УДК 517.983

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РОТАЦИИ ОПЕРАТОРОВ В КАТЕГОРИЯХ С КВАДРАТИЧНЫМ РАСЩЕПЛЕНИЕМ

Д.Л. Тышкевич

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *ltyshk@crimea.edu*

Abstract

Some classes of inner spaces and operators in them are studied from the point of view of category theory. Notions of *matrix category* and *category with quadratic decomposition* are introduced. The category of all nondegenerated spaces and the category of all Krein spaces are special cases of above-mentioned categories. The definition of *elementary rotation* (or *Julia operator*) well-know in Krein spaces operator theory are generalized for the case of arbitrary matrix category. the main result of this paper is proof of existing for an arbitrary operator from category with quadratic decomposition of elementary rotation from the same category.

Введение

В теории линейных операторов, действующих в пространствах Крейна, широкое развитие получили методы изучения операторов при помощи их расширений особого типа (с выходом из основного пространства), так называемых *элементарных ротаций* (*elementary rotation, Julia operator*). Элементарная ротация – это унитарный оператор (в смысле индефинитной метрики), дополнительно удовлетворяющий определенным условиям и содержащий исходный оператор в качестве компоненты. Элементарная ротация существует для любого непрерывного оператора и является важнейшим инструментом при исследовании таких базовых вопросов современной теории операторов в пространствах Крейна как: вопрос существования сжимающих, изометрических и унитарных расширений операторов, теория дилатаций, лифтинг коммутанта, теория унитарных узлов и др. Также интересные и важные приложения находит понятие элементарной ротации в теории аналитических функций (в том числе и функций со значениями в векторных пространствах), достаточно указать на такие разделы как: теория унивалентных функций, теория воспроизводящих ядер, алгоритм Шура. Подробную информацию по данному кругу вопросов и многочисленные ссылки можно найти в курсе лекций [1] (см. также домашнюю страницу [2] в сети Интернет одного из авторов [1]).

Однако конструктивный анализ результатов, полученных при помощи элементарной ротации (как, собственно, и анализ средств построения самой элементарной ротации) показывает, что основную роль в соответствующих построениях играют не столько конкретные свойства и специфика пространств Крейна, сколько определенные общие аспекты теории пространств с индефинитной метрикой, носящие *категориальный* характер (например, непрерывность оператора в слабой топологии, равносильная в случае пространств Крейна непрерывности в сильной топологии, существование у непрерывного оператора непрерывного сопряженного, существование разложения Богнара-Крамли любых самосопряженных операторов в более общих пространствах, чем пространство Крейна и др.)

Все это определяет *постановку следующей проблемы.* Выяснить основные конструктивные моменты построения элементарной ротации оператора в классе пространств Крейна и определить наиболее общие и естественные классы пространств и операторов, на которые эти конструктивные моменты распространяются. (Особо подчеркнем, что здесь идет речь не о процессе «голого» обобщения, а выделение «квинтэссенции» проблемы).

Наиболее адекватной теорией, в рамках которой уместно разрешение данной проблемы, представляется теория категорий.

Анализ последних достижений и публикаций (в том числе и электронных), посвященных теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой (мы здесь опираемся, главным образом, на большой перечень работ из [1] и списки публикаций на домашних страницах ведущих специалистов в этой области: см., например [2, 3, 4], а также на электронный архив [6]) и теории категорий (см. [5]) позволяет сделать вывод о том, что задача, о которой говорилось выше, является *новой*; ее перспективы связаны с приложениями теории *общих* пространств с индефинитной метрикой, намеченными еще в [7, 8] и рассматриваемые в последнее время (например, [9]).

Целью данной работы является построение и анализ категорий пространств с внутренним произведением (в общем случае индефинитным), в которых осуществимо построение специальных классов матричных операторов, в частности, элементарных ротаций (при естественном обобщении этого понятия на общий случай).

1. Вспомогательные определения и результаты

1.1. **Категории.** Здесь мы вкратце рассмотрим необходимые нам определения. Для более полного ознакомления следует обратиться к ставшей классической литературе [14, 15, 16], см. также [5].

Напомним, что тройка $\mathcal{K} = \langle \mathfrak{O}, \mathfrak{A}, \circ \rangle$, где $\mathfrak{O}, \mathfrak{A}$ – некоторые совокупности предметов (классы или множества), $\circ$ – (частичная) бинарная операция на $\mathfrak{A}$ называется *категорией*, если определены функции $\eta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{O}^2$, $\eta(f) = \langle \mathrm{dom}\ f, \mathrm{cod}\ f \rangle$, $f \in \mathfrak{A}$, и $\mathbb{I} : \mathfrak{O} \to \mathfrak{A}$ (далее будем обозначать $1_a := \mathbb{I}(a)$, $a \in \mathfrak{O}$), причем выполняются следующие условия:

1) предмет $g \circ f$ определен тогда и только тогда, когда $\mathrm{cod}\ f = \mathrm{dom}\ g$;
2) $\circ$–ассоциативная операция;
3) для любого b из $\mathfrak{O}$ и для любых f, g из $\mathfrak{A}$,таких, что $\mathrm{cod}\ f = \mathrm{dom}\ g = b$

$$1_b \circ f = f, g \circ 1_b = g.$$

В случае, когда $\mathfrak{O}$ и $\mathfrak{A}$ – множества, категория называется *малой.* Предметы совокупностей $\mathfrak{O}$ и $\mathfrak{A}$ называются соответственно *объектами* и *стрелками* (либо *морфизмами*; здесь мы придерживаемся терминологии [14, 16]) категории $\mathcal{K}$. Объекты $\mathrm{dom}\ f$ и , $\mathrm{cod}\ f$ называются соответственно *началом* и *концом* стрелки f. Стрелка $g \circ f$ называется *композицией* стрелок f и g, а 1_b – *единичной* стрелкой объекта b.

Классы $\mathfrak{O}$ и $\mathfrak{A}$ относительно категории $\mathcal{K}$ мы будем обозначать через $\mathrm{Obj}\ (\mathcal{K})$ и $\mathrm{Ar}\ (\mathcal{K})$ соответственно. Пусть $a, b \in \mathrm{Obj}\ (\mathcal{K})$. Через $\mathcal{K}(a, b)$ будет обозначаться совокупность всех стрелок категории $\mathcal{K}$ с началом a и концом b. Для краткости $\mathcal{K}(a, a)$ будем обозначать через $\mathcal{K}(a)$.

Категория $\mathcal{C}$ называется *подкатегорией* категории $\mathcal{K}$, если:

1) $\mathrm{Obj}\ (\mathcal{K}) \subseteq \mathrm{Obj}\ (\mathcal{C})$;
2) для любых объектов a, b категории $\mathcal{C}$ $\mathcal{C}(a, b) \subseteq \mathcal{K}(a, b)$.

При этом пишут $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$.

$\mathcal{C}$ называется *полной* подкатегорией категории $\mathcal{K}$, если $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$, и для любых объектов a, b из $\mathcal{C}$ $\mathcal{C}(a, b) = \mathcal{K}(a, b)$. Если $\mathcal{C}$ – полная подкатегория $\mathcal{K}$, будем писать $\mathcal{C} \overset{c}{\subseteq} \mathcal{K}$. Естественным образом определяются отношения $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$ и $\mathcal{C} \overset{c}{\subset} \mathcal{K}$.

В качестве примеров можно привести следующие (обозначения категорий взяты из [16]). Отображения, определяющие стрелки в перечисленных ниже категориях, являются всюду определёнными.

Set. Obj (**Set**) – класс всех множеств, Ar (**Set**) – класс всех функций между множествами.

FinSet. Obj (**FinSet**) – класс всех конечных множеств, Ar (**FinSet**) класс всех функций между конечными множествами.

Vect. Obj (**Vect**) – класс всех (комплексных) векторных пространств, Ar (**Vect**) – класс всех линейных операторов.

TopVect. Obj (**TopVect**) – класс всех (комплексных) топологических векторных пространств, Ar (**TopVect**) – класс всех непрерывных линейных операторов.

Ясно, что **FinSet** $\subseteq$ **Set**, **TopVect** $\subseteq$ **Vect**, однако, если **FinSet** – полная подкатегория **Set**, то **TopVect** не является полной подкатегорией **Vect**.

1.2. **Пространства с внутренним произведением.** Пусть $\mathfrak{X}$ – комплексное линейное пространство. Отображение $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}^2 \to \mathbb{C}$ называется *эрмитовополуопределенной формой*, или *внутренним произведением* на $\mathfrak{X}$, если для любых $x, y, z \in \mathfrak{X}, \alpha \in \mathbb{C}$ выполняются равенства:

$$[y, x] = \overline{[x, y]},$$

$$[\alpha x, y] = \alpha[x, y],$$

$$[x + y, z] = [x, z] + [y, z].$$

$\mathfrak{X}$ в этом случае называется *пространством с внутренним произведением* (ПВП).

Пусть $\mathfrak{N}$ – произвольное подмножество пространства $\mathfrak{X}$. Множество $\mathfrak{N}^{[\perp]} := \{x \in \mathfrak{X} \mid \forall\ y \in \mathfrak{X}\ [x,y] = 0\}$ называется *ортогональным дополнением* множества $\mathfrak{N}$. Для любого $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{N}^{[\perp]}$ всегда является линеалом (т.е. линейно замкнутым множеством). ПВП $\mathfrak{X}$ называется *невырожденным*, если $\mathfrak{X}^{[\perp]} = \{0\}$.

Говорят, что непустые множества $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{X}$ *ортогональны*, и записывают $\mathfrak{N}[\perp]\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^{[\perp]}$ (или, что равносильно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^{[\perp]}$). Сумма $\mathfrak{N} + \mathfrak{M}$ называется *ортогональной*, если $\mathfrak{N}[\perp]\mathfrak{M}$. Ортогональная сумма множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ обозначается $\mathfrak{N}[+]\mathfrak{M}$.

Семейство полунорм $\{p_y\}_{y\in\mathfrak{X}},\ p_y(x) := |[x,y]|$, определяет на $\mathfrak{X}$ *слабую топологию* $\tau^0_{\mathfrak{X}}$, которая наделяет $\mathfrak{X}$ структурой локально выпуклого пространства. Слабая топология $\tau^0_{\mathfrak{X}}$ является хаусдорфовой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$ – невырождено.

Для любого подмножества $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$, $\mathfrak{N}^{[\perp]}$ – замкнутый в $\tau^0_{\mathfrak{X}}$ линеал, причём $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}^{[\perp][\perp]}$. Для линеала $\mathfrak{L}$ $\mathrm{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}}}\ \mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{[\perp][\perp]}$ ($\mathrm{Clos}_\tau\ \mathfrak{L}$– замыкание $\mathfrak{L}$ в топологии τ).

Локально выпуклая топология τ в ПВП $\mathfrak{X}$ называется *частичной мажорантой*, если для любого $y \in \mathfrak{X}$ функционал φ_y, $\varphi_y(x) := [x,y]$, τ - непрерывен. Слабая топология $\tau^0_{\mathfrak{X}}$ является частичной мажорантой; локально выпуклая топология τ является частичной мажорантой тогда и только тогда, когда $\tau^0_{\mathfrak{X}} \le \tau$. Топология τ в ПВП $\mathfrak{X}$ называется *допустимой*, если τ – частичная мажоранта, и для любого τ-непрерывного функционала φ существует такой вектор $y \in \mathfrak{X}$, что $\varphi(x) := [x,y]$. Слабая топология $\tau^0_{\mathfrak{X}}$ является допустимой. Если τ – допустимая топология в $\mathfrak{X}$, то для произвольного линеала $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{X}$, $\mathrm{Clos}_\tau\ \mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{[\perp][\perp]}$.

Банахово пространство $(\mathfrak{X}, [\cdot,\cdot], \|\cdot\|)$ с индефинитной метрикой $[\cdot,\cdot]$ и нормой $\|\cdot\|$ называется *правильным*, если форма $[\cdot,\cdot]$ непрерывна по совокупности переменных относительно $\|\cdot\|$, и существует такая константа $c > 0$, что $\sup\{|[x,y]| \mid \|y\| = 1\} \ge c\|x\|$. Норма $\|\cdot\|$ при этом называется *канонической*, если $\sup\{|[x,y]| \mid \|y\| = 1\} = \|x\|$. Для правильного банахова пространства (и только для него) каноническая форма существует всегда, хотя и не определяется единственным образом, хотя бы и с точностью до множителя-константы ([7, 8, 12]). В правильном банаховом пространстве норма всегда порождлает допустимую топологию. Важным примером правильного банахова пространства и канонической нормы на нём является пространство Крейна с обычной гильбертовой нормой (см. [8, 10]).

1.3. **Операторы в ПВП.** Всюду в этой работе под словом «оператор» будем понимать *всюду определённый* линейный оператор; через $l(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ будет обозначаться множество всех операторов, действующих из линейного пространства $\mathfrak{X}$ в линейное пространство $\mathfrak{Y}$ ($l(\mathfrak{X},\mathfrak{X})$ будет обозначаться через $l(\mathfrak{X})$).

Пусть $\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z}$ – ПВП. Оператор $T \in l(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ называется *сопрягаемым* (см. [8, 13]), если существует такой оператор $T' \in l(\mathfrak{Y},\mathfrak{X})$, что

$$[Tx,y] = [x,T'y]\ (x \in \mathfrak{X}, y \in \mathfrak{Y}).$$

Если $\mathfrak{X}$ – невырожденное ПВП, то T' определяется однозначно. В этом случае мы будем обозначать этот оператор через $T^\sharp$; $T^\sharp$ называется *сопряжённым* к оператору T. Если $\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ – невырожденные ПВП, то для произвольного $T\in adj(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$

$$\mathfrak{Y}=\mathrm{Clos}_\tau\ (\mathrm{R}\ (T)\ [+]\ \ker T^\sharp) \tag{1}$$

(τ – любая допустимая топология в $\mathfrak{Y}$). Из (1), в частности, следует, что

$$\mathrm{Clos}_\tau\ \mathrm{R}\ (T)=\mathfrak{Y}\Leftrightarrow \ker T^\sharp\ =\ \{0\}. \tag{2}$$

Множество всех сопрягаемых операторов из $l(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ обозначим через $adj(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$. Множество $adj(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ является линейным пространством. Если, $A\in adj(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, $B\in adj(\mathfrak{Y},\mathfrak{Z})$, то $BA\in adj(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})$; причем, если $\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ – невырождены, то $(BA)^\sharp=A^\sharp B^\sharp$. Отсюда, в частности, следует, что $adj(\mathfrak{X})$ при невырожденном $\mathfrak{X}$ является (комплексной) линейной алгеброй с инволюцией, порождаемой сопряжением операторов.

Оператор $U\in l(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ ($\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ – не обязательно невырождены) называется *унитарным*, если U – биекция, и для любых $x_1,x_2\in\mathfrak{X}$ $[Ux_1,Ux_2]_\mathfrak{Y}=[x_1,x_2]_\mathfrak{X}$ (т.е. U – *изометрическая* биекция). Оператор $A\in l(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X}$ – невырождено, называется *самосопряжённым*, если $A^\sharp=A$.

Известно, что если $\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ – невырожденные ПВП, то $(\tau^0_\mathfrak{X},\tau^0_\mathfrak{Y})$-непрерывный оператор является сопрягаемым, причем оператор $T^\sharp$ – $(\tau^0_\mathfrak{Y},\tau^0_\mathfrak{X})$-непрерывен [17]. Обратно, можно показать, что произвольный оператор из $adj(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ ($\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ не обязательно невырождены) является $(\tau^0_\mathfrak{X},\tau^0_\mathfrak{Y})$-непрерывным.

Множество всех $(\tau^0_\mathfrak{X},\tau^0_\mathfrak{Y})$-непрерывных операторов из $l(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ обозначим через $lc(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$.

1.4. **Внешняя ортогональная сумма пространств с внутренним произведением.** Пусть $\{\mathfrak{X}_k\}_{k\in\overline{1,n}}$ $n\in\mathbb{N}$ – семейство ПВП. *Внешней ортогональной суммой* пространств $\{\mathfrak{X}_k\}$ будем называть внешнюю сумму этих пространств (т.е. декартово произведение $\prod\limits_{k\in\overline{1,n}}\{\mathfrak{X}_k\}$ с покомпонентным сложением и умножением на скаляр), наделенную внутренним произведением

$$[x,y]:=\sum_{k\in\overline{1,n}}[x_k,y_k]_{\mathfrak{X}_k},\ x=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle,\ y=\langle y_1,\cdots,y_n\rangle.$$

Внешнюю ортогональную сумму будем обозначать через $\overset{e}{\underset{k\in\overline{1,n}}{[+]}}\mathfrak{X}_k$. ПВП является невырожденным тогда итолько тогда, когда каждое $\mathfrak{X}_k$ – невырожденно. Оператор $\pi_{\mathfrak{X}_i}:\overset{e}{\underset{k\in\overline{1,n}}{[+]}}\mathfrak{X}_k\to\mathfrak{X}_i$, $\pi_{\mathfrak{X}_i}\langle x_1,\cdots,x_n\rangle:=x_i$ $(i\in\overline{1,n})$ называется *проектированием на*

$\mathfrak{X}_i$, а оператор $\nu_{\mathfrak{X}_i} : \mathfrak{X}_i \to \overset{e}{\underset{k\in\overline{1,n}}{[+]}} \mathfrak{X}_k$, $\nu_{\mathfrak{X}_i} x := \langle 0, \cdots, 0, \underset{i}{x}, 0, \cdots, 0\rangle$ $(i \in \overline{1,n})$ – *вложением* $\mathfrak{X}_i$ в $\overset{e}{\underset{k\in\overline{1,n}}{[+]}} \mathfrak{X}_k$. Справедливо следующее простое утверждение.

Предложение 1. Операторы $\pi_{\mathfrak{X}_i}$, $\nu_{\mathfrak{X}_i}$ – сопрягаемы, и в случае невырожденности пространств $\mathfrak{X}_k$ $(k \in \overline{1,n})$ связаны соотношением:

$$\pi^{\sharp}_{\mathfrak{X}_k} = \nu_{\mathfrak{X}_k} \ (k \in \overline{1,n}).$$

2. Категории пространств с внутренним произведением

Во всех определенных ниже категориях объектами являются те или иные классы ПВП, стрелками – определенные классы операторов, действующих в соответствующих ПВП. Композицией стрелок является обычная композиция операторов; единичной стрелкой для объекта служит тождественный оператор.

IPS (inner product spaces). Obj (**IPS**) – класс всех ПВП. Ar (**IPS**) – класс всех операторов, действующих в ПВП, непрерывных в слабой топологии, т.е. для $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in$ Obj (**IPS**) $\mathbf{IPS}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := lc(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Adj (adjointable operators). Obj (**Adj**) – класс всех ПВП. Для $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in$ Obj (**Adj**) $\mathbf{Adj}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := adj(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, т.е. стрелками **Adj** являются сопрягаемые операторы в ПВП.

NDCont (nondegenerated spaces, continuous operators). Obj (**NDCont**) – класс всех невырожденных ПВП. Стрелки те же, что и у **Adj**.

RegB (regular Banach spaces). Obj (**RegB**) – класс всех правильных банаховых пространств. Для $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in$ Obj (**RegB**) $\mathbf{RegB}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ ($B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ – множество всех ограниченных операторов, действующих из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$). Так как сильная топология правильного банахова пространства является допустимой, то множества $\tau^0_{\mathfrak{X}}$-непрерывных функционалов и функционалов, непрерывных в сильной топологии, совпадают, поэтому слабая топология $\tau^0_{\mathfrak{X}}$ совпадает с обычной слабой топологией банахова пространства. Как известно (см., например, [18]), оператор, действующий в банаховом пространстве, сильно непрерывен тогда и только тогда, когда он слабо непрерывен. Таким образом, для правильных банаховых пространств $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = lc(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Kr (Krein spaces). Obj (**Kr**) – класс всех пространств Крейна. Для $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in$ Obj (**Kr**) $\mathbf{Kr}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ $(= lc(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$, см. рассуждения выше для категории **RegB**, а также подраздел 1.2)

Hilb (Hilbert spaces). Obj (**Hilb**) – класс всех гильбертовых пространств. Для $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in$ Obj (**Hilb**) $\mathbf{Hilb}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ $(= lc(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$, см. выше).

Отметим, что для введенных категорий справедлива цепочка (строгих) соотношений:

$$\mathbf{Hilb} \overset{c}{\subset} \mathbf{Kr} \overset{c}{\subset} \mathbf{RegB} \overset{c}{\subset} \mathbf{NDCont} \overset{c}{\subset} \mathbf{Adj} \overset{c}{\subset} \mathbf{IPS}. \tag{3}$$

Замечание 1. Часть соотношений (3) следует из упомянутых выше фактов теории ПВП, а также из известых результатов теории гильбертовых пространств и пространств Крейна [8, 10]; что касается соотношений **NDCont** $\overset{c}{\subset}$ **Adj** $\overset{c}{\subset}$ **IPS** – см. [13]; для категории **RegB** необходимы особые рассуждения. Здесь мы опускаем подробное рассмотрение цепочки (3), предполагая посвятить этому отдельную работу.

3. Матричные категории

Пусть $\mathcal{K}$ – некоторая подкатегория **NDCont**. Категорию $\mathcal{K}$ назовем *матричной*, если она удовлетворяет следующим аксиомам (мы отождествляем все нулевые подпространства в классе всех линейных просранств).

(o.1) $\{0\} \in \mathrm{Obj}\ (\mathcal{K})$ (нулевое пространство должно быть объектом матричной категории).

(o.2) Для произвольной совокупности $\{\mathfrak{X}_k\}_{k\in\overline{1,n}}$ $(n \in \mathbb{N})$ из $\mathrm{Obj}\ (\mathcal{K})$ $\overset{e}{\underset{k\in\overline{1,n}}{[+]}}\ \mathfrak{X}_k \in \mathrm{Obj}\ (\mathcal{K})$ (т.е. категория $\mathcal{K}$ замкнута относительно образования внешних ортогональных сумм).

(o.3) Для любого $\mathfrak{X} \in \mathrm{Obj}\ (\mathcal{K})$ и любого ПВП $\mathfrak{Y}$ такого, что существует унитарный оператор $U \in l(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ следует, что $\mathfrak{Y} \in \mathrm{Obj}\ (\mathcal{K})$ и $U \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ (в данной аксиоме постулируется «исключительная способность» унитарных операторов индуцировать объекты и стрелки).

(a.1) Для любых $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathrm{Obj}\ (\mathcal{K})$ $\ \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ – линейное пространство.

(a.2) Для любых $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathrm{Obj}\ (\mathcal{K})$ и любого $T \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ $\ T^\sharp \in \mathcal{K}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$ (категория $\mathcal{K}$ замкнута относительно сопряжения операторов – стрелок $\mathcal{K}$).

(a.3) Для любой системы $\{\mathfrak{X}_k\}_{k\in\overline{1,n}}$ объектов $\mathcal{K}$ любое естественное вложение $\nu_{\mathfrak{X}_k} : \mathfrak{X}_k \to \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X} = \overset{e}{\underset{k\in\overline{1,n}}{[+]}}\ \mathfrak{X}_k$ – стрелка $\mathcal{K}$.

Теорема 1. *Все перечисленные в разделе 2 категории:* ***IPS, Adj, NDCont, RegB, Kr, Hilb*** *являются матричными категориями.*

Замечание 2. Из аксиом (a.1) и (a.2) следует, что для любого объекта $\mathfrak{X}$ категории $\mathcal{K}$ $\ \mathcal{K}(\mathfrak{X})$ – комплексная алгебра с инволюцией, порождаемой сопряжением операторов.

Замечание 3. Из аксиом (o.1), (o.2), (a.2) и предложения 1 следует, что любой матричный оператор, построенный из стрелок матричной категории, является стрелкой той же категории, т.е. любая матричная категория замкнута относительно образования матричных операторов.

Опять же, в силу указанных выше причин (см. замечание 1), мы опускаем подробное рассмотрение фактов, перечисленных в теореме 1 и замечаниях 2, 3.

4. Категории с квадратичным расщеплением

4.1. **Разложение Богнара-Крамли.** Пусть A – самосопряженный оператор в невырожденном ПВП $\mathfrak{X}$.

Определение 1. *Разложением Богнара-Крамли* оператора A назовем представление оператора A в форме

$$C^{\sharp}C = A, \tag{4}$$

где $C \in adj(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, а $\mathfrak{Y}$ – некоторое невырожденное ПВП. Оператор C назовем*квадратичным расщеплением* самосопряженного оператора A.

Основной мотивировкой для наших дальнейших определений (а именно, для определения *категории с квадратичным расщеплением*, см. далее) служит следующий факт. Если ПВП $\mathfrak{X}$ является пространством определенного типа (например, невырожденным ПВП, правильным банаховым пространством, или пространством Крейна), то оператор C в разложении (4) можно подобрать таким образом, чтобы $\mathfrak{Y}$ было пространством того же типа.

Для пространств Крейна соответствующий результат был получен еще в работе [11](см. также [1, 8]). А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть A – непрерывный самосопряженный оператор в пространстве Крейна $\mathfrak{X}$. Существует пространство Крейна $\mathfrak{Y}$ и такой непрерывный оператор C, что выполняется равенство* (4), *причем* $\ker C^{\sharp} = \{0\}$.

Этот факт положен нами в основу следующего определения.

4.2. **Категории с квадратичным расщеплением.** Пусть $\mathcal{K}$ – матричная категория. $\mathcal{K}$ будем называть *категорией с квадратичным расщеплением*, если дополнительно выполняется следующая аксиома.

(a.4) Для любого $\mathfrak{X} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{K})$ и для любого самосопряженного оператора $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$ существует $\mathfrak{Y} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{K})$ и $C \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ – квадратичное расщепление A, такое, что $\mathrm{Clos}\ \mathrm{R}(C) = \mathfrak{Y}$ (т.е. в $\mathcal{K}$ любой самосопоряженный оператор допускает квадратичное расщепление с плотным образом; см. также (2)).

Приведем без доказательства (см.замечание 1) следующий результат.

Теорема 2. *Категории **IPS, Adj, NDCont, RegB, Kr** являются категориями с квадратичным расщеплением.*

Отметим, что матричная категория **Hilb** не является категорией с квадратичным расщеплением. Это следует из того очевидного факта, что разложение Богнара-Крамли для самосопряженного оператора A из Ar (**Hilb**) существует тогда и только тогда, когда A – неотрицательный оператор.

5. Элементарная ротация оператора

Пусть $\mathcal{K}$ – матричная категория, $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{K})$.

Определение 2. *Элементарной ротацией (elementary rotation, Julia operator)* оператора $T \in \mathcal{K}(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$ назовем оператор $U \in \mathcal{K}(\mathfrak{N}_1[\overset{e}{+}]\mathfrak{X}_1, \mathfrak{N}_2[\overset{e}{+}]\mathfrak{X}_2)$, представимый матрицей

$$U = \begin{bmatrix} T & A \\ C & B \end{bmatrix} \tag{5}$$

и удовлетворяющий условиям:

1. U – унитарный оператор.
2. $\mathrm{Clos\ R}\ (A^\sharp) = \mathfrak{X}_1$, $\mathrm{Clos\ R}\ (C) = \mathfrak{X}_2$.

Замечание 4. Условия 2 в определении 2 (см. (2)) равносильны условиям:

3. $\ker A = \{0\}$, $\ker C^\sharp = \{0\}$.

Предложение 2. Пусть U – оператор вида (5), удовлетворяющий условиям 2 (либо 3) определения 2. U является элементарной ротацией T тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

(a) $C^\sharp C = I_{\mathfrak{N}_1} - T^\sharp T$;
(b) $AA^\sharp = I_{\mathfrak{N}_2} - TT^\sharp$;
(c) $T^\sharp A + C^\sharp B = 0$.

Доказательство. Расписывая матричные равенства $U^\sharp U = I_{\mathfrak{N}_1[\overset{e}{+}]\mathfrak{X}_1}$, $UU^\sharp = I_{\mathfrak{N}_2[\overset{e}{+}]\mathfrak{X}_2}$ покомпонентно, прийдем к системе равенств:

$$\begin{array}{ll} 1) T^\sharp T + C^\sharp C = I_{\mathfrak{N}_1}; & 4) TT^\sharp T + AA^\sharp = I_{\mathfrak{N}_2;} \\ 2) T^\sharp A + C^\sharp B = 0; & 5) TC^\sharp + AB^\sharp = 0; \\ 3) AA^\sharp + BB^\sharp = I_{\mathfrak{X}_1}; & 6) CC^\sharp + BB^\sharp = I_{\mathfrak{X}_2}. \end{array}$$

Необходимость условий (a), (b), (c) очевидна (эти условия составляют часть равенств 1)–6)).Докажем достаточность (a), (b), (c) в условиях 2 (либо 3) определения 2. Применяя последовательно (a), сопряженное к равенству (c) и равенство (b), получим:

$$(TC^\sharp + AB^\sharp)C = TC^\sharp C + AB^\sharp C = T(I_{\mathfrak{N}_1} - T^\sharp T) + A(-A^\sharp T) = T - TT^\sharp T - (I_{\mathfrak{N}_2} - TT^\sharp)T = 0,$$

т.е.

$$TC^\sharp + AB^\sharp = 0 \mid \mathrm{R}(C),$$

откуда в силу определения 2 следует равенство 5). Теперь, применяя последовательно (b) и сопряженные к равенствам (c), 5), получим:

$$(A^\sharp A + B^\sharp B)A^\sharp = A^\sharp AA^\sharp + B^\sharp BA^\sharp = A^\sharp(I_{\mathfrak{N}_2} - TT^\sharp) + B^\sharp BA^\sharp = A^\sharp - (-B^\sharp C)T^\sharp + B^\sharp BA^\sharp = A^\sharp,$$

т.е.

$$AA^\sharp + B^\sharp B = I_{\mathfrak{X}_1} \mid \mathrm{R}(A^\sharp),$$

откуда в силу условия 2 определения 2 следует равенство 3). Далее, применяя последовательно (a) и сопряженное к (c), получим:

$$(CC^\sharp + BB^\sharp)C = CC^\sharp C + BB^\sharp C = C(I_{\mathfrak{N}_1} - T^\sharp T) - B(-A^\sharp T) = C - CT^\sharp T - CT^\sharp T = C,$$

т.е.

$$CC^\sharp + BB^\sharp = I_{\mathfrak{X}_2} \mid \mathrm{R}(C),$$

откуда в силу условия 2 определения 2 следует равенство 6). Предложение доказано.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{K}$ – категория с квадратичным расщеплением. Для любого оператора $T \in \mathrm{Ar}(\mathcal{K})$ существует $U \in \mathrm{Ar}(\mathcal{K})$ – элементарная ротация T.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{K}(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$, $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{K})$. По (a.2) $T^\sharp \in \mathcal{K}(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_1)$, и по (a.1) $I_{\mathfrak{N}_1} - T^\sharp T \in \mathcal{K}(\mathfrak{N}_1)$. Далее, по аксиоме (a.4) для самосопряженного оператора $I_{\mathfrak{N}_1} - T^\sharp T$ существует квадратичное расщепление $C \in \mathcal{K}(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{X}_2)$, $\mathfrak{X}_2 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{K})$:

$$C^\sharp C = I_{\mathfrak{N}_1} - T^\sharp T, \tag{6}$$

такое, что

$$\mathrm{Clos}\ \mathrm{R}\ (C) = \mathfrak{X}_2. \tag{7}$$

Рассмотрим оператор $V = \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} \in \mathcal{K}(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \overset{e}{[+]} \mathfrak{X}_2)$. Оператор $I - VV^\sharp$ лежит в $\mathrm{Ar}(\mathcal{K})$ и является самосопряженным. Опять же, по аксиоме (a.4) для оператора $I - VV^\sharp$ существует квадратичное расщепление $S \in \mathcal{K}(\mathfrak{N}_2 \overset{e}{[+]} \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_1)$, $\mathfrak{X}_1 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{K})$:

$$S^\sharp S = I - VV^\sharp, \tag{8}$$

такое, что

$$\ker S^\sharp = \{0\}. \tag{9}$$

Из (6) следует равенство $V^\sharp V = I$, откуда получим цепочку

$$V^\sharp S^\sharp S = V^\sharp (I - VV^\sharp) = 0.$$

Ввиду условия (9) (его модификация – $\mathrm{Clos}\ \mathrm{R}\ (S) = \mathfrak{X}_1$) последнее равенство означает, что

$$V^\sharp S^\sharp = 0. \tag{10}$$

Переходя к сопряженным операторам в (10), получим равенство $SV = 0$, поэтому

$$SS^\sharp S = S(I - VV^\sharp) = S - SVV^\sharp = S.$$

Из последнего равенства и $\mathrm{Clos}\ \mathrm{R}\ (S) = \mathfrak{X}_1$ следует, что

$$SS^\sharp = I_{\mathfrak{X}_1}. \tag{11}$$

Оператор $S^\sharp \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{N}_2 \overset{e}{[+]} \mathfrak{X}_2)$ имеет вид $S^\sharp = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ с некоторыми $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{N}_2)$, $B \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ (см. аксиому (a.3)). Тогда

$$T^\sharp A + C^\sharp B = \begin{bmatrix} T^\sharp & C^\sharp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = V^\sharp S^\sharp = 0. \tag{12}$$

Покажем, что

$$\ker A = \{0\}. \tag{13}$$

Действительно, пусть $x \in \mathfrak{X}_1$ и $Ax = 0$. Тогда в силу (12) $C^\sharp Bx = 0$, и в силу (7) $Bx = 0$. Таким образом,

$$S^\sharp x = \begin{bmatrix} Ax \\ Bx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому из (11) получим $x = 0$.

Далее $\begin{bmatrix} AA^\sharp & AB^\sharp \\ BA^\sharp & BB^\sharp \end{bmatrix} = S^\sharp S = I - VV^\sharp = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^\sharp & C^\sharp \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} TT^\sharp & TC^\sharp \\ CT^\sharp & CC^\sharp \end{bmatrix}$, откуда получим

$$AA^\sharp = I - TT^\sharp. \tag{14}$$

Из соотношений (6), (7), (12), (13), (14) в силу предложения 2 заключаем, что $U = \begin{bmatrix} T & A \\ C & B \end{bmatrix}$ — элементарная ротация оператора T.

Заключение

Основным результатом данной статьи является теорема 3. В связи с рассмотренными в данной работе построениями *представляется перспективным*:

(а) дальнейшее исследование категорий ПВП, введенных в разделах 3,4;

(б) построение и исследование новых матричных категорий ПВП (например, *полных* ПВП, *ядерных* ПВП и др.);

(в) распространение соответствующих результатов, полученных с помощью разложения Богнара-Крамли и элементарной ротации для операторов из пространств Крейна (см. [1]), на матричные категории.

Список литературы

1. Dritschel M. A. and Rovnyak J. Operators on indefinite inner product spaces, Lectures on operator theory and its applications (Waterloo, ON, 1994).–Fields Institute Monographs, Amer. Math. Soc. , Providence, RI,– 1996.–Vol.3–P. 141-232
2. James Rovnyak
http://www.people.virginia.edu/ ∼ jlr5m/
3. Tiberiu Constantinescu
http://www.utdallas.edu/ ∼ tibrriu/

4. Michael A. Dritschel
http://www.math.purdue.edu/ ∼ mad/
5. Categories Home Page
http://www.mta.ca/ ∼ cat-dist/
6. lanl.arXiv.org e–Print archive mirror
http://www.arxiv.org/
7. Аронштайн Р. Квадратичные формы на векторных пространствах //Математика (сб. переводов).–1964. –Т. 8, №5. –С. 105-168
8. Bognar J. Indefinite inner product spaces. –Berlin.:Springer. –1974. –225p.
9. Mnatsakanova M., Morchio G., Strocchi F. and Vernov Yu.S. Irreducible representations of the Heisenberg algebra in Krein spaces // Preprint IFUP-TH 70/95, Pisa, –1995.
10. Азизов Т.Я., Йохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. –М.: Наука. –1986. –352с.
11. Bognar J., Kramli A. Operators of the form C^*C in indefinite inner product spaces // Acta Sci. Math. (Szegen) –1968. –Vol. 29 –P. 19-29
12. Штраус В.А. Модельное представление и функциональное исчисление операторов в пространствах с индефинитной метрикой. –Вар-нт дисс. на соискание уч. степени д-ра физ.-мат. наук. –Челябинск –1993
13. Тышкевич Д.Л. О классах сопрягаемых операторов в общих пространствах с индефинитной метрикой // Учёные записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. –2002. –Т.15(54), №2. –С. 95-98
14. Maclane S. Categories for the working mathematicians. –Graduate Texts of Mathematics 5, Springer-Verlag. –1971
15. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. –М.: Мир. –1972
16. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. –М.: Мир. –1983. –486 с.
17. McEnnis Brian W. Shifts on indefinite inner product spaces // Pacific J. Math. –1979. –Vol. 81, №1. –P. 113-130
18. Вайнберг М.М. Функциональный анализ. –М.: Просвещение. –1979. –128 с.