УДК 519.21

ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОТЕРЯМИ ТРЕБОВАНИЙ

А.И. Коваленко, Б.Д. Марянин, В.П. Смолич

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *smolich@tnu.crimea.ua*

Abstract
The equilibrium probability characteristics of single server queue of infinite capacity are obtained. It is assumed that a newly arriving job which sees the broken and renewed server is discarded.

Введение и постановка задачи

В классических задачах теории массового обслуживания предполагается, что приборы системы могут работать на протяжении всего периода обслуживания. Однако на самом деле всякий прибор не может как угодно долго сохранять «рабочее» состояние – он может выходить из строя и нуждаться в некотором времени на восстановление. В этом направлении мы можем сослаться на работы Т.П. Марьяновича [1] и [2]. В статье [2] им рассмотрена однолинейная система с возможностью выхода прибора из строя и бесконечной очередью. В случае поломки прибора во время обслуживания время, затраченное на обслуживание, теряется и требование снова становится в очередь. Более свежие работы по СМО с выходом системы из строя – [3], [4]. В нашей работе обслуживание требования продолжается после восстановления прибора с сохранением времени уже затраченного на обслуживание. Кроме того, предлагается другой подход к решению подобных задач, позволяющий получить большее число вероятностных характеристик системы.

Постановка задачи. Рассматривается система массового обслуживания, состоящая из одного обслуживающего прибора (линии), на который поступает простейший поток требований с параметром λ_1. Время обслуживания требования линией - непрерывная случайная величина ω_1 с произвольной функцией распределения. Линия во время обслуживания требования может выходить из строя (ломаться), поток поломок также предполагается простейшим с параметром λ_2. Ремонт (восстановление) вышедшей из строя линии осуществляет наладчик, время ремонта - непрерывная случайная величина ω_2 также может иметь произвольную функцию распределения. Требование, заставшее линию за обслуживанием, становится в очередь, которая предполагается неограниченной. Требование, заставшее линию в момент ее ремонта, теряется.

цель статьи - получить вероятностные характеристики данной системы.

1. Математическое моделирование задачи

Занумеруем состояние системы следующим образом:

0 - линия исправна и свободна от требований.
k - линия исправна, в системе находится k требований, одно из них обслуживается линией, остальные ожидают очереди.
$\hat{k}$ - линия неисправна и восстанавливается наладчиком, в системе находится k требований в очереди, одно из них частично обслужено (первое в очереди) $k \in N$.

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$, фазовое пространство которого состоит из одной «точки» 0, счетного множества «полупрямых» (k, ω_1) (система в состоянии k и на обслуживание требования затрачено ω_1 времени)и счетного множества «четвертьплоскостей» $(\hat{k}, \omega_1, \omega_2)$ (система в состоянии $\hat{k}$, на обслуживание требования до поломки системы затрачено ω_1 времени и на ремонт системы затрачено ω_2 времени). Этот процесс мы называем полилинейчатым.

Введем функции

$$p_0(t) = P\{\xi(t) = 0\}, \quad p_k(t) = P\{\xi(t) = (k, \omega_1)\},$$

$$p_{\hat{k}} = P\{\xi(t) = (\hat{k}, \omega_1, \omega_2)\}, \quad \hat{k}, k \in N$$

Предпологаем, что при $t \to \infty$ система обслуживания входит в стационарный режим, т. е. существуют предельные вероятности состояний системы:

$$p_0 = \lim_{t\to\infty} p_0(t), \quad p_k = \lim_{t\to\infty} p_k(t), \quad p_{\hat{k}} = \lim_{t\to\infty} p_{\hat{k}}(t).$$

Обозначим через $\mu_1(x)$ и $\mu_2(y)$ соответственно интенсивности случайных величин ω_1 и ω_2 и для функций распределения этих случайных величин используем обозначения:

$$F_1(x) = P\{\omega_1 < x\} = 1 - e^{-\int\limits_0^x \mu_1(t)dt}, \quad F_2(y) = P\{\omega_2 < y\} = 1 - e^{-\int\limits_0^y \mu_2(t)dt}.$$

Введем также обозначения для плотностей распределения и функций надежности:

$$f_1(x) = F_1'(x) = \mu_1(x)e^{-\int\limits_0^x \mu_1(t)dt}, \quad f_2(y) = F_2'(y) = \mu_2(y)e^{-\int\limits_0^y \mu_2(t)dt}$$

$$\Phi_1(x) = 1 - F_1(x) = e^{-\int\limits_0^x \mu_1(t)dt}, \quad \Phi_2(y) = 1 - F_2(y) = e^{-\int\limits_0^y \mu_2(t)dt}$$

Введем функции:

$$Q_k(t,x) = P\{\xi(t) = (k,\omega_1), \omega_1 < x\}, \quad q_k(t,x) = \frac{\partial Q_k(t,x)}{\partial x}$$

$$Q_{\hat{k}}(t,x,y) = P\{\xi(t) = (\hat{k},\omega_1,\omega_2), \omega_1 < x, \omega_2 < y\}, \quad q_{\hat{k}}(t,x,y) = \frac{\partial^2 Q_{\hat{k}}(t,x,y)}{\partial x \partial y}$$

Заметим, что эти функции связаны с ранее введенными следующими соотношениями:

$$p_k(t) = Q_k(t,+\infty) = \int_0^{+\infty} q_k(t,x)dx,$$

$$p_{\hat{k}}(t) = Q_{\hat{k}}(t,+\infty,+\infty) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} q_{\hat{k}}(t,x,y)dxdy.$$

Проведем так называемые вероятностные рассуждения и предельные переходы. Пусть $t(t>0)$ - любой момент времени, $h(h>0)$ - достаточно малый промежуток времени, тогда событие $A = \{\xi(t+h) = 0\}$ может наступить тогда, когда произойдет одно из следующих событий: $B = \{\xi(t) = 0$ и за промежуток времени h не поступило требований в систему$\}$, $C_k = \{\xi(t) = (1,\omega_1), x_k \leq \omega_1 < x_k + h$, и за время h закончилось обслуживание требования линией, и за время h не поступило требование в систему, и за время h не сломалась линия$\}$, где $x_k = k \cdot h$, $k = 1, 2, ...$ Имеем

$$A = B + \sum_{k=0}^{\infty} C_k, \quad P(A) = P(B) + \sum_{k=0}^{\infty} P(C_k)$$

В этих равенствах мы пренебрегаем событиями, вероятности которых составляют $o(h)$ при $h \to 0$.

Используя введенные ранее функции, получаем

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1-\lambda_1 h + o(h)) +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{x_k}^{x_k+h} q_1(t,x)dx(\mu_1(x_k)h + o(h)) \cdot (1-\lambda_2 h + o(h)) \cdot (1-\lambda_1 h + o(h)),$$

$$p_0(t+h) - p_0(t) + (\lambda_1 h + o(h))p_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_1(t,x_k)\mu_1(x_k)h^2 + o(h).$$

Поделив обе части последнего равенства на h и перейдя к пределу при $h \to 0$, получаем:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} + \lambda_1 p_0(t) = \int_0^{\infty} q_1(t,x)\mu_1(x)dx. \tag{1}$$

Аналогичными рассуждениями получаем далее:

$$\frac{\partial q_1(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial q_1}{\partial x}+(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1(x))q_1(t,x)=\int\limits_0^\infty q_{\hat{1}}(t,x,y)\mu_2(y)dy. \qquad (2)$$

$$\frac{\partial q_k(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial q_k(t,x)}{\partial x}+(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1(x))q_k(t,x)=\int\limits_0^\infty q_{\hat{k}}(t,x,y)\mu_2(y)dy+\lambda_1 q_{k-1}(t,x) \quad (3)$$

$$k=2,3,...$$

Для системы интегро - дифференциальных уравнений (1) - (3) выводим далее граничные условия:

$A=\{\xi(t+h)=(1,\omega_1),0\le\omega_1<h\}$, $B=\{\xi(t)=0$, и из h поступило требование$\}$, $C_k=\{\xi(t)=(2,\omega_1),x_k\le\omega_1<x_k+h$, и за h закончилось обслуживание, и за h не поступило требование, и за h не сломалось линия$\}$.

$$\int\limits_0^h q_1(t+h,x)dx=p_0(t)(\lambda_1 h+o(h))+$$

$$\sum_{k=0}^\infty\int\limits_{x_k}^{x_k+h} q_2(t,x)dx(1-\lambda_1 h+o(h))(1-\lambda_2 h+o(h))(\mu_1(x_k)h+o(h))$$

$$q_1(t,0)=\lambda_1 p_0(t)+\int\limits_0^\infty q_2(t,x)\mu_1(x)dx \qquad (4)$$

Аналогичным образом получаем:

$$q_k(t,0)=\int\limits_0^\infty q_{k+1}(t,x)\mu_1(x)dx,\quad k=2,3,... \qquad (5)$$

Продолжаем подобные рассуждения для вывода интегро - дифференциальных уравнений и граничных условий для функций $q_{\hat{k}}(t,x,y)$:

$$A=\{\xi(t+h)=(\hat{1},\omega_1,\omega_2),x\le\omega_1<x+h,y\le\omega_2<y+h\},$$

$B=\{\xi(t)=(\hat{1},\omega_1,\omega_2),x\le\omega_1<x+h,y-h\le\omega_2<y$ и за время h не закончился ремонт$\}$.

$$\int\limits_x^{x+h}da\int\limits_y^{y+h}q_{\hat{1}}(t+h,a,b)db=\int\limits_x^{x+h}da\int\limits_{y-h}^{y}q_{\hat{1}}(t,a,b)db(1-\mu_2(y)+o(h))$$

$$\left(\int\limits_{x}^{x+h} da \int\limits_{y}^{y+h} q_{\hat{1}}(t+h,a,b)db - \int\limits_{x}^{x+h} da \int\limits_{y-h}^{y} q_{\hat{1}}(t,a,b)db\right) +$$

$$\int\limits_{x}^{x+h} da \int\limits_{y-h}^{y} q_{\hat{1}}(t,a,b)db(\mu_2(y)h + o(h)) = 0.$$

После деления на h^3 и перехода к пределу при $h \to 0$, имеем:

$$\frac{\partial q_{\hat{1}}(t,x,y)}{\partial t} + \frac{\partial q_{\hat{1}}(t,x,y)}{\partial y} + \mu_2(y) q_{\hat{1}}(t,x,y) = 0 \tag{6}$$

И далее:

$$\frac{\partial q_{\hat{k}}(t,x,y)}{\partial t} + \frac{\partial q_{\hat{k}}(t,x,y)}{\partial y} + \mu_2(y) q_{\hat{k}}(t,x,y) = 0, \quad k = 2,3,... \tag{7}$$

$$q_{\hat{k}}(t,x,0) = \lambda_2 q_k(t,x), \quad k = 1,2,... \tag{8}$$

2. Решение системы (1) - (8) при $t \to +\infty$.

Предполагая существование пределов (стационарного режима системы)

$p_k = \lim\limits_{t\to\infty} p_k(t)$, $k = 0,1,2,....$

$$p_{\hat{k}} = \lim_{t\to\infty} p_{\hat{k}}(t), \quad g_k = \lim_{t\to\infty} g_k(t,x), \quad g_{\hat{k}}(x,y) = \lim_{t\to\infty} g_{\hat{k}}(t,x,y) \quad k = 1,2,....$$

перепишем систему (1) - (8) в виде:

$$\begin{cases} \lambda_1 p_0 = \int\limits_0^\infty g_1(x)\mu_1(x)dx, \\ \dfrac{dg_1(x)}{dx} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1(x))g_1(x) = \int\limits_0^\infty g_{\hat{1}}(x,y)\mu_2(y)dy, \\ \dfrac{dg_k(x)}{dx} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1(x))g_k(x) = \int\limits_0^\infty g_{\hat{k}}(x,y)\mu_2(y)dy + \lambda_1 g_{k-1}(x), \quad k = 2,3,... \\ g_1(0) = \lambda_1 p_0 + \int\limits_0^\infty g_2(x)\mu_1(x)dx, \\ g_k(0) = \int\limits_0^\infty g_{k+1}(x)\mu_1(x)dx, \quad k = 2,3,.... \\ \dfrac{\partial g_{\hat{k}}(x,y)}{\partial y} + \mu_2(y) g_{\hat{k}}(x,y) = 0, \quad k = 1,2,.... \\ g_{\hat{k}}(x,0) = \lambda_2 g_k(x), \quad k = 1,2,.... \end{cases} \tag{9}$$

Введем производящие функции:

$$\pi(x,z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) z^k, \qquad \hat{\pi}(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{\hat{k}}(x,y) z^k,$$

$$\pi(z) = \int\limits_0^\infty \pi(x,z)dx = \sum_{k=1}^\infty p_k z^k, \qquad \hat{\pi}(z) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \hat{\pi}(x,y,z)dxdy = \sum_{k=1}^\infty p_{\hat{k}} z^k.$$

Имеем:

$$\frac{\partial \pi(x,z)}{\partial x} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1(x))\pi(x,z) = \int\limits_0^\infty \hat{\pi}(x,y,z)\mu_2(y)dy + \lambda_1 z\pi(x,z), \tag{10}$$

$$\lambda_1 p_0 z + z\pi(0,z) = \lambda_1 p_0 z^2 + \int\limits_0^\infty \pi(x,z)\mu_1(x)dx, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \hat{\pi}(x,y,z)}{\partial y} + \mu_2(y)\hat{\pi}(x,y,z) = 0, \tag{12}$$

$$\hat{\pi}(x,0,z) = \lambda_2 \pi(x,z). \tag{13}$$

Из (12) и (13) находим:

$$\hat{\pi}(x,y,z) = \lambda_2 \pi(x,z) \cdot \exp\left(-\int\limits_0^y \mu_2(t)dt\right) = \lambda_2 \pi(x,z) \cdot \Phi_2(y) \tag{14}$$

Для решения уравнения (10) вычислим интеграл

$$J = \int\limits_0^\infty \hat{\pi}(x,y,z)\mu_2(y)dy = \lambda_2 \pi(x,z) \int\limits_0^\infty \underbrace{\Phi_2(y)\mu_2(y)}_{f_2(y)} dy = \lambda_2 \pi(x,z)$$

Уравнение (10) и граничное условие (11) дают:

$$\frac{\partial \pi(x,z)}{\partial x} + (\lambda_1(1-z) + \mu_1(x))\pi(x,z) = 0$$

$$\pi(0,z) = \lambda_1(z-1)p_0 + \frac{1}{z}\int\limits_0^\infty \pi(x,z)\mu_1(x)dx$$

$$\pi(x,z) = \left(\lambda_1(z-1)p_0 + \frac{1}{z}\int\limits_0^\infty \pi(x,z)\mu_1(x)dx\right) \cdot \exp(-\lambda(1-z)x) \cdot \Phi_1(x) \tag{15}$$

Для нахождения интеграла умножим обе части равенства (15) на $\mu_1(x)$ и принтегрируем на $(0,\infty)$:

$$J = \int\limits_0^\infty \pi(x,z)\mu_1(x)dx = \left(\lambda_1(z-1)p_0 + \frac{1}{z}\int\limits_0^\infty \pi(x,z)\mu_1(x)dx\right) \cdot f_1^*(\lambda_1(1-z))$$

$$J = \left(\lambda_1(z-1)p_0 + \frac{1}{z}J\right) \cdot f_1^*(\lambda_1(1-z)), \qquad J = \frac{\lambda_1 z(z-1)p_0 f_1^*(\lambda_1(1-z))}{z - f_1^*(\lambda_1(1-z))}$$

Из (15) находим:

$$\pi(x,z) = \frac{\lambda_1 z(z-1)p_0}{z - f_1^*(\lambda_1(1-z))}\exp(-\lambda(1-z)x)\cdot\Phi_1(x) \tag{16}$$

$$\pi(z) = \int\limits_0^\infty \pi(x,z)dx = \frac{\lambda_1 z(z-1)p_0}{z - f_1^*(\lambda_1(1-z))}\Phi_1^*(\lambda_1(1-z)) \tag{17}$$

Из (14) получаем

$$\pi(z) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \lambda_2\pi(x,z)\cdot\Phi_2(y)dxdy = \frac{\lambda_1 z(z-1)p_0}{z - f_1^*(\lambda_1(1-z))}\Phi_1^*(\lambda_1(1-z))\frac{\lambda_2}{\mu_2} \tag{18}$$

поскольку

$$\Phi_2^*(0) = -f_2^*(0) = \int\limits_0^\infty \Phi_2(y)dy = M\omega_2 = \frac{1}{\mu_2} - \text{среднее время ремонта.}$$

Для производящей функции

$$g(z) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(p_k + p_{\hat{k}})z_k = p_0 + \pi(z) + \hat{\pi}(z)$$

получаем

$$g(z) = p_0 + \frac{\lambda_1 z(z-1)p_0}{z - f_1^*(\lambda_1(1-z))}\Phi_1^*(\lambda_1(1-z))\left(1+\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) =$$

$$= p_0\frac{z - f_1^*(\lambda_1(1-z)) + \lambda_1 z(z-1)\Phi_1^*(\lambda_1(1-z))\left(1+\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)}{z - f_1^*(\lambda_1(1-z))} \tag{19}$$

Учитывая равенства

$$f^*(s) = 1 - s\Phi^*(s), \quad \Phi^*(s) = \frac{1-f^*(s)}{s}$$

преобразуем $g(z)$ к двум видам. Первый из них:

$$g(z) = p_0\frac{z - f_1^*(\lambda_1(1-z)) + \lambda_1 z(z-1)\frac{1-f_1^*(\lambda_1(1-z))}{\lambda_1(1-z)}\left(1+\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)}{z - f_1^*(\lambda_1(1-z))} =$$

$$= p_0\frac{z\frac{\lambda_2}{\mu_2}(f_1^*(\lambda_1(1-z))-1) - f_1^*(\lambda_1(1-z))(1-z)}{z - f_1^*(\lambda_1(1-z))} \tag{20}$$

Заметим, что при $\lambda_2 = 0$ из (20) получается известная формула Хинчина - Поллачека.

Далее второй вид:

$$g(z) = p_0 \frac{z - (1 - \lambda_1(1-z)\Phi_1^*(\lambda_1(1-z))) - \lambda_1 z(1-z)\Phi_1^*(\lambda_1(1-z))\left(1 + \dfrac{\lambda_2}{\mu_2}\right)}{z - (1 - \lambda_1(1-z))\Phi_1^*(\lambda_1(1-z))} =$$

$$= p_0 \frac{\lambda_1\Phi_1^*(\lambda_1(1-z))(1-z) - 1 - z - z\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_2}\Phi_1^*(\lambda_1(1-z))}{\lambda_1\Phi_1^*(\lambda_1(1-z)) - 1} =$$

$$= p_0 \frac{1 - \lambda_1\Phi_1^*(\lambda_1(1-z))\left((1-z) - z\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}\right)}{1 - \lambda_1\Phi_1^*(\lambda_1(1-z))} \tag{21}$$

При $z = 1$ имеем

$$1 = p_0 \frac{1 + \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_2}\Phi_1^*(0)}{1 - \lambda_1\Phi_1^*(0)} = p_0 \frac{1 + \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}}{1 - \dfrac{\lambda_1}{\mu_1}},$$

где через $\dfrac{1}{\mu_1}$ обозначено среднее время обслуживания: $\dfrac{1}{\mu_1} := M\omega_1 = \int\limits_0^\infty \Phi_1(x)dx = \Phi_1^*(0) = -f_1^{\star\prime}(0)$. Отсюда

$$p_0 = \frac{1 - \dfrac{\lambda_1}{\mu_1}}{1 + \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}} = \frac{1 - p_1}{1 + p_1 p_2},$$

где $p_i := \dfrac{\lambda_1}{\mu_1}$. Поскольку $0 < p_0 < 1$, то необходимым условием эргодичности случайного процесса $\xi(t)$ будет соотношение $\dfrac{\lambda_1}{\mu_1} < 1$.

Среднее количество требований в системе (длина очереди) L вычисляется при помощи $g(z) : L = g'(z)|_{z=1}$. Из (21) находим

$$g'(1) = p_0 \frac{(1 - \frac{\lambda_1}{\mu_1})(\lambda_1^2\Phi_1^{*\prime}(0)(-\frac{\lambda_2}{\mu_2}) + (1 + \frac{\lambda_2}{\mu_2})\frac{\lambda_1}{\mu_1}) - (1 - \frac{\lambda_1}{\mu_1}(-\frac{\lambda_2}{\mu_2}))\lambda_1^2\Phi_1^{*\prime}(0)}{(1 - \frac{\lambda_1}{\mu_1})^2}$$

Обозначим через $r_1^{(2)}$ второй момент случайной величины ω_1 (полагаем, что он существует):

$$r_1^{(2)} = \int\limits_0^\infty x^2 f_1(x)\,dx$$

Поскольку

$$\Phi_1^{*'}(0) = \int_0^\infty x\Phi_1(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2 f_1(x)\,dx = -\frac{1}{2}r_1^{(2)}, \text{то}$$

$$g'(1) = p_0\frac{(1-\rho_1)(\lambda_1^2\frac{r_1^{(2)}}{2}\rho_2 + (1+\rho_2)\rho_1) + (1+\rho_1\rho_2)\lambda_1^2\frac{r_1^{(2)}}{2}}{(1-\rho_1)^2} =$$

$$= \frac{(1+\rho_2)(\frac{1}{2}r_1^{(2)}\lambda_1^2 + \rho_1(1-\rho_1))}{(1+\rho_1\rho_2)(1-\rho_1)} \quad (22)$$

Вероятность потери требований системой равна $\hat{\pi}(1)$. Из (18) находим

$$\hat{\pi}(z) = p_0\frac{\lambda_1 z(z-1)p_0}{z-(1-\lambda_1(1-z)\Phi_1^*(\lambda_1(1-z)))}\frac{\lambda_2}{\mu_1}\Phi_1^*(\lambda_1(1-z)) = p_0\frac{\lambda_1 z\frac{\lambda_2}{\mu_2}\Phi_1^*(\lambda_1(1-z))}{1-\lambda_1\Phi_1^*(\lambda_1(1-z))},$$

$$\hat{\pi}(1) = p_0\frac{\lambda_1\frac{\lambda_2}{\mu_2}\frac{1}{\mu_2}}{1-\frac{\lambda_1}{\mu_1}} = \frac{\frac{\lambda_1}{\mu_1}\frac{\lambda_2}{\mu_2}}{1+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2} = \frac{\rho_1\rho_2}{1+\rho_1\rho_2}$$

3. Исследование периода занятости.

Обозначим через γ случайную величину - время занятости системы от момента поступления первого требования в свободную от требований систему до момента первого освобождения её от требований. Следуя методу, изложенному в [5], обозначим преобразование Лапласа случайной величины γ через $\Gamma^*(s) : \Gamma^*(s) = Me^{-s\gamma}$. (Напомним, что случайные величины ω_1 и ω_2 - времена обслуживания требования и ремонта линии соответственно, $f_1^*(s) = Me^{-s\omega_1}$, $f_2^*(s) = Me^{-s\omega_2}$ - преобразования Лапласа этих величин).

Заметим, что длительность γ периода занятости не зависит от порядка обслуживания требований. Поэтому можно считать, что обслуживание производится по принципу «последний прибыл - первым обслужен».

Обозначим через $\alpha(T)$ число требований, поступающих в систему за промежуток времени T, через $\beta(T)$ - число поломок линии за промежуток T. Случайные величины $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ имеют распределения Пуассона с параметрами соответственно $\lambda_1 T$ и $\lambda_2 T$, так как потоки требований и поломок простейшие с параметрами λ_1 и λ_2 . Заметим, что для любых $A > 0$ и $B > 0$

$$MA^{\alpha(T)} = \exp(-l_1T(1-A)), MB^{\beta(T)} = \exp(-l_2T(1-B))$$

За время обслуживания $\omega_1^{(1)}$ первого требования ($\omega_1^{(1)}$ имеет то же распределение, что и ω_1, с момента поступления которого начался период занятости, линия может сломаться $\beta(\omega_1^{(1)})$ раз, и на её ремонт потратится $\sum_{k=1}^{\beta(\omega_1^{(1)})}\omega_2^{(k)}$ времени (случайные величины $\omega_2^{(1)}$,$\omega_2^{(2)}$, $\cdots$ независимы, одинаково распределены и имеют распределение, такое же как и ω_2). Поскольку требования на систему поступают непрерывно, то в момент окончания обслуживания первого требования в систему поступает $\alpha(\omega_1^{(1)})=\alpha_1$ требований. В силу сделанных предположений о порядке обслуживания первым из них начнёт обслуживаться требование с номером α_1 (если такое имеется). Требование с номером α_1-1 (если оно существует) начнет обслуживаться лишь после того как обслужатся требования с номером α_1 и все требования, которые поступят в систему за время его обслуживания. Таким образом, с требованием, имеющим номер α_1 ,оказывается связанным интервал времени, длительность которого γ_1 имеет то же распределение, что и γ. Подобные интервалы можно связать с каждым из α_1 требований. Тогда

$$\gamma=\omega_1^{(1)}+\sum_{k=1}^{\beta(\omega_1^{(1)})}\omega_2^{(k)}+\sum_{i=1}^{\alpha(\omega_1^{(1)})}\gamma_i$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}\Gamma^*(s)=Me^{-s\gamma}=M\exp\left(\omega_1^{(1)}+\sum_{k=1}^{\beta(\omega_1^{(1)})}\omega_2^{(k)}+\sum_{i=1}^{\alpha(\omega_1^{(1)})}\gamma_i\right)=\\ =Me^{-s\omega_1}(Me^{-s\gamma})^{\alpha(\omega_1)}(Me^{-s\omega_2})^{\beta(\omega_1)}=Me^{-s\omega_1}(\Gamma^*(s))^{\alpha(\omega_1)}(f_2^*(s))^{\beta(\omega_1)}=\\ =Me^{-s\omega_1}\cdot e^{-\lambda_1\omega_1(1-\Gamma^*(s))}\cdot e^{-\lambda_2\omega_1(1-f_2^*(s))}=Me^{-\omega_1(s+\lambda_1(1-\Gamma^*(s))+\lambda_2(1-f_2^*(s)))}=\\ =f_1^*(s+\lambda_1(1-\Gamma^*(s))+\lambda_2(1-f_2^*(s)))\end{aligned}$$

Таким образом, получаем функциональное уравнение для $\Gamma^*(s)$:

$$\Gamma^*(s)=f_1^*(s+\lambda_1(1-\Gamma^*(s))+\lambda_2(1-f_2^*(s))) \tag{23}$$

В заключение найдём среднюю длину периода занятости $M\gamma=-\lim\limits_{s\to+0}\Gamma^{*'}(s)$ при условии $\frac{\lambda_1}{\mu_1}\le 1$. Дифференцируя уравнение (23) , получим

$$\Gamma^{*'}(s)=f_1^{*'}(s+\lambda_1(1-\Gamma^*(s))+\lambda_2(1-f_2^*(s)))(1-\lambda_1\Gamma^{*'}(s)-\lambda_2 f_2^{*'}(s))\text{или}$$

$$\Gamma^{*'}(s)=\frac{f_1^{*'}(s+\lambda_1(1-\Gamma^*(s))+\lambda_2(1-f_2^*(s)))((1-\lambda_2 f_2^{*'}(s)))}{1+\lambda_1 f_1^{*'}(s+\lambda_1(1-\Gamma^*(s))+\lambda_2(1-f_2^*(s)))}$$

Отсюда

$$M\gamma=-\lim_{t\to\ +0}\Gamma^{*'}(s)=\begin{cases}\frac{\frac{1}{\mu_1}\left(1+\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)}{1-\frac{\lambda_1}{\mu_1}}=\frac{1+\rho_2}{\mu_1(1-\rho_1)} & \text{при } \rho_1<1;\\ \infty & \text{при } \rho_1=1\end{cases}$$

4. Распределение времени пребывания требования в системе.

Пусть t_n - момент поступления n-го требования в систему, s_n - момент завершения его обслуживания. Тогда $x_n = s_n - t_n$ - время пребывания n-го требования в системе. Найдём предел преобразования Лапласа распределения x_n :

$$\varphi^*(s) = \lim_{n\to\infty} Me^{-sx_n}$$

Заметим, что в момент s_n в системе остаются те и только те требования, которые поступили за время пребывания x_n n-го требования, поскольку обслуживание требований можно считать происходящим в порядке очерёдности их поступления в систему. Кроме того, при $n \to \infty$ количество требований в системе (в стационарном режиме) не зависит от начальных условий и имеет производящую функцию $\pi(z)$.

В системе с потерями за время x_n линия занята обслуживанием очередных требований в течение времени τ_n ($\tau_n \leq x_n$). Время $x_n - \tau_n$ используется для ремонта линии при её отказах (поток отказов простейший и количество отказов за время обслуживания равно $\beta(\tau_n)$. Случайные величины ω_2, $\omega_2^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ - время ремонта линии имеют одно и то же распределение $F_2(x)$ (и преобразование Лапласа $f_2^*(s) = Me^{-s\omega_2}$). Тогда

$$x_n - \tau_n = \sum_{k=1}^{\beta(\tau_n)} \omega_2^{(k)}, \text{ т.е. } x_n = \tau_n + \sum_{k=1}^{\beta(\tau_n)} \omega_2^{(k)}$$

Обозначим через $\psi^*(s)$ предел преобразования Лапласа распределения τ_n:

$$\psi^*(s) = \lim \_n \to \infty Me^{-s\tau_n}$$

Имеем:

$$\pi(z) = \lim_{n\to\infty} Mz^{\alpha(t_n)} = \lim_{n\to\infty} Me^{-\lambda_1(1-z)t_n} = \varphi^*(\lambda_1(1-z)),$$

откуда следует, что

$$\psi^*(s) = \pi\left(1 - \frac{s}{\lambda_1}\right)$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}\varphi^*(s) &= \lim_{n\to\infty} Me^{-sx_n} = \lim_{n\to\infty} Me^{-s(\tau_n + \sum_{k=1}^{\beta(\tau_n)} \omega_2^{(k)})} = \\ &= \lim_{n\to\infty} MM_{\tau_n,\omega_2} e^{-s\tau_n} \cdot (Me^{-s\omega_2})^{\beta(\tau_n)} = \lim_{n\to\infty} Me^{-s\tau_n} \cdot M(f_2^*(s))^{\beta(\tau_n)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} Me^{-s\tau_n} \cdot e^{-\lambda_2((1-f_2^*(s))\tau_n)} = \lim_{n\to\infty} Me^{-(s+\lambda_2(1-f_2^*(s)))\tau_n} = \psi^*(s + \lambda_2(1 - f_2^*(s)))\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\varphi^*(s) = \pi\left(1 - \frac{s + \lambda_2(1 - f_2^*(s))}{\lambda_1}\right) \tag{24}$$

Найдём среднее время пребывания требования в системе (время ожидания + время обслуживания) $t_c = -\lim_{s\to+0} \varphi^{*'}(s)$. Для этого приведём формулу (17) по аналогии с преобразованием (21) к виду

$$\pi(z) = p_0 \frac{\lambda_1 z \Phi_1^*(\lambda_1(1-z))}{1-\lambda_1\Phi_1^*(\lambda_1(1-z))} \tag{25}$$

Дифференцируя равенство (25) и полагая $z = 1$, найдём:

$$\pi'(1) = p_0 \frac{\rho_1(1-\rho_1) + \frac{1}{2}\lambda_1^2 r_1^{(2)}}{(1-\rho_1)^2} \tag{26}$$

Теперь из (24) имеем:

$$\varphi^{*'}(0) = \pi'(1) \cdot \left(-\frac{1+\rho_2}{\lambda_1}\right) \text{ и}$$

$$t_c = \frac{1+\rho_2}{1+\rho_1\rho_2}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1 r_1^{(2)}}{2(1-\rho_1)}\right) \tag{27}$$

Формула (27) показывает, что при $\rho_1 \to \infty$ среднее время пребывания в системе стремится к бесконечности. Любопытно, что при $\rho_2 \to \infty$ (очень ненадёжный, часто выходящий из строя и медленно ремонтирующийся прибор) среднее время t_c не стремится к бесконечности. Это объясняется тем, что требование, заставшее линию в неисправном состоянии, не становится в очередь. Заметим, что полилинейчатые случайные процессы являются обобщением линейчатых марковских процессов, введённых Ю.К. Беляевым [6] и использовались для исследования надёжности многоэлементных систем в работах [7] и [8].

Заключение

В работе найдены: *1) предельные вероятности состояний системы (производящая функция предельного распределения), 2) среднее количество требований в системе (длина очереди), 3) вероятность потерия требований системой, 4) распределение времени γ занятости системы (преобразование Лапласа случайной величины γ), 5) распределение времени δ пребывания в системе произвольного требования (преобразование Лапласа случайной величины δ). Указаны также необходимые условия эргодичности изучаемого случайного процесса.*

Список литературы

1. *Марьянович Т.П.* Обобщение формул Эрланга на случай, когда приборы могут выходить из строя и восстанавливаться. // Украинский математический журнал. — Том XII — №3, С. 279-286.
2. *Марьянович Т.П.* Однолинейная система массового обслуживания с ненадёжным прибором. // Украинский математический журнал. — Том XIV — №4, С. 417-422.
3. *W. Gray., M. Scott., P. Wang.* A Vacation Queueing Model with Service Breakdowns //Applied Math. Modeling. — 2000. — Vol. 24. , P. 391-400.
4. *W. Gray., M. Scott., P. Wang.* A Queueing Model with Backup Servers and Service Breakdowns //OPSEARCH. —2002. —Vol. 34. , P. 281-295.
5. *Анисимов В.В., Закусило О.К., Донченко В.С.* Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. //Киев: «Выща школа», 1987 - 246 с.
6. *Беляев Ю.К.* Линейчатые марковские процессы и их приложения к задачам теории надёжности //Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. —Вильнюс. — 1962, С. 309-323.
7. *Коваленко А.И., Стрыгина Н.З.* Вычисление стационарных характеристик надёжности четырёхэлементной иерархической системы с восстановлением //Автоматика и телемеханика — М: Российская АН, 1992. — №1 С. 156-164.
8. *Коваленко А.И., Смолич В.П.* ВАнализ надёжности двухэлементной системы, обслуживаемой двумя наладчиками //Динамические системы. - 2000. - Вып. 16 С. 137-142.