{-} стоимости установления, соответственно, в единицу и в ноль значения переменной z_i для первого игрока (аналогично C_{2i}^{+}, C_{2i}^{-} — для второго игрока), а $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ — величины ресурсов, доступные игрокам на шаге $t = 1, 2, ..., T$, задающие следующие ограничения:

$$\sum_{i \in M_1(t)} C_{1i}^{d_{1i}(t)} \gamma_{1i}(t) \leq \sigma_1(t),$$

$$\sum_{i \in M_2(t)} C_{2i}^{d_{2i}(t)} \gamma_{2i}(t) \leq \sigma_2(t).$$

Здесь $M_1(t)(M_2(t))$ — множество номером переменных $\widetilde{z}$, изменяемых на шаге t первым (вторым) игроком; $d_{1i}(t), d_{2i}(t) \in \{+,-\}$ — направление выбора значений переменных (1 или 0) игроками;

$$\gamma_{ni}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если игрок } n \in \{1,2\} \text{ выбирает переменную } z_i \text{ для присвоения ей значения} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

В этой работе рассматривается игра Γ_1 при $k \neq 0$, игроки по очереди, начиная с первого, выбирают по одной переменные $z_i, i = \overline{1,k}$ и фиксируют их значения. Такое поведение игроков позволяет наиболее полно реализовать свои стратегии. Действительно, каждому значению переменной $z_i, i = \overline{1,k}$ соответствует отдельная матричная игра и тогда в задачу игроков входит выбирать переменные z_i так, чтобы в итоге прийти к матрице с оптимальным для игрока значением игры.

Такая игра относится к классу позиционных игр и является конечношаговой игрой с полной информацией. При предварительном анализе игру удобно представить в виде дерева $G = (Q, F)$, на котором положения (позиции), возикающие в процессе игры, изображаются вершинами $q \in Q$, а ходы ветвями, соединяющими одну вершину с другой. Покажем, как такую игру привести к матричной игре.

В результате последовательного выбора позиций однозначно реализуется некоторая последовательность $(q_0, ..., q_l)$, определяющая путь в дереве G, исходящий из начальной позиции q_0 и достигающий одной из окончательных позиций игры. Такой путь в дальнейшем будем называть партией. Каждая партия однозначно определяет окончательную позицию q_l, в которую она приводит, и, наоборот, окончательная позиция q_l однозначно определяет партию. В позиции q_l каждый из игроков получает выигрыш $H(q_l)$.

Однозначное отображение u_i, которое каждой вершине $q \in Q_i$ ставит в соответствие некоторую вершину p называется стратегией игрока i.

Множество всевозможных стратегий игрока i будем обозначать через U_i.

Таким образом, стратегия i-го игрока представляет собой вектор, который предписывает ему в любой позиции q из множества его очередности Q_i однозначный выбор следующей позиции.

Упорядоченный набор $u = (u_1, u_2)$, где $u_i \in U_i, i = \overline{1,2}$, называется ситуацией в игре, а декартово произведение $U_1 \times U_2$ — множеством ситуаций. Каждая ситуация $u = (u_1, u_2)$ однозначно определяет партию в игре, а следовательно, и выигрыши игроков [5].

Пусть ситуации $u = (u_1, u_2)$ соответствует партия $(x_0, x_1, ..., x_l)$. Тогда можно ввести понятие функции выигрыша K, положив ее значение в каждой ситуации u равным значению выигрыша H в окончательной позиции партии $(x_0, ..., x_l)$, соответствующей ситуации $u = (u_1, u_2)$, т.е.

$$K(u_1, u_2) = H(x_1),$$

функция K определена на множестве ситуаций $U_1 \times U_2$. Таким образом, построив множества стратегий игроков U_i, и определив на декартовом произведении функцию выигрыша K, получаем некоторую игру в матричной форме. Методы решения матричных игр хорошо известны [3].

Для примера рассмотрим игру:

$$\Gamma_1 =< B^n, B^m, B^k, H : B^n \times B^m \times B^k \longrightarrow \mathfrak{R} >, n = const, m = const, k = 3$$

в виде набора из $2^3 = 8$ матриц размерности $2^n \times 2^m$. Будем считать, что решение игры для каждой такой матрицы найдено и равно $\nu_i, i = \overline{1, 8}$.

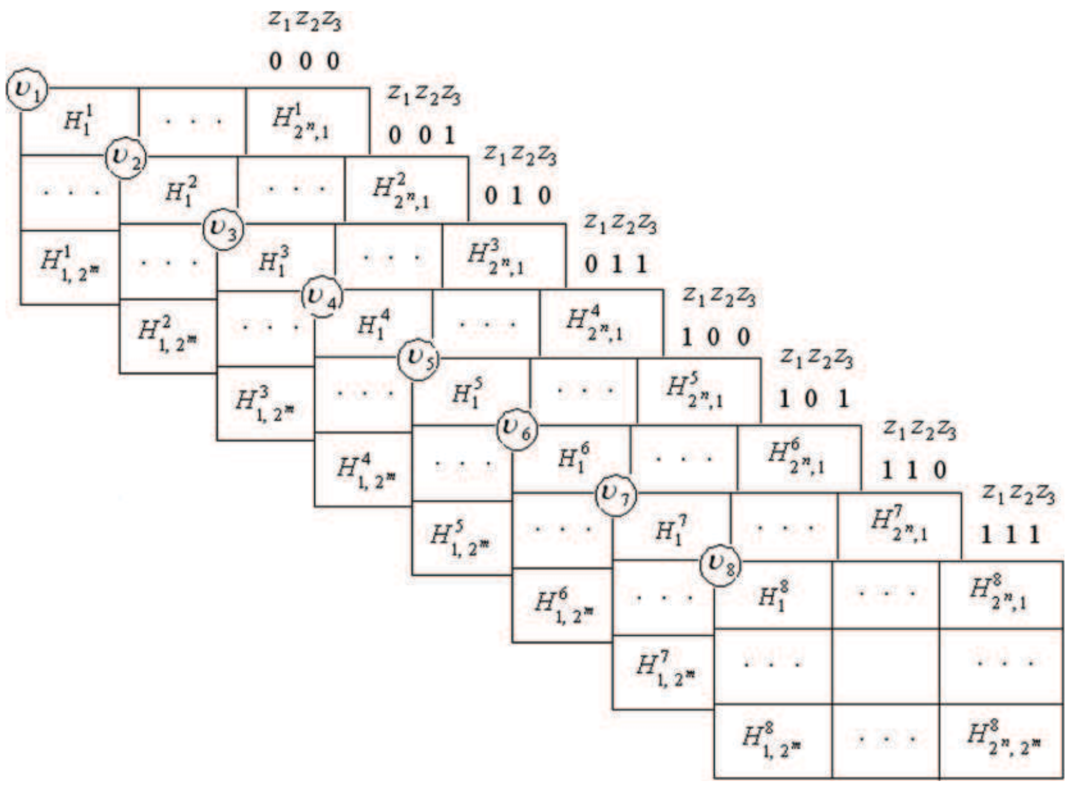

Рис. 1. Игра Γ_1

Не теряя общности, предположим, что цены игр удовлетворяют следующему неравенству:

$$\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \nu_4 < \nu_5 < \nu_6 < \nu_7 < \nu_8.$$

Задача первого игрока — выбирать и фиксировать переменные $z_i, i = \overline{1, 3}$, так, чтобы в результате выбрать матрицу, цена игры в котрой максимальна, а задача второго игрока — не допустить этого. Так как игроки ходят по очереди, начиная с первого, то в такой постановке возможны следующие варианты игры:

(1) Первый игрок выбирает переменную z_1, второй — z_2, первый — z_3.

Матрица такой игры имеет вид:

$z_2 \setminus z_1 z_3$	00	01	10	11
0	ν_1	ν_2	ν_5	ν_6
1	ν_3	ν_4	ν_7	ν_8

Игра имеет решение в чистых стратегиях и цену игры равную ν_6.
(2) Первый игрок выбирает переменную z_1, второй — z_3, первый — z_2.
Матрица такой игры имеет вид:

$z_2 \setminus z_1 z_3$	00	01	10	11
0	ν_1	ν_3	ν_5	ν_7
1	ν_2	ν_4	ν_6	ν_8

Игра имеет решение в чистых стратегиях и цену игры равную ν_7.
(3) Первый игрок выбирает переменную z_2, второй — z_1, первый — z_3.
Матрица такой игры имеет вид:

$z_2 \setminus z_1 z_3$	00	01	10	11
0	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4
1	ν_5	ν_6	ν_7	ν_8

Игра имеет решение в чистых стратегиях и цену игры равную ν_4.

Выбор переменных z_i представляет собой позиционную конечношаговую игру с полной информацией, граф $G = (Q, F)$ которой показан на рисунке 2.

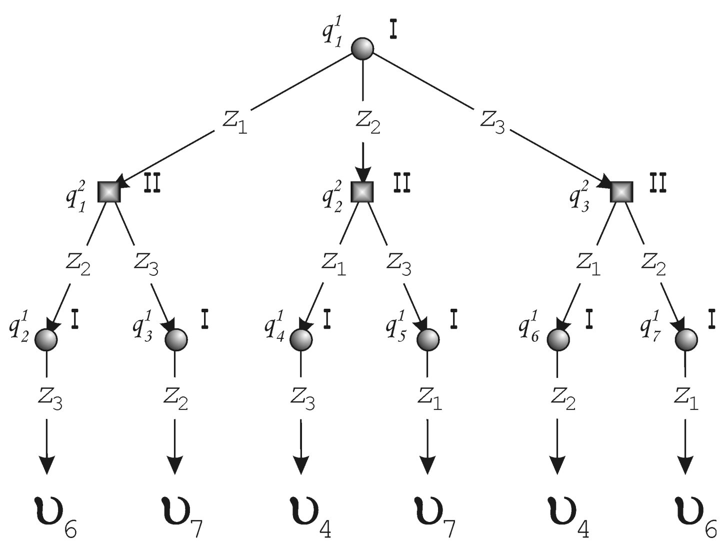

Рис. 2. Граф $G = (Q, F)$

Кружками на графе изображены позиции, в которых ходит игрок 1, а квадратиками — позиции, в которых ходит игрок 2. Если множество позиций первого игрока обозначить через Q^1, а множество позиций второго — через Q^2 и элементы этих множеств соответственно — через $q^1 \in Q^1$, $q^2 \in Q^2$, то стратегия игрока 1 $u_1(\cdot)$ задается семимерным вектором $u_1(\cdot) = (u_1(q_1^1), u_1(q_2^1), u_1(q_3^1), u_1(q_4^1), u_1(q_5^1), u_1(q_6^1), u_1(q_7^1))$, предписывающим выбор одной из переменных $z_i, i = \overline{1,3}$, в каждой позиции множества Q^1. Аналогично, стратегия $u_2(\cdot)$ игрока 2 представляет собой трехмерный вектор $u_2(\cdot) = (u_2(q_1^2), u_2(q_2^2), u_2(q_3^2))$, предписывающий выбор одной из переменных $z_i, i = \overline{1,3}$, в каждой позици множества Q^2. Таким образом, у игрока 1 в этой игре 3 стратегии, а у игрока 2 — 8 стратегий. Соответствующая нормальная форма игры задается матрицей размера 3×8, которая имеет ситуацию равновесия в чистых стратегиях.

	$(z_1, z_3, z_2, z_3, z_1, z_2, z_1)$	$(z_2, z_3, z_2, z_3, z_1, z_2, z_1)$	$(z_3, z_3, z_2, z_3, z_1, z_2, z_1)$
(z_2, z_1, z_1)	ν_6	ν_4	ν_4
(z_2, z_1, z_2)	ν_6	ν_4	ν_6
(z_2, z_3, z_1)	ν_6	ν_7	ν_4
(z_2, z_3, z_2)	ν_6	ν_7	ν_6
(z_3, z_1, z_1)	ν_7	ν_4	ν_4
(z_3, z_1, z_2)	ν_7	ν_4	ν_6
(z_3, z_3, z_1)	ν_7	ν_7	ν_4
(z_3, z_3, z_2)	ν_7	ν_7	ν_6

Можно убедится, что значение рассматриваемой игры равно ν_6. Первый игрок имеет одну оптимальную чистую стратегию: $(z_1, z_3, z_2, z_3, z_1, z_2, z_1)$, а у игрока 2 — две оптимальные стратегии: (z_2, z_1, z_1), (z_2, z_1, z_2).

Заключение

Результатом данной работы является построенная выше классификация игр с перехватом и разработанный подход к решению игры типа Γ_1 путем сведения к игре в нормальной форме. В последующих работах предполагается рассмотреть игры Γ_s и Γ_s^{Σ}, допускающие более широкую экономическую интерпретацию.

Список литературы

1. Блыщик В. Ф. Решение игр с булевыми стратегиями и неполной информацией на основе синтеза ДНФ. // Искусственный интеллект, 2000. — № 2. — с. 145–148
2. Блыщик В. Ф., Донской В. И., Махина Г. А. Интеллектуализированная программная система IntMan поддержки принятия решений в задачах прланирования и управления. // Искусственный интеллект, 2002. — № 2. — с. 406–415
3. Воробьев Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. // Москва: Наука , 1984. — с. 495
4. Донской В. И. Дискретные модели принятия решений при неполной информации. // Симферополь: Таврия, 1992. — с. 166
5. Петоросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. // Москва: Высш. шк., Книжный дом "Университет", 1998. — с. 304