УДК 521.542

НИЛЬПОТЕНТНАЯ π-ДЛИНА КОНЕЧНОЙ π-РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ И КОММУТАНТ ЕЕ π-ХОЛЛОВОЙ ПОДГРУППЫ

Шпырко О. А.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Черноморский филиал
ул.Героев Севастополя, 7, г.Севастополь, Украина, 99001
e-mail: *econom@msusevastopol.net*

Abstract

All groups considered in this paper are finite. The main aim in this note is receipt new bound of nilpotent π-length for a π-soluble group depending on construction of commutant π-Hall subgroups.

Рассматриваются только конечные группы. Понятие p-длины для p-разрешимых групп введено Ф.Холлом и Г.Хигменом в 1956 году, [1]. Они исследовали зависимость p-длины p-разрешимой группы от инвариантов ее силовских p-подгрупп и показали, что p-длина $l_p(G)$ p-разрешимой группы G не превышает ступень нильпотентности $c_p(G)$, число образующих $s_p(G)$, а так же ранг $r_p(G)$ силовской p-подгруппы G_p.

На произвольные, не обязательно p-разрешимые группы, понятие p-длины распространил Л.А.Шеметков [2] в 1969 году. Он доказал, что p-длина произвольной группы не превосходит числа образующих ее силовской p-подгруппы и поставил задачу «о независимости p-длины конечной группы от инвариантов c_p, s_p, e_p и др. ее силовской подгруппы» [3, вопрос 3.60].

Для непустой формации $\mathfrak{F}$ в [4] определена $\mathfrak{F}$ — длина конечно группы, которая при конкретных значениях $\mathfrak{F}$ приводит, в частности, к понятиям π-длины и нильпотентной π-длины π-разрешимой группы.

В соответствии с выше изложенным, возникает задача и*следовать оценки нильпотентной π-длины π-разрешимой группы в зависимости от строения ее π-холловой подгруппы.* Это и является основной целью работы.

В работах [5]-[6] Н.С.Черникова и А.П.Петравчука получены оценки π-длины и нильпотентной π-длины π-разрешимой группы с нильптентной π-холловой подгруппой: $l^n_\pi(G) = l_\pi(G) = \max_{p\in\pi} l_p(G)$.

В совместной работе [7] с В.С.Монаховым доказано, что нильпотентная π-длина π-разрешимой группы не превосходит производной длины ее π-холловой подгруппы $d(G_\pi)$ в случае, когда множество состоит из нечетных простых чисел.

В настоящей заметке *получены новые оценки нильпотентной π-длины π-разрешимой группы с нильпотентным коммутантом π-холловой подгруппы, r-ый коммутант $G_\pi^{(r)}$ который перестановочен с π'-холовой подгруппой для некоторого натурального числа r* (теорема 4). В случае, когда множество π состоит только из одного простого числа, получается хорошо известный результат Хупперта, см. [8], теорема VI.6.10.

Напомним некоторые определения. Пусть π - некоторое множество простых чисел. Через π' обозначим множество всех простых чисел, не содержащихся в π, а через $\pi(G)$ — множество простых чисел, делящих порядок группы G. Возрастающим (π',π)-рядом группы G называют ряд:

$$1 = P_0 \leqslant N_0 \leqslant P_1 \leqslant N_1 \leqslant \ldots,$$

где$N_i/P_i = O_{\pi'}(G/P_i), P_{i+1}/N_i = O_\pi(G/N_i),\ i = 0,1,2,\ldots$ Здесь $O_{\pi'}(X)$ и $O_\pi(X)$ — наибольшие нормальные π'- и π-подгруппы группы X соответственно. Если группа G π-разрешима, то $N_k = G$ для некоторого натурального k. Наименьшие натуральное k с этим свойством называют π-длиной π-разрешимой группы G и обозначают через $l_\pi(G)$.

Нильпотентная π-длина π-разрешимой группы G определяется следующим образом. Пусть $P_0^n = 1, N_i^n/P_i^n = O_{\pi'}(G/P_i^n), P_{i+1}^n/N_i^n = F(G/N_i^n), i = 0,1,2\ldots$ Здесь $O_{\pi'}(X)$ — наибольшая нормальная π'-подгруппа группы X $F(X)$ — подгруппа Фиттинга группы X. Наименьшее значение k, для которого в ряде

$$1 \leqslant P_0^n \leqslant N_0^n \leqslant P_1^n \leqslant N_1^n \leqslant \ldots \leqslant P_i^n \leqslant N_i^n \leqslant \ldots \tag{1}$$

выполняется равенство $N_k^n = G$, называется нильпотентной π-длиной группы G и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Ясно, что $l_\pi^n(G) \leqslant l_\pi(G)$, а в случае, когда множество π состоит только из одного простого числа p справедливо равенство $l_\pi^n = l_\pi(G) = l_p(G)$.

Для индуктивных рассуждений нам потребуется следующие леммы. Как и в [5] под $l_\pi^*(G)$ понимается либо всюду $l_\pi(G)$, либо всюду $l_\pi^n(G)$.

Лемма 1. *(* [6]*, леммы 1, 2;* [5]*, лемма 1) Пусть π - некоторое множество простых чисел и G - π-разрешимая группа. Тогда:*

(1) *если H — подгруппа группы G, то $l_\pi^*(H) \leqslant l_\pi^*(G)$;*
(2) *если N — нормальная подгруппа группы G, то $l_\pi^*(G/N) \leqslant l_\pi^*(G)$; если N - нормальная π'-подгруппа группы G, то $l_\pi^*(G) = l_\pi^*(G/N)$;*
(3) *в любом ряде нормальных подгрупп группы G с π'-факторами и π-факторами (нильпотентными π-факторами) число неединичных π-факторов не меньше, чем $l_\pi(G)$ ($l_\pi^n(G)$ соответственно);*
(4) *если $H_i \lhd G,\ i = 1,2\ldots,n$ и $G = H_1H_2\ldots H_n$, то $l_\pi^*(G) = \max_{i=1,2,\ldots,n} l_\pi^*(H_i)$.*

Лемма 2. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и G — π-разрешимая группа. Если $l_\pi^*(G/N) < l_\pi^*(G)$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G, то*

(1) $O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1$;
(2) *в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа K;*
(3) *K — элементарная абелева p-группа, $p\varepsilon\pi$, и $K = O_{p',p}(G) = P_1^n$;*
(4) *$C_G(K) = K$ и подгруппа K дополняема в группе G.*

Доказательство. Отметим, что для $\pi = \{p\}$ лемма 2 совпадает с леммой VI.6.9 [8]. Для $l_\pi(G)$ аналогичное утверждение доказано в лемме 4 [6]. Поэтому остаётся утверждения доказать для $l_\pi^n(G)$.

(1) Из леммы 1(2) следует, что $O_{\pi'}(G) = 1$. Так как подгруппа Фраттини $\Phi = \Phi(G)$ нильпотентна, то Φ — π-подгруппа и $\Phi \leqslant P_1^n = F(G)$ в обозначения ряда (1) для группы G. Если Φ — собственная подгруппа в P_1^n, то из определения нильпотентной π-длины следует, что $l_\pi^n(G) = l_\pi^n(G/\Phi)$ и $\Phi = 1$ по условию леммы. Пусть $\Phi = P_1^n$. Тогда по теореме Шура-Цассенхауза $N_1 = H\Phi$, где H — неединичная π'-подгруппа. По лемме Фраттини $G = N_G(H)\Phi$, а по свойствам подгруппы Фраттини $G = N_G(H)$. Теперь $1 \neq H \leqslant O_{\pi'}(G) = 1$. Поэтому допущение $\Phi = P_1^n$ неверное и первое утверждение доказано.

(2) Допустим, что в группе G две минимальные нормальнные подгруппы N_1 и N_2. Тогда $N_1 \bigcap N_2 = 1$ и по лемме Ремака группа G изоморфна подгруппе прямого произведения $G/N_1 \times G/N_2$. Теперь $l_\pi^n(G) \leqslant \max_{i=1,2} l_\pi^n(G/N_i)$ по лемме 1 (1), (4). Получили противоречие с условием доказываемой леммы. Поэтому допущение неверно и второе утверждение леммы справедливо.

(3) Так как $O_{\pi'}(G) = 1$ и группа G π-разрешима, то K — элементарная абелева p-подгруппа, $p \in \pi$. Из (2) следует, что $O_{p'}(G) = 1$, поэтому $K = O_{p',p}(G) = P_1^n$ по свойству подгруппы Фиттинга, см. теорему III.4.5 [8].

(4) Так как $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа M в группе G такая, что $G = MK$. Из абелевости K следует, что $M \bigcap K = 1$, т.е. M — дополнение к подгруппе K в группе G. Теперь $C_G(K) \bigcap M \lhd G$ и по (2) $C_G(K) \bigcap M = 1$ и $K = C_G(K)$. Лемма доказана полностью.

Лемма 3. *Пусть G — группа и H — её подгруппа. Если $N \lhd G$, то $(HN/N)^{(r)} \backsimeq H^{(r)}/(H^{(r)} \bigcap N)$.*

Доказательство. Так как $HN/N \backsimeq H/(N \bigcap H)$, то их коммутанты изоморфны. По свойствам коммутантов $(H/(H \bigcap N))' = H'(H \bigcap N)/(H \bigcap N) \backsimeq H'/(H' \bigcap N)$, (см. лемму I.8.4 в [8]), поэтому $(HN/N)' \backsimeq H'/(H' \bigcap N)$. Теперь ясно, что $(HN/N)^{(r)} \backsimeq H^{(r)}/(H^{(r)} \bigcap N)$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть G — π-разрешимая группа с нильпотентной π-холловой подгруппой $H = G_\pi$ и пусть $K = G_{\pi'}$. Если $H^{(r)}K = KH^{(r)}$ для некоторого натурального r, то $l_\pi^n(G) \leqslant r$.*

Доказательство. Пусть N — нормальная неединичная подгруппа в группе G,G_π — некоторая π-холловая подгруппа группы в G, тогда HN/N — π-холлова подгруппа в G/N. По лемме 3 $(HN/N)^{(r)} = H^{(r)}N/N$, поэтому $H^{(r)}N/N \cdot KN/N = H^{(r)}KN/N = KH^{(r)}N/N = KN/NH^{(r)}N/N$. Таким образом, индукция к фактор-группе G/N применима.

Теперь по лемме 2 $O_{\pi'}(G) = 1, \Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа — подгруппа Фитинга $F(G) = F$ группы G, которая является нормальной элементарной абелевой p-подгруппой группы $G, p \in \pi$, совпадающая со своим централизатором $C_G(F) = F = P_1^n$ в группе G, и дополняемая в G, т.е. $G = [F]M$. Ясно, что π-холловая подгруппа группы G равна $G_\pi = [F]M_\pi$, где M_π — π-холловая подгруппа в M, и $F \leqslant H = G_\pi$.

Рассмотрим подгруппу $F_1 = F \bigcap H^{(r)} \leqslant F \bigcap H^{(r)}K$. Так как $F \bigcap H^r K \lhd KH^{(r)}$ и $F \bigcap H^{(r)}K$ — группа, то $F \bigcap H^{(r)}K \leqslant {}^{(r)}$. Значит $F_1 = F \bigcap H^{(r)} = F \bigcap H^{(r)}K \lhd KH^{(r)}$. Так как F и $H^{(r)}$ — нормальные подгруппы группы H, то $F_1 \lhd H$. Поэтому $F_1 \lhd G$. Таким образом, F — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $F_1 = F \bigcap H^{(r)} = 1$ либо $F_1 = F \bigcap H^{(r)} = F$.

Если $F_1 = F \bigcap H^{(r)} = 1$, то $H^{(r)} \leqslant C = F$ и $H^{(r)} = 1$. Учитывая лемму 4 из [5], теорему A из [1] и теорему из [10], получаем, что $l_\pi^n(G) = \max_{p\in\pi} l_p(G) \leqslant \max_{p\in\pi} d_p(G) \leqslant r$.

Пусть теперь $F \leqslant H^{(r)}$, тогда $H^{(r)} \leqslant \Phi(H^{(r)}) \leqslant \Phi(H)$, так как нильпотентна, и $F \leqslant \Phi(G)$ по теореме III.3.3, [8], противоречие. Теорема доказана

Следствие 1. *(Теорема 4,* [9]*) Пусть G — π-разрешимая группа с нильпотентной π-холловой подгруппой $H = G_\pi$ и пусть $K = G_{\pi'}$. Если $H^{(r)}K = KH^{(r)}$ для некоторого натурального r, то $l_\pi(G) \leqslant r$.*

Следствие 2. *(Теорема VI.6.10,* [8]*) Пусть G — -разрешимая группа, H — -силовская подгруппа и K — -дополнение в G. Если $H'K = KH'$, то $l_p(G) \leqslant 1$.*

Теорема 2. *Если G — π-разрешимая группа, у которой коммутант π-холловой подгруппы нильпотентен. Пусть $H = G_\pi$ и $K = G_{\pi'}$. Если $H^{(r)}K = KH^{(r)}$ для некоторого натурального r, то $l_\pi^n(G) \leqslant r + 1$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Пусть N — нормальная неединичная подгруппа в группе G, G_π — некоторая π-холловая подгруппа группы в G, тогда HN/N — π-холловая подгруппа в G/N. По лемме 3 $(HN/N)^{(r)} = H^{(r)}N/N$ поэтому $H^{(r)}N/N \cdot KN/N = H^{(r)}KN/N = KH^{(r)}N/N = KN/N \cdot H^{(r)}N/N$. Таким образом, индукция к фактор-группе G/N применима.

Теперь по лемме 2 $O_{\pi'}(G) = 1, \Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа — подгруппа Фиттинга $F(G) = F$ группы G, которая является нормальной элементарной абелевой p-подгруппой группы $G, p \in \pi$, совпадающая со своим централизатором в группе G, и дополняемая в G, т.е. $G = [F]M$. Ясно, что π-холовая подгруппа группы G равная $G_\pi = [F]M_\pi$, где M_π — π-холловая подгрупа в M, и $F \leqslant H = G_\pi$.

Пусть D — коммутант π-холловой подгруппы G_π. По условию теоремы подгруппа D нильпотентна. Так как p'-холловая подгруппа $D_{p'}$ из D нормальна в G_π, то

$D_{q'} \leqslant C_G(F) = F$ и $D_{p'} = 1$. Таким образом, D является p-группой и все силовские q-подгруппы в группе G абелевы для $q \in \pi \backslash \{p\}$.

Рассмотрим подгруппу $F_1 = F \bigcap H^{(r)} \leqslant F \bigcap H^{(r)}K$. Так как $H^{(r)}$ — силовская p-подгруппа в $H^{(r)}K, F \bigcap H^{(r)}K \lhd KH^{(r)}$ и $F \bigcap H^{(r)}K$ — -группа, то $F \bigcap H^{(r)}K \leqslant\ ^{(r)}$. Значит $F_1 = F \bigcap H^{(r)} = F \bigcap H^{(r)}K \lhd KH^{(r)}$ и $K \leqslant N_G(F_1)$. Так как F и $H^{(r)}$ — нормальные подгруппы группы H, то $F_1 \lhd H$. Поэтому $F_1 \lhd G$. Так как F — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $F_1 = F \bigcap H^{(r)} = 1$ либо $F_1 = F \bigcap H^{(r)} = F$.

Если $F_1 = F \bigcap H^{(r)} = 1$, то $H^{(r)} \leqslant C = F$ и $H^r = 1$. Учитывая теорему 2 из [7], теорему A из [1] и теорему из [10], получаем, что $l_\pi^n(G) \leqslant 1 + \max_{p \in \pi} l_p(G) \leqslant 1 + \max_{p \in \pi} d_p(G) \leqslant r + 1$.

Пусть теперь $F_1 = F \bigcap H^{(r)} = F$, т.е. $F \leqslant H^{(r)}$. Тогда $H^{(r)} \leqslant \Phi(H') \leqslant \Phi(H)$, так как нильпотентна, и $F \leqslant \Phi(G)$ по теореме III.3.3, [8], противоречие. Теорема доказана полностью.

Следствие 3. *Пусть G — π-разрешимая группа со сверхразрешимой π-холловой подгруппой $H = G_\pi$ и пусть $K = G_{\pi'}$. Если $H^{(r)}K = KH^{(r)}$ для некоторого натурального r, то $l_\pi^n(G) \leqslant r + 1$.*

Доказательство. Достаточно вспомнить, что у сверхразрешимой группы коммутант нипльотентен, см. теорему VI.9.1 из [8], а затем применить теорему 5.

Следствие 4. *Пусть G — π-разрешимая группа с циклическими силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi$ и пусть $H = G_\pi$, $K = G_{\pi'}$. Если $H^{(r)}K = KH^{(r)}$ для некоторого натурального r, то $l_\pi^n(G) \leqslant r + 1 \leqslant 2$.*

Доказательство. Следует из того, что π-холловая подгруппа группы G сверхразрешима по теореме VI.2.11, [8] и того факта, что $H' = 1$.

В заключении хотелось бы отметить, что задача исследования оценок нильпотентной π-длины π-разрешимой группы в зависимости от строения ее π-холловой подгруппы остается актуальной. Более того, можно установить зависимость между нильпотентной π-длиной π-разрешимой группы и строением ее p-силовских подгрупп или их центральных пересечений, $p \in \pi$.

Список литературы

1. Hall P., Highman G. On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems of Burnside's problem. Proc. London Math. Soc. - 1956. - Vol.6(3). - P.1-40.
2. Шеметков Л. А. О p-длине произвольных конечных групп. Докл. АН БССР. - 1969. - Т. XIII, №5. - С.394-195.
3. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Новосибирск: Интститут математики СО АН СССР. - 1990. - 125с.
4. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. - 267 с.

5. Черников Н. С., Петравчук А. П. Бесконечне группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: Интститут математики, 1993. - С. 393-405: В кн. О π-длине конечных π-разрешимых групп.
6. Черников Н. С., Петравчук А.П. Характерезация переодически локально разрешимых групп с разрешимыми и с конечноэкспонентыми силовскими π-подгруппами. Укр.мат.журн. - 1987. - Т. 39, №6, - С. 761-767.
7. Монахов В. С., Шпырко О. А. О нильпотентной π-длине конечной π-разрешимой группы. Дискрет. матем. - Т.13, вып.3. - 2001. - С.145-152.
8. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin-Heidelberg-New York. - 1967. - 793 p.
9. Путилов С. В. О π-длине π-разрешимых групп. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. -1983, №3 - С.9-13.
10. Брюханова Е. Г. Связь между 2-длиной и производной длиной силовской 2-подгруппы конечной разрешимой группы. Матем. заметки. - 1981, №2(29). - С.161-170.