УДК 517.98

ШКАЛЫ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ И РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

И.В. Орлов

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г.Симферополь,Крым, Украина,95007
e-mail: *old@tnu.crimea.ua*

Abstract

The paper is devoted to investigation of general properties of the inductive scales of uniform spaces (U-scales), and to determination of conditions for uniform limit of the continuous mappings into U-scales. Some applications in measure theory and operator theory are considered.

Введение

Шкалы топологических пространств фактически вошли в анализ вместе с понятиями проективного и индуктивного пределов [1]- [5], однако в явном виде шкалы гильбертовых и банаховых пространств появились в работе [6], как чрезвычайно удобный инструмент исследования задач математической физики. Впоследствии техника шкал получила широкие применения в теории интерполяции [7]- [10], теории обобщенных функция [11]- [15], теории общих эллиптических задач, теории [13], [16]- [18], теории интегро-дифференциальных уравнений и во многих других разделах современного анализа и его приложений.

В работах [19], [20] изучались непрерывные (нелинейные) отображения в линейных шкалах банаховых пространств и их приложения. Эти вопросы были рассмотрены в работах [21], [22] с точки зрения связи равномерной сходимости и непрерывности отображений в псевдотопологические векторные пространства и индуктивные шкалы локально выпуклых пространств (ЛВП). Было показано, что равномерная сходимость непрерывных отображений уже не является на этом уровне достаточным условием непрерывности предела, и были получены дополнительные условия, гарантирующие непрерывность равномерного предела. В связи с этим возникает естественная задача исследования вопроса о непрерывности равномерного предела в максимально общей топологической ситуации,т.е. в шкалах, состоящих из равномерных пространств [23], [24], играющих важную роль в анализе.

Целью данной работы является исследование общих свойств индуктивных шкал равномерных пространств (U-шкал), получение условий непрерывности равномерного предела отображений в U-шкалы и исследование некоторых приложений.

Работа состоит из пяти разделов. В первом разделе вводятся основные понятия, связанные с индуктивными шкалами равномерных пространств (U-шкалами) и рассматриваются важнейшие классы U-шкал. Во втором разделе получены основные результаты работы - достаточные условия, обеспечивающие непрерывность равномерного предела непрерывных отображений в U-шкалах. В третьем разделе изучены широкие классы U-шкал, в которых сохраняется классическая теорема о непрерывности равномерного предела. В четвертом разделе рассмотрены приложения: теоремы о непрерывности по параметру почти всюду сходящихся рядов измеримых функций с параметром и рядов непрерывных линейных операторов с параметр в гладких ЛВП. Наконец, в заключительном, пятом разделе работы вводится понятие слабой равномерной сходимости в индуктивных шкалах ЛВП и, на основе полученного ранее обобщения теоремы Хана-Банаха на линейные шкалы ЛВП [25], [26], исследуется слабая равномерная сходимость в линейных индуктивных шкалах ЛВП.

1. **Индуктивные шкалы равномерных пространтсв.**

Напомним вначале определение равномерного пространства [23]- [24]

Определение 1. Назовем *равномерной структурой* (или *системой окружений диагонали*) во множестве X систему $\mathcal{U}$ подмножеств $X \times X$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\mathcal{U}$- фильтр подмножеств в X^2, содержащих диагональ $\Delta \subset X^2$;
2) $(V \in \mathcal{U}) \Rightarrow (V^{-1} \in \mathcal{U})$;
3) $\forall \ V \in \mathcal{U} \ \exists \ W \in \mathcal{U} : W \circ W \subset V$.

Пару $(X,\mathcal{U})$ назовем *равномерным пространством*

Напомним также, что равномерная структура в X порождает топологию в X следующим образом: для любой точки $x \in X$ система подмножеств

$$\{V(x) = \{y \in Y | \ (x, y) \in V\}_{V \in \mathcal{U}}\}$$

образует базу фильтра окрестностей точки $x \in X$. В анализе широко используются следующие классы равномерных пространств.

Пример 1. Примеры равномерных пространств

а) **Метрические пространства.** Если в X задана метрика $d(x, y)$, то базу фильтра окружений диагонали образуют множества

$$V_\varepsilon = \{(x, y) \in X^2 | \ d(x, y) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Топология,порожденная этой равномерной структурой, совпадает с обычной метрической топологией.

б) **Компактные топологические пространства**. В компактном пространстве X существует, и притом единственная, равномерная структура, согласованная с его топологией - это множество всех окрестностей диагонали

$\Delta \subset X \times X$(см. [23], гл.II, §4, теор. 1). Фундаментальную систему окружений здесь образуют множества

$$V_{\mathcal{R}} = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathrm{U}_i \times \mathrm{U}_i),$$

где $\mathcal{R} = \{\mathrm{U}_i\}_{i=1}^{n}-$ всевозможные конечные открытые покрытия компакта X. Отметим, как следствие, что *любое локально компактное пространство* является равномерным.

в) **Топологические абелевы группы**. Если топология в X согласована с коммутативной групповой операцией $\mathrm{x}+\mathrm{y}$, то базу фильтра окружений диагонали образуют множества

$$V_{\mathrm{U}} = \{(x, y) \in X^2 | \, x - y \in \mathrm{U}\},$$

где $\mathrm{U}-$ всевозможные симметричные окрестности нуля в X. В частности, любое *топологическое векторное пространство* (ТВП) является равномерным.

Заметим далее, что равномерные структуры позволяют рассматривать равномерную сходимость.

Определение 2. Пусть $X-$ некоторое множество, $Y-$ равномерное пространство, $f_n : X \longrightarrow Y$ $(n = 1, 2, ...)$ и $f : X \longrightarrow Y-$ отображения. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно* сходится к f на X $(f_n \rightrightarrows f)$, если для любого окружения диагонали V в Y найдется такой номер N, что

$$(n \in N) \Rightarrow (\forall \, x \in X \, : (f_n(x); f(x)) \in V).$$

Приведем формулировку классической теоремы [29] о связи равномерной сходимости и непрерывности.

Теорема 1. *Пусть $X-$ топологическое пространство, $Y-$ равномерное пространство, $f_n : X \longrightarrow Y$ $(n = 1, 2, ...)$ и $f : X \longrightarrow Y-$ отображения. Если $(f_n \rightrightarrows f)$ на X и все f_n непрерывны в точке $x_0 \in X$, то f также непрерывно в точке x_0.*

Напомним также, что именно в классе равномерных пространств можно рассматривать понятие равномерной непрерывности.

Определение 3. Пусть X и $Y-$ равномерные пространства, $f : X \longrightarrow Y$. Отображение f равномерно непрерывно на X, если для любого окружения диагонали V в Y найдется такое окружение диагонали U в X, что

$$((x_1, x_2) \in U) \Longrightarrow ((f(x_1), f(x_2)) \in V).$$

Всякое равномерно непрерывное отображение поточечно непрерывно; обратно, верна теорема Кантора о равномерной непрерывности всякого непрерывного отображения компакта в равномерное пространство.

Пример 2. Примеры равномерно непрерывных отображений

а) *Метрические пространства.* Если (X, d_X) и $(Y, d_Y)-$ метрические пространства, то равномерная непрерывность отображения $f \ : X \longrightarrow Y$ сводится к "$\varepsilon - \delta$" определению:

$$\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0: \; (d_X(x_1, x_2) < \delta) \Longrightarrow (d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon).$$

б) *Компактные множества.* Если X и $Y-$ компактные пространства, то, как уже отмечалось, непрерывность отображения $f \ : X \longrightarrow Y$ равносильна равномерной непрерывности.

в) *Топологические абелевы группы.* Пусть X и $Y-$ топологические абелевы группы, $A \ : \ X \longrightarrow Y-$ аддитивный оператор, т.е. $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$. В этом случае также непрерывность A равносильна равномерной непрерывности, поскольку, выбрав окрестности нуля U в X и V в Y так, чтобы $A(U) \subset V$(по непрерывности), получим

$$(x_1 - x_2 \; \in \; U) \Longrightarrow (Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2) \; \in \; V).$$

В частности, любой линейный непрерывный оператор, действующий из ТВП X в ТВП Y, является равномерно непрерывным.

В общей топологии хорошо известны проективные шкалы равномерных пространств и их проективные пределы (см. [23]-, гл.II). Однако ситуация с индуктивными пределами значительно сложнее, т.к. (см. [23], гл.II) нижняя грань семейства равномерных структур не обязательно является их пересечением. Потому, даже с абстрактной точки зрения, представляет интерес изучение индуктивных шкал равномерных пространств, не связанное с переходом к индуктивным пределам шкал.

Определение 4. Назовем *индуктивной шкалой равномерных пространств*, или $U-$ *шкалой,* систему равномерных пространств $\{E_t\}_{t \in T}$, где T индуктивно упорядочено, снабженную *системой равномерно непрерывных вложений:*

$$\{e_{t_2 t_1} \; : \; E_{t_1} \hookrightarrow E_{t_2}\}_{t_1 \preccurlyeq t_2; \, t_i \in T},$$

удовлетворяющих условиям:

$$e_{tt}- \text{ тождественное отображение для всякого } t \; \in \; T;$$
$$(t_1 \preccurlyeq t_2 \preccurlyeq t_3) \Longrightarrow (e_{t_3 t_2} \circ e_{t_2 t_1} = e_{t_3 t_1}).$$

Обозначим

$$\overrightarrow{E} = \Big(\{E_t\}_{t \in T}; \{e_{t_2 t_1}\}_{t_1 \preccurlyeq t_2} \Big).$$

В случае *тождественных вложений* $e_{t_2 t_1}$ назовем шкалу $\overrightarrow{E}$ *внутренней* $U-$ *шкалой.*

Используя примеры 1 и 2, легко привести примеры $U-$ шкал.

Пример 3. Примеры индуктивных $U-$ шкал

а) *Шкалы метрических пространств.* Если $\overrightarrow{E}-$ $U-$ шкала метрических пространств, то, в соответствии с примером 1.6(а), вложения $e_{t_2t_1}$ удовлетворяют условиям:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \ (d_{E_{t_1}}(x_1, x_2) < \delta) \Longrightarrow (d_{E_{t_2}}(e_{t_2t_1}(x_1), e_{t_2t_1}(x_2)) < \varepsilon).$$

б) *Шкалы компактных пространств.* Если $\overrightarrow{E}-$ $U-$ шкала компактных топологических пространств, то, в соответствии с примером 1.6(б) вложениями $e_{t_2t_1}$ могут служить любые непрерывные отображении из E_{t_1} в E_{t_2}, при условиях согласованности. Таким образом, любая индуктивная шкала компактных пространств является $U-$ шкалой.

в) *Шкалы топологических векторных пространств.* Если $\overrightarrow{E}-$ $U-$ шкала ТВП с линейными вложениями, то, в соответствии с примером 1.6(в), вложениями $e_{t_2t_1}$могут служить любые линейные непрерывные операторы из E_{t_1} в E_{t_2}, при условиях согласованности. Таким образом, любая индуктивная шкала ТВП является $U-$ шкалой.

Отметим, как частный случай, $K-$ шкалы *банаховых пространств* ([27], [20]), т.е. линейные внутренние шкалы банаховых пространств $\overrightarrow{E} = \{E_t\}_{t>0}$ с компактными вложениями $(t_1 \leqslant t_2) \Longrightarrow (E_{t_2} \hookrightarrow E_{t_1}$компактно).

Перейдем к отображениям в $U-$ шкалы. Мы ограничимся в работе случаем отображений из одного пространства в $U-$ шкалу равномерных пространств. Поскольку любая $U-$ шкала является индуктивной шкалой топологических пространств, то для отображений в $U-$ шкалы сохраняется обычное определение непрерывности. Для простоты ограничимся внутренними шкалами.

Определение 5. Пусть $\overrightarrow{E}-$ $U-$ шкала, $X-$ топологическое пространство, $f : X \longrightarrow \overrightarrow{E}$. Отображение f *непрерывно в точке* $x_0 \in X$, если существует такая окрестность $U(x_0) \subset X$ и такой индекс $t_0 \in T$, что f отображает $U(x_0)$ в E_{t_0}, причем это отображение непрерывно в точке x_0.

Для равномерной непрерывности отображений в U-шкалы требуется уже равномерная структура X.

Определение 6. Пусть $\overrightarrow{E}-$ U- шкала, $X-$ равномерное пространство, $f : X \longrightarrow \overrightarrow{E}$. Отображение f *равномерно непрерывно на* X, если существует такой индекс $t_0 \in T$, что f отображает X в E_{t_0}, причем это отображение непрерывно. Отображение f *локально равномерно непрерывно на* X, если для любой точки $x_0 \in X$ найдется такая окрестность $U(x_0) \subset X$ и такой индекс $t_0 \in T$, что f отображает $U(x_0)$ в E_{t_0}, причем это отображение равномерно непрерывно на $U(x_0)$.

Отметим, что понятие локальной равномерной непрерывности позволяет рассматривать локально равномерные шкалы равномерных пространств.

Определение 7. Если в обозначениях определения 4, вложения $e_{t_2t_1}\ :\ E_{t_1} \hookrightarrow E_{t_2}$ *локально равномерно непрерывны*, то систему

$$\overrightarrow{E} = \Big(\{E_t\}_{t\in T}; \{e_{t_2t_1}\}_{t_1\preccurlyeq t_2}\Big)$$

назовём *локально равномерной индуктивной* шкалой, или U_{loc}-шкалой.

Пример 4. Пусть $\overrightarrow{E} = \{E_t\}_{t\in T}$– индуктивная шкала *локально компактных* топологических пространств с непрерывными (обычно тождественными) вложениями. Поскольку эти вложения локально равномерно непрерывны, то имеем U_{loc}-шкалу.

Перейдем к последовательностям отображений в U- шкалы и U_{loc}- шкалы.

Определение 8. Пусть $\overrightarrow{E}$– U-шкала, X– множество, $f : X \longrightarrow \overrightarrow{E}\ (n = 1, 2, ...)$ и $f : X \longrightarrow \overrightarrow{E}$– отображения. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно (по $x \in X$) сходится к f при $n \longrightarrow \infty$:

$$f_n \rightrightarrows f \qquad (x \in X, n \longrightarrow \infty);$$

если найдется такой индекс $t_0 \in T$, что $f_n \rightrightarrows f$ на X, как отображения в E_{t_0}, т.е. для любого окружения диагонали V_{t_0} в E_{t_0} найдется такой номер N, что при всех $n \geqslant N$:

$$\{(f_n(x); f(x))|\, x \in X\} =: \Delta(f_n; f)(X) \subset V.$$

В случае, когда X– топологическое пространство, $\overrightarrow{E}$– U_{loc}-шкала, будем говорить, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f (при $n \longrightarrow \infty$) *локально равномерно на* X, если для любой точки $x_0 \in X$ найдется такая окрестность $U(x_0) \subset X$, что сужения f_n на эту окрестность сходятся к сужению f равномерно:

$$f_n|_{U(x_0)} \rightrightarrows f|_{U(x_0)} \qquad (x \in U(x_0), n \longrightarrow \infty).$$

Отметим, что в случае тривиальной шкалы $\overrightarrow{E} = \{E_0\}$, состоящей из одного равномерного пространства, определение 8 сводится к классическому ([23], гл.II).

2. Равномерная сходимость и однородная непрерывность отображений в U- шкалы.

Классический результат общей топологии ([23], гл.II) утверждает, что равномерный предел последовательности непрерывных в заданной точке отображений (из топологического пространства в равномерное) сохраняет непрерывность. Покажем, прежде всего, что на отображения в индуктивные шкалы равномерных пространств этот результат не переносится.

Пример 5. Равномерно сходящийся ряд непрерывных отображений с разрывной суммой [1] Пусть в векторном пространстве E задана убывающая последовательность попарно неэквивалентных норм $\{\|\cdot\|_n\}_{n=0}^{\infty}$, причем $E_0 = (E, \|\cdot\|_0)$ полно, и в шаре $\|x_0\| \leqslant 1$ для любого $n \geqslant 1$ найдется такая последовательность $\{x_k^n\}_{k=1}^{\infty}$, что $\|x_k^n\|_n \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$, но при этом $\|x_k^n\|_{n-1} \nrightarrow 0$.

Другими словами, для каждого $n \geqslant 1$ найдется такое $\delta_n > 0$, что

$$\inf_{\|x\|_0 \leqslant 1, \|x\|_{n-1} \geqslant \delta_n} \frac{\|x\|_n}{\|x\|_{n-1}} = 0.$$

При этом можно считать, что $\|x_k^n\|_{n-1} = 1, \|x_k^n\|_0 \leqslant 1/\delta_n$.

В качестве конкретного примера можно взять пространство $E = C_b^{\infty}\mathbb{R}$ бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций с равномерно ограниченными производными. Здесь положим

$$\|f\|_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \sup_{t \in \mathbb{R}} |f^{(m)}(t)|;$$

$$\|f\|_n = |f(0)| + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \sup_{t \in \mathbb{R}} |f^{(m)}(t)|; \quad (n = 1, 2, ...).$$

Выберем в $[0,1]$ произвольную возрастающую последовательность $t_k \nearrow 1$ и зададим отображения $f_n : [0,1] \longrightarrow E_n = (E, \|\cdot\|_n)$, $n = 1, 2, 3, ...$, следующим образом

$$f_n(t_k) = x_k^n, \ f_n \text{ линейно на отрезках } [t_k; t_{k+1}] \ (k = 1, 2, ...),$$
$$f_n(1) = 0.$$

Тогда каждое f_n непрерывно на $[0;1]$ как отображение в E_n $(n = 1, 2, ...)$, но разрывно при $t = 1$ как отображение в $E_k, \ k < n$.

Нетрудно доказать по индукции существование такой последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, что

$$\varepsilon_n > \sum_{m=n+1}^{\infty} (\varepsilon_m / \delta_m); \quad (n = 1, 2, ...).$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(t)$. Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varepsilon_n f_n(t)\|_0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_m / \delta_m) < \varepsilon_0,$$

то этот ряд равномерно сходится уже в $E_0 = (E, \|\cdot\|_0)$. Его частные суммы $F_n(t)$, аналогично $f_n(t)$, непрерывны на [0,1] как отображения в E_n, но разрывны при $t = 1$ как отображения $E_k, \ k < n$. Положим

$$R_n(t) = \sum_{m=n}^{\infty} \varepsilon_m f_m(t).$$

Тогда

$$\|R_n(t_k)\|_{n-1} = \|\sum_{m=n}^{\infty} \varepsilon_m f_m(t_k)\|_{n-1} = \|\sum_{m=n}^{\infty} \varepsilon_m x_k^m\|_{n-1} \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon_n \|x_k^n\|_{n-1} - \sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m \|x_k^m\|_{n-1} \geqslant \varepsilon_n - \sum_{m=n+1}^{\infty} (\varepsilon_m/\delta_m) > 0,$$

откуда следует разрывность $R_n(t)$ при $t = 1$ относительно $\|\cdot\|_{n-1}$. Поскольку $F_{n-1}(t)$ непрерывно всюду на $[0;1]$ относительно $\|\cdot\|_{n-1}$, то сумма данного ряда $F(t) = F_{n-1}(t) + R_n(t)$ разрывна, вместе с $R_n(t)$, при $t = 1$ относительно $\|\cdot\|_{n-1}$ $(n = 1, 2, ...)$. Поскольку пространства $E_n = (E, \|\cdot\|_n)$, $n = 1, 2, ...$, образуют индуктивную U-шкалу $\overrightarrow{E} = \{E_n\}_{n=0}^{\infty}$, то отображение $F : [0;1] \longrightarrow \overrightarrow{E}$ разрывно при $t = 1$. В то же время, ряд $\sum_{n-1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(t)$ равномерно сходится в E_0, а значит, и в $\overrightarrow{E}$.

Таким образом, возникает вопрос о дополнительных условиях, обеспечивающих непрерывность равномерного предела непрерывных отображений в $U-$ шкалы.

Определение 9. Пусть $X-$ топологическое пространство, $\overrightarrow{E} = \{E_t\}_{t \in T}-$ U- шкала, $\mathcal{F} = \{f : X \longrightarrow \overrightarrow{E}\}-$ некоторое семейство отображений, $x_0 \in X$. Назовем семейство $\mathcal{F}$ *однородно непрерывным (H- непрерывным)* в точке x_0, если найдется такой индекс $t_0 \in T$, что все отображения $f \in \mathcal{F}$ непрерывны в точке x_0 как отображения в E_{t_0}.

Очевидно, H- непрерывность семейства $\mathcal{F}$ в точке x_0 влечет непрерывность каждого элемента $f \in \mathcal{F}$ в этой точке. Обратное, как легко видеть, неверно.

Пример 6. Пусть $E_n = \mathbb{R}^n, \overrightarrow{E} = \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ (с обычными вложениями). Если $\overline{e_n} = \overbrace{(0, ..., 0, 1)}^{n}, f_n(t) = t \cdot \overline{e_n},\ t \in \mathbb{R}$, то все отображения $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow E_n$ непрерывны в нуле. Однако, для любой окрестности нуля $U(0) \subset \mathbb{R}$, ее образ $f_n(U)$ имеет лишь нулевое пересечение с E_k при $k < n$. Таким образом, семейство $\{f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \overrightarrow{E}\}_{n=1}^{\infty}$ не является H-непрерывным при $t = 0$.

Сформулируем центральный результат работы.

Теорема 2. *Пусть $X-$ топологическое пространство, $\overrightarrow{E}-$ $U-$ шкала, $x_0 \in X, f_n : X \longrightarrow \overrightarrow{E}\,(n = 1, 2, ...)$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на X, и семейство $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ H-непрерывно в точке x_0, то отображение f также непрерывно в точке x_0.*

Доказательство. Выберем сначала, в соответствии с определением 8, такой индекс $t_1 \in T$, что $f_n \rightrightarrows f$ на X как отображения в E_{t_1}. Далее, выберем, в соответствии с определением 9, такой индекс $t_2 \in T$, что все отображения $f_n\,(n = 1, 2, ...)$ непрерывны в точке x_0 как отображения в E_{t_2}. Наконец, выберем индекс $t_0 \in T$, такой, что $t_0 \succcurlyeq t_1, t_0 \succcurlyeq t_2$. Пусть $V_{t_0}-$ произвольное окружение диагонали в E_{t_0}. Выберем, в соответствии с определением 1, такое окружение W_{t_0} в E_{t_0}, что

$$W_{t_0} \circ W_{t_0} \circ W_{t_0} \subset V_{t_0} \tag{1}$$

Ввиду равномерной непрерывности вложений $E_{t_1} \hookrightarrow E_{t_0}$ и $E_{t_2} \hookrightarrow E_{t_0}$, найдутся такие окружения диагонали V_{t_1} в E_{t_1} и V_{t_2} в E_{t_2}, что

$$V_{t_1} \subset W_{t_0}, V_{t_2} \subset W_{t_0}. \tag{2}$$

В соответствии с определением 8, найдется такой номер N, что при всех $n \geqslant N$:

$$\triangle(f_n, f)(X) \subset V_{t_1}. \tag{3}$$

Зафиксируем $n \geqslant N$ и заметим, что поскольку топология E_{t_2} порождается его равномерной структурой, то найдется такая окрестность $U(x_0) \subset X$, для которой

$$\triangle(f_n, x_0)(U) = \{(f_n(x), f(x_0))|_{x \in U}\} \subset V_{t_2}. \tag{4}$$

Наконец, из (1),(2),(3) и (4) находим:

$$\triangle(f, x_0)(U) = \{(f(x), f(x_0))|\ x \in U\} \subset \triangle(f, f_n)(U) \circ \triangle(f_n, x_0)(U) \circ$$

$$\circ \triangle(f_n, f)(x_0) \subset V_{t_1} \circ V_{t_2} \circ V_{t_1} \subset W_{t_0} \circ W_{t_0} \circ W_{t_0} \subset V_{t_0}.$$

Таким образом, для любого окружения диагонали V_{t_0} в E_{t_0} найдется такая окрестность $U(x_0)$ в X, что

$$\triangle(f, x_0)(U) \subset V_{t_0}.$$

Это в точности означает непрерывность в точке x_0 отображения f в равномерное пространство E_{t_0}, а значит, и непрерывность f как отображения в U-шкалу $\overrightarrow{E}$.

Заметим, что результат теоремы очевидным образом переносится на локально равномерно сходящиеся последовательности отображений со значениями в U_{loc}-шкалах.

Перейдем теперь к практически более важному вопросу о равномерно сходящихся рядах. Здесь мы уже вынуждены ограничиться U-шкалами гомологических абелевых групп.

Теорема 3. *Пусть $X-$ топологическое пространство, $\overrightarrow{E}-$ U- шкала топологических абелевых групп, $f_n : X \longrightarrow \overrightarrow{E}$ $(n = 1, 2, ...)$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно (либо локально равномерно) сходится к $F(x)$ на X, и семейство $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ H-непрерывно в точке x_0, то сумма ряда $F(x)$ также непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Достаточно заметить, что семейство частичных сумм ряда $\{F_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$ также H-непрерывно в точке x_0, поэтому остается применить теорему 2 к последовательности $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Отметим, что, в частности, результат теоремы 3 распространяется на индуктивные шкалы ТВП. Рассмотрим теперь глобальный аналог H-непрерывности.

Определение 10. Пусть $X-$ топологическое пространство, $\overrightarrow{E} = \{E_t\}_{t\in T}$ U- шкала (либо $U_{\rm loc}$-шкала), $\mathcal{F} = \{f : X \longrightarrow \overrightarrow{E}\}$- некоторое семейство отображений. Назовем семейство $\mathcal{F}$ *равномерно однородно непрерывным (UH-непрерывным)* на X, если найдется такой индекс $t_0 \in T$, что все отображения $f \in \mathcal{F}$ непрерывны на X как отображения в E_{t_0}. В частности, если $\mathcal{F} = \{f_0\}$, то будем говорить, что f_0 UH-непрерывно на X.

Таким образом, из UH-непрерывности $\mathcal{F}$ на X следует H-непрерывность $\mathcal{F}$ в каждой точке $x_0 \in X$. Сформулируем очевидные аналоги теорем 2 и 3 для UH-непрерывных отображений.

Теорема. 2* *Пусть $X-$ топологическое пространство, $\overrightarrow{E}-$ U- шкала (либо $U_{\rm loc}$-шкала), $f_n : X \longrightarrow \overrightarrow{E}, (n = 1, 2, ...)$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на X(либо $f_n \overset{\rm loc}{\rightrightarrows} f$ на X), и семейство $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ UH-непрерывно, то отображение f также UH-непрерывно на X.*

Теорема. 3* *Пусть $X-$ топологическое пространство, $\overrightarrow{E}-$ U- шкала топологических абелевых групп, $f_n : X \longrightarrow \overrightarrow{E}, (n = 1, 2, ...)$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно (либо локально равномерно) сходится к $F(x)$ на X, и семейство $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ UH-непрерывно на X, то сумма ряда $F(x)$ также UH-непрерывна на X.*

3. Случаи сохранения классической теоремы о равномерной сходимости и непрерывности.

Здесь мы рассмотрим некоторые ситуации, когда равномерный предел непрерывных отображений в U-шкалы сохраняет непрерывность, аналогично классическому случаю одного равномерного пространства.

А. Отображения в K-шкалы банаховых пространств. Напомним (см. пример) 3(в)), что K-шкалой [27] называется линейная внутренняя шкала банаховых пространств $\overrightarrow{E} = \{E_t\}_{t>0}$ с компактными вложениями: $(t_1 \leqslant t_2) \Rightarrow (E_{t_2} \hookrightarrow E_{t_1})$ компактно).

В [27] показано, что сходимость последовательностей в $\overrightarrow{E}$ и в индуктивном пределе $\varinjlim \overrightarrow{E}$ равносильны. На базе этого результата в [27] доказано, что любое отображение из K-шкалы $\overrightarrow{F}$ в K-шкалу $\overrightarrow{E}$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно индуцированное отображение из $\varinjlim \overrightarrow{F}$ в $\varinjlim \overrightarrow{E}$.

Пусть $X-$ банахово пространство или его топологическое подпространство, $\overrightarrow{E}-$ K-шкала банаховых пространств, отображения $f_n : X \longrightarrow \overrightarrow{E}$ $(n = 1, 2, ...)$ непрерывны. Тогда f_n непрерывны и как отображения в $\varinjlim \overrightarrow{E}$. Если $f_n \rightrightarrows f$ в $\overrightarrow{E}$, то тем более $f_n \rightrightarrows f$ в $\varinjlim \overrightarrow{E}$. Следовательно f также непрерывно как отображение X в $\varinjlim \overrightarrow{E}$. Но тогда, как отмечалось выше, f непрерывно и как отображение в $\overrightarrow{E}$. Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Пусть X изоморфно топологическому подпространству банахова пространства, $\overrightarrow{E}-$ K-шкала банаховых пространств. Если отображения $f_n : X \longrightarrow \overrightarrow{E}, (n = 1, 2, ...)$ непрерывны в точке x_0 и $f_n \rightrightarrows f$ на X, то f также непрерывно в точке x_0.*

Следствие 1. *Если, в условиях теоремы 4 отображения $f_n : X \longrightarrow \overrightarrow{E}$ $(n = 1, 2, ...)$ непрерывны в точке $x_0 \in X$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на X, то сумма ряда также непрерывна и точке x_0.*

B. Отображения компактного пространства в U- шкалу.

Лемма 1. *Пусть $X-$ компакт, $\overrightarrow{E}-$ U- шкала (или U_{loc}-шкала), $f : X \longrightarrow \overrightarrow{E}$. Если f непрерывно на X, то $f(x) \subset E_{t_0}$ при некотором $t_0 \in T$.*

Доказательство. Зафиксируем $x \in X$ и выберем такую окрестность $U(x) \subset X$, в соответствии с определением 5, что $f(U(x)) \subset E_{t(x)}$ при некотором $t(x) \in T$. Выберем из открытого покрытия $X \subset \bigcup\limits_{x \in X} U(x)$ конечное покрытие

$$X \subset U(x_1) \cup ... \cup U(x_n)$$

и найдем индекс $t_0 \in T$, такой, что $t_0 \succcurlyeq t(x_1), t(x_2), ..., t(x_n)$. Тогда $f(U(x_i)) \subset E_{t(x_i)} \subset E_{t_0}$ при всех $i = \overline{1, n}$, откуда

$$f(X) = f(U(x_i)) \cup ... \cup f(U(x_n)) \subset E_{t_0}.$$

Напомним, что индуктивная шкала топологических пространств называется строгой, если вложения $e_{t_1 t_2} : E_{t_1} \hookrightarrow E_{t_2} (t_1 \preccurlyeq t_2)$ не только непрерывны, но и замкнуты, т.е., если $e_{t_2 t_1}-$ гомеоморфизм E_{t_1} на $e_{t_2 t_1}(E_{t_1})$ (изоморфизм – в случае шкалы ТВП). В работах [28], [30] были рассмотрены важные примеры строгих шкал нормальные разложении сопряженных и операторных пространств над гладкими локально выпуклыми пространствами. Мы вернемся к этим примерам ниже.

Лемма 2. *Если, в условиях леммы 1, $\overrightarrow{E}-$ строгая U-шкала, то $f-$ непрерывное отображение X в некоторое пространство $E_{t_0}, t_0 \in T$, и, следовательно, $f-$ UH-непрерывное отображение X в $\overrightarrow{E}$.*

Доказательство. В соответствии с леммой 1, $f(X) \subset E_{t_0}$ при некотором $t_0 \in T$. Пусть $x_0 \in X$, тогда, для некоторой окрестности $U(x_0)$, отображение $f : U(x_0) \longrightarrow E_{t_{(x_0)}}$ непрерывно в точке x_0 при некотором $t(x_0) \in T$; при этом можно считать $t(x_0) \succcurlyeq t_0$. Ввиду строгости вложение шкалы, вложение $E_{t_0} \hookrightarrow E_{t(x_0)}$ замкнуто, откуда отображение $f : U(x_0) \longrightarrow E_{t_{(x_0)}}$ также непрерывно в точке x_0.

Лемма 3. *Пусть $X-$ компакт, $\overrightarrow{E}-$ U- шкала, отображения $f_n : X \longrightarrow \overrightarrow{E}\,(n = 1, 2, ...)$ непрерывны на X. Если $f_n \rightrightarrows f$ на X, то найдется такой индекс $t_0 \in T$, что*

$$f_n(X) \subset E_{t_0}(n = 1, 2, ...), \quad и \quad f(X) \subset E_{t_0}. \tag{5}$$

Доказательство. В соответствии с определением 8 равномерной сходимости, найдется такой индекс $t^0 \in T$, что $f_n \rightrightarrows f$ в E_{t^0}. Отсюда следует, что для некоторого номера $n > N : f_n(X) \subset E_{t^0}$ и $f(X) \subset E_{t^0}$. Далее, в силу леммы 1, для каждого из отображений $f_1, ..., f_N$ найдутся соответствующие индексы $t_1, ..., t_n \in T$, что

$$f_1(X) \subset E_{t_1}, ..., f_N(X) \subset E_{t_N}.$$

Выбран $t_0 \succcurlyeq t^0; t_1, ..., t_N$ получаем в итоге (5).

Рассмотрим еще один тип U-шкал.

Определение 11. Назовем U-шкалу $\overrightarrow{E} = \{E_t\}_{t\in T}$ *σ-индуктивной*, если для любой последовательности $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \in T$ найдется мажоранта в $T : t_0 \succcurlyeq t_n(n = 1, 2, ...)$, и, следовательно, выполнены непрерывные вложения

$$E_{t_1} \hookrightarrow E_{t_0}, E_{t_2} \hookrightarrow E_{t_0}, ..., E_{t_n} \hookrightarrow E_{t_0}, ...$$

В работах [31], [32] был рассмотрен важный пример σ-индуктивной шкалы – шкала $\overrightarrow{M}(S, \mod \mu)$ сходимости почти всюду. Мы вернемся к этому примеру ниже.

Теорема 5. *Пусть X — компактное тотопологическое пространство, $\vec{E}$ — строгая либо σ–индуктивная U–шкала, $f_n : X \to \vec{E}\,(n = 1, 2, \ldots)$. Если отображения f_n непрерывны на X и $f_n \rightrightarrows f$, то f также непрерывно на X.*

Доказательство. В силу леммы 3, найдется такой индекс $t^1 \in T$, что $f(X) \subset E_{t^1}$ и $f_n(X) \subset E_{t^1}\,(n = 1, 2, \ldots)$. Если $\vec{E}$ — строгая U–шкала, то, в силу леммы 2, все $f_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ — непрерывные отображения X в E_{t^1}, а значит, f — также непрерывное отображение X в E_{t^1}.

Если же $\vec{E}$ — σ–индуктивная U–шкала, то выберем, для произвольного $x_0 \in X$ и для каждого $n = 1, 2, \ldots$, такой индекс $t_n \in T$, что $f_n : X \to E_{t_n}\,(n = 1, 2, \ldots)$ непрерывны в точке x_0. Найдем, в соответствии с определением 11, такой индекс $t^2 \in T$, что $E_{t_n} \to E_{t^2}\,(n = 1, 2, \ldots)$; тогда отображения $f_n : X \to E_{t^2}$ также непрерывны в точке x_0. Выбрав теперь $t_0 \succcurlyeq t^1, t^2$, получим одновременно равномерную сходимость $f_n \rightrightarrows f$ и непрерывность в точке x_0 всех f_n, как отображений в E_{t_0}. откуда следует непрерывность в произвольной точке $x_0 \in X$ $f : X \to E_{t_0}$.

Следствие 2. *Если в условиях теоремы 5, $\vec{E}$ — шкала топологических абелевых групп (в частности, шкала ТВП), и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на X, то сумма ряда также непрерывна на X как отображение X в некоторое $E_{t_0} \in \vec{E}$.*

Замечание 1. Мы не рассматривали в теореме 5 и следствии 2 локально равномерную сходимость $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$, поскольку на компакте X локально равномерная сходимость сводится к глобально равномерной сходимости. Действительно, если $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, где U_i открыты и $f_n \rightrightarrows f$ на каждом U_i, то выбрав конечное покрытие $X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_m}$, индексы $t_k \in T$ $(k = \overline{1, m})$, такие, что $f_n \rightrightarrows f$ в E_{t_k} на U_{i_k}, и индекс $t_0 \succcurlyeq t_k$ $(k = \overline{1, m})$, мы получим $f_n \rightrightarrows f$ на X в E_{t_0}.

4. Некоторые приложения

А. Ряды измеримых функций с параметром и шкала сходимости почти всюду. В работах [31], [32] показано, что сходимость почти всюду в пространстве измеримых функций $M(S, \mu)$, где (S, μ) — локально компактное пространство с конечной борелевской регулярной мерой μ, может быть описана как сходимость в некоторой индуктивной шкале $\vec{M}(S, \mod \mu)$ локально выпуклых пространств. По поводу сходимости почти всюду см. также [33], [34]. Приведем необходимые сведения.

Определение 12. Пусть S, μ — локальное компактное пространство с конечной борелевской регулярной мерой μ. Рассмотрим всевозможные возрастающие последовательности компактов $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ в S, заполняющие почти все $S : \mu\left(S \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} K_n\right) = 0$, и введем для них отношение эквивалентности: $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{K'_m\}_{m=1}^{\infty}$, если в каждый компакт K_n вписан некоторый компакт K'_m и обратно. Каждый класс эквивалентности t назовем *базой непрерывности* в S; пусть $T = \{t\}$. Для каждого $t \in T$ обозначим через $M_t(S, \mod \mu)$ множество функций $f \in M(S, \mu)$, сужения которых $f|_{K_n}$ на компакты из $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \in t$ непрерывны. Снабдим векторное пространство $M_t(S \mod \mu)$ локально выпуклой топологией равномерной сходимости на каждом из компактов K_n.

Основным результатом указанных работ является следующая

Теорема 6. *Система ЛВП (с естественным порядком в T)*

$$\vec{M}(S, \mod \mu) := \{M_t(S, \mod \mu)\}_{t \in T}$$

образует разложение пространства измеримых функций $M(S, \mu)$ в σ–индуктивную шкалу ЛВП. При этом секвенциальная сходимость почти всюду в $M(S, \mu)$ совпадает со сходимостью в шкале $\vec{M}(S, \mod \mu)$, т. е.

$$(f_n \to f(\mod \mu)) \Leftrightarrow (\exists t \in T : f_n \to f \; M_t(S, \mod \mu)).$$

Локально выпуклый индуктивный предел τ_0 – $\varinjlim \vec{M}(S, \mod \mu)$ вырожден, если только μ не является чисто атомарной мерой. Топологический индуктивный предел τ – $\varinjlim \vec{M}(S, (\mod \mu))$ совпадает со сходимостью по мере в $M(S, \mu)$.

Рассмотрим теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda, x)$, где параметр λ побегает некоторый компактный отрезок $\Lambda \subset \mathbb{R}$ Л С R, и для каждого $\lambda \in \Lambda$ вещественные функции $f_n(\lambda, x)$ μ–измеримы по $x \in S\,(n = 1, 2, \ldots)$. Члены этого ряда можно рассматривать как отображения

$$\tilde{f}_n : \lambda \mapsto f_n(\lambda, \cdot);\ (n = 1, 2, \ldots)$$

отрезка Λ в пространство $M(S, \mu)$. Потребуем, чтобы отображения $\tilde{f}_n$ были непрерывны на Λ как отображения в шкалу сходимости почти всюду $\vec{M}(S, (\mod \mu))$, и чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(\lambda)$ равномерно по λ сходился в шкале $\vec{M}(S, (\mod \mu))$. Тогда, в силу теоремы 5, сумма ряда также непрерывна в этой шкале. Расшифровывая вышеуказанные условия в соответствии с определениями 12, 8 и 5, приходим к следующему утверждению.

Теорема 7. *Предположим, что, в приведенных выше обозначениях:*

a) *существует такая возрастающая последовательность компактов $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$, заполняющая μ–почти все S, что для каждого m ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda, x)$ равномерно сходится на $\Lambda \times K_m$;*

b) *для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и для каждой точки $\lambda_0 \in \Lambda : f_n(\lambda, x) \to f_n(\lambda_0, x)$ при $\lambda \to \lambda_0$ для μ–почти всех $x \in S$.*

Тогда для каждого $\lambda_0 \in \Lambda$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda_0, x)$$

для μ–почти всех $x \in S$.

B. Ряды линейных непрерывных операторов с параметром и нормальные разложения операторных пространств. В работах [28]– [30] исследованы разложения операторных пространств над ЛВП (и, в частности, сопряженных пространств) в индуктивные шкалы ЛВП. Такие разложения обеспечивают ряд дополнительных свойств пространства линейных непрерывных операторов, которых, в небанаховом случае, невозможно добиться с помощью какой–бы то ни было топологии (например, непрерывность вычисления $(x, A) \mapsto Ax$ и композиции $(A_1, A_2) \mapsto A_2 \circ A_1$). Введен класс так называемых "гладких" ЛВП, нормальные разложения операторных пространств над которыми образуют строгие шкалы. Эти позволяет применить в данном случае результаты предыдущего раздела о равномерной сходимости и непрерывности. Приведем вначале необходимые определения и результаты.

Определение 13. Пусть E и F — ЛВП с соответствующими определяющими системами преднорм $\{\|\cdot\|_s\}_{x \in S}$ и $\{\|\cdot\|^t\}_{t \in T}$; $(E; F)$ — пространство линейных непрерывных операторов из E и F. Для каждого оператора $A \in (E; F)$ введем *нормальный* *индекс* ν_A как многозначное отображение из T в S:

$$\nu_A(t) = \{s \in S| \parallel A \parallel_s^t := \sup_{\|x\|_s \leqslant 1} \parallel Ax \parallel^t < \infty\};\ (t \in T)$$

Пусть $\mathcal{N} = \{\nu\}$ — множество всех нормальных индексов с естественным индуктивным порядком

$$(v_1 \preccurlyeq v_2) \Leftrightarrow (\forall t \in T : \nu_1(t) \supset \nu_2(t)).$$

Положим для каждого $\nu \in \mathcal{N}$:

$$(E; F)_\nu := \{A \in (E; F)|\, \nu_A \preccurlyeq v\}$$

и снабдим каждое пространство $(E; F)_\nu$ проективной топологией τ_ν относительно определяющей системы преднорм $\{\| \cdot \|_s^t\}_{t \in T, s \in \nu(t)}$. Индуктивную шкалу ЛВП

$$\overrightarrow{(E; F)} := \{((E; F)_\nu, \tau_\nu)\}_{\nu \in \mathcal{N}}$$

назовем *нормальным разложением* пространства $(E; F)$.

Определение 14. Пусть E — ЛВП с определяющей системой преднорм $\{\| \cdot \|_t\}_{t \in T}$. Назовем E гладким ЛВП, если для любых $t_1 \preccurlyeq t_2$ из T найдутся такие константы $0 < m_{t_1 t_2} \leqslant M_{t_1 t_2} < +\infty$, что для любого $x \in E$:

$$0 < m_{t_1 t_2} \leqslant \lim_{\|h\|_{t_1} \to 0} \frac{\| x + h \|_{t_1}}{\| x + h \|_{t_2}} \leqslant M_{t_1 t_2} < +\infty.$$

Отметим, что пространства типа $C^m_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ — гладкие, $C^\infty([a; b])$ — не гладкое ЛВП. Любое ЛВП в слабой топологии является гладким.

Теорема 8. *Если E — гладкое ЛВП, то, для произвольного ЛВП F, шкала $\overrightarrow{(E; F)}$ — строгая.*

Рассмотрим теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n(\lambda, x)$, где параметр λ пробегает некоторый компактный отрезок $\Lambda \subset \mathbb{R}$, и для каждого $\lambda \in \Lambda$ операторы $A_n(\lambda, \cdot) \in (E; F)\,(n = 1, 2, \ldots)$; здесь E – гладкое ЛВП. Члены данного ряда можно рассматривать как отображения

$$\tilde{A}_n : \lambda \mapsto A_n(\lambda, \cdot);\ (n = 1, 2, \ldots)$$

отрезка Λ в пространство $(E; F)$. Потребуем, чтобы отображения $\tilde{A}_n$ были непрерывны на Λ как отображения в нормальное разложение пространства $(E; F)$ — шкалу $\overrightarrow{(E; F)}$, и чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n(\lambda)$ равномерно по $\lambda \in \Lambda$ сходился в шкале $\overrightarrow{(E; F)}$. Тогда, в силу теоремы 5, сумма ряда также непрерывна в этой шкале. Расшифровывая вышеуказанные условия в соответствии с определениями 13, 14, 8 и 5. приходим к следующему утверждению.

Теорема 9. *Предположим, что в приведенных выше обозначениях:*

a) *найдется такой нормальный индекс $\nu_1 \in \mathcal{N}$, что*

$$\| \sum_{k=n}^{\infty} A_n(\lambda, \cdot) \|_s^t \rightrightarrows 0 \, (n \to \infty, \lambda \in \Lambda)$$

при всех $t \in T$, $s \in \nu_1(t)$;

b) *для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и для каждой точки $\lambda_0 \in \Lambda$ найдется такой нормальный индекс $\nu_2 = \nu_2(n, \lambda_0) \in \mathcal{N}$, что*

$$A_n(\lambda, \cdot) \to A_n(\lambda_0, \cdot) \text{ при } \lambda \to \lambda_0 \text{ в } (E; F)_{\nu_2}.$$

Тогда найдется такой индекс $\nu_0 \in \mathcal{N}$, что для каждой точки $\lambda_0 \in \Lambda$:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\lambda, \cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\lambda_0, \cdot) \text{ в } (E; F)_{\nu_0}$$

Отметим, в заключение этого раздела, что теоремы 7 и 9 позволяют получить соответствующие утверждения о почленном дифференцировании рядов измеримых функций по параметру и рядов линейных непрерывных операторов в ЛВП по параметру (см. [22], [35], [36]).

5. Слабая равномерная сходимость в индуктивных шкалах ЛВП

В соответствии с общим определением слабых (скалярных) свойств отображений [37], введем вначале понятие *слабой равномерной сходимости* отображении в ЛВП.

Определение 15. Пусть X — множество, E — ЛВП, $f_n : X \to E \, (n = 1, 2, \ldots)$ и $f : X \to E$ — отображения. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо расномерно сходится к f на X : $f_n \overset{\sigma}{\rightrightarrows} f$, если для любого $\varphi \in E^*$:

$$\varphi \circ f_n \rightrightarrows \varphi \circ f; \; (n \to \infty)$$

т.е. $f_n \rightrightarrows f$ в слабой топологии E.

Нетрудно убедиться, что для отображений в одно ЛВП слабая равномерная сходимость следует из (сильной) равномерной сходимости.

Предложение 1. Если E — произвольное ЛВП, то, в обозначениях определения 15,

$$(f_n \rightrightarrows f) \Rightarrow \left(f_n \overset{\sigma}{\rightrightarrows} f \right).$$

Доказательство. Пусть $f_n \rightrightarrows f$, $\varphi \in E^*$, $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon = \{x \in E | \, |\varphi(x)| < \varepsilon$. Выбрав $\mathcal{N}$ так, чтобы при $n > \mathcal{N}$ было

$$\Delta(f_n, f)(X) = \{|f_n(x) - f(x)| \, x \in X\} \subset V_\varepsilon,$$

мы получим

$$|\Delta(\varphi \circ f_n, \varphi \circ f)(X)| = |\varphi[\Delta(f_n, f)(X)]| < \varepsilon,$$

откуда следует $f_n \overset{\sigma}{\rightrightarrows} f$.

Заметим, что любой пример слабо сходящейся, но не сходящейся, последовательности векторов $y_n \overset{\sigma}{\to} 0$ в E можно интерпретировать как пример слабо равномерно, но не равномерно, сходящейся последовательности отображений $f_n(x) \equiv y_n$, $x \in X$, $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, обратное к предложению 1 утверждение неверно.

Перенесем понятие слабой равномерной сходимости на отображения в индуктивные шкалы ЛВП.

Определение 16. Пусть X — множество, $\vec{E} = \{E_t\}_{t \in T}$ — индуктивная шкала ЛВП, $f_n : X \to \vec{E}$ и $f : X \to \vec{E}$ — отображения. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *слабо равномерно* сходится к f на X : $f_n \overset{\sigma}{\rightrightarrows} f$, если для любой функциональной шкалы $\vec{\varphi} = \{\varphi_t \in E_t^*\}_{t \in T} \in \vec{E}^*$:

$$\vec{\varphi} \circ f_n \rightrightarrows \vec{\varphi} \circ f; \; (n \to \infty).$$

Для нелинейных шкал нетрудно привести примеры, когда понятие слабой равномерной сходимости вырождается: так, если индуктивный предел $\varinjlim \vec{E}$ вырожден, т. е. $\vec{E}^* = \{0\}$ (см. в разделе 4 пример шкалы сходимости почти всюду), то любая последовательность $\{f_n : X \to \vec{E}\}_{n=1}^{\infty}$ слабо равномерно сходится к любому отображению $f : X \to \vec{E}$. Тем не менее, результат предложения 1 легко переносится на отображения в шкалы.

Предложение 2. Если $\vec{E}$ — произвольная индуктивная шкала ЛВП, то, в обозначениях определения 16,

$$\left(f_n \rightrightarrows f \text{ в } \vec{E}\right) \Rightarrow \left(f_n \rightrightarrows f \text{ в } \vec{E}\right).$$

Доказательство. Действительно, согласно определению 8, $f_n \rightrightarrows f$ в $\vec{E}$ означает $f_n \rightrightarrows f$ в некотором E_{t_0}, $t_0 \in T$. Тогда, в силу предложения 1, $f_n \overset{\sigma}{\rightrightarrows} f$ в E_{t_0}. Если $\vec{\varphi} = \{\varphi_t\}_{t \in T} \in \vec{E}^*$, то $\vec{\varphi} \circ f_n = \varphi_{t_0} \circ f_n \, (n = 1, 2, \ldots)$ и $\vec{\varphi} \circ f = \varphi_{t_0} \circ f$, откуда $\vec{\varphi} \circ f_n \rightrightarrows \vec{\varphi} \circ f$, т. е. $f_n \overset{\sigma}{\rightrightarrows} f$ в $\vec{E}$.

Более интересен вопрос об обратной связи между слабой равномерной сходимостью в шкале и слабой равномерной сходимостью в одном из пространств шкалы. Здесь существенную роль играет линейность шкалы $\vec{E}$. Основой служит обобщенная теорема Хана–Банаха для линейных шкал ЛВП, полученная в работах [25], [26]. Мы сформулируем Здесь лишь следствие о продолжении функционалов, необходимое для дальнейшего.

Предложение 3. Пусть $\vec{E} = \{E_t\}_{t\in T}$ — линейная шкала ЛВП, т. е. T линейно упорядочено. Тогда, для любого $E_{t_0} \in \vec{E}$, произвольный функционал $\varphi_{t_0} \in E^*_{t_0}$ может быть продолжен до функциональной шкалы $\vec{\varphi} = \{\varphi_t\}_{t\in T} \in \vec{E}^*$.

Отметим, что обобщения теоремы Хана-Банаха по различным направлениям занимают заметное место в современном анализе и его приложениях (см., например, [38]–[42]).

Теперь нетрудно получить основной результат этого раздела.

Теорема 10. *Если $\vec{E}$ линейная индуктивная шкала ЛВП, и, в обозначениях определения 16, $f_n(X) \subset E_{t_0}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $f(X) \subset E_{t_0}$ при некотором $E_{t_0} \in \vec{E}$, то*

$$\left(f_n \overset{\sigma}{\rightrightarrows} f \ \text{в}\ \vec{E}\right) \Rightarrow \left(f_n \overset{\sigma}{\rightrightarrows} f \ \text{в}\ E_{t_0}\right).$$

Доказательство. В силу условий теоремы, $\vec{\varphi}\circ f_n(x) = \varphi_{t_0}\circ f_n(x)$ и $\vec{\varphi}\circ f(x) = \varphi_{t_0}\circ f(x)$ для любого $\vec{\varphi} \in \vec{E}^*$ и $x \in X$. Следовательно, $\varphi_{t_0} \circ f_n \rightrightarrows \varphi_{t_0} \circ f$. Предложение 3 позволяет рассматривать φ_{t_0} как произвольный элемент $E^*_{t_0}$. Следовательно, $f_n \overset{\sigma}{\rightrightarrows} f$ в E_{t_0}.

Следствие 3. *Пусть X — компактное топологическое пространство, $\vec{E}$ — линейная и σ–индуктивная шкала ЛВП, отображения $f_n : X \to \vec{E}\,(n = 1, 2, \ldots)$ и $f : X \to \vec{E}$ непрерывны на X. Тогда, при некотором $t_0 \in T$,*

$$\left(f_n \overset{\sigma}{\rightrightarrows} f \ \text{в}\ \vec{E}\right) \Rightarrow \left(f_n \overset{\sigma}{\rightrightarrows} f \ \text{в}\ E_{t_0}\right).$$

Доказательство. Действительно, в силу леммы 1, $f_n : X \to E_{t_n}$ и $f : X \to E_{\bar{t}}$ при некоторых $t_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ и t из T. Выберем, в соответствии с определением 11, такой индекс $t_0 \in T$, что $t_n \preccurlyeq t_0\,(n = 1, 2, \ldots)$ и $\bar{t} \preccurlyeq t_0$. Тогда $f_n(X) \subset E_{t_0}\,(n = 1, 2, \ldots)$ и $f(X) \subset E_{t_0}$, что позволяет применить теорему 10.

Заключение

В работе исследованы основные свойства непрерывных отображений и равномерных пределов непрерывных отображений в индуктивных шкалах равномерных пространств, рассмотрены существенные приложения.

Ближайшей перспективой дальнейших исследований представляется исследование непрерывных отображений из одной шкалы равномерных пространств в другую.

Список литературы

1. *Köthe G.* Topological Vector Spaces. V.I. — New York–Heidelberg–Berlin: Springer–Verlag, 1969.
2. *Köthe G.* Topological Vector Spaces. V.II. — New York–Heidelberg–Berlin: Springer–Verlag, 1979.
3. *Narici L. and Beckenslcin E.* Topological Vector Spares. New York: Marcel Dekker, 1985.

4. *Benyamini Y. and Lindenstrauss J.* Geometrical Nonlinear Functional Analysis.V.I. — Colloquium Publ. no.48, Amer.Math.Soc.: Rod Island, 2000.
5. *Маслюченко В.К.* Лінійні неперервні оператори. — Чернівці: Рута, 2002.
6. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И.* Шкалы банахоных пространств // Успехи матем. наук. — 1966. Т.21, №2. — с. 89-169.
7. *Крейв С., Петунии Ю. И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978.
8. *Tita N.* Some special entropy spaces // Ahalele stintifice ale Universitatii "AI. I. Cuza" IASI, XXXVIII. s.I.a. — Matematica. — 1992. — F.2. — P.265–267.
9. *Tita N.* Some approximations ideals // Studia Univ. "Babeç–Bolyai" — Mathematica. — 1999. — V.XLIV, №3. — P.109–117.
10. *Ovchinnikov V.I.* Boundedness of Operators on L_p Spaces with Arbitrary Heal 1/p and Interpolation Theorems // Russian Journal of Mathematical Physics. — 1994. — Vol.2, №l. — P.127–130.
11. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.
12. *Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. — Киев: Наукова думка, 1988.
13. *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф.. Шефтель З.Г.* Функциональный анализ. — Киев: Вища школа, 1990.
14. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. — М.: Мир, 1986.
15. *Orlov I.V.* Iterated limit theorem for inductive–projective topologies and application // Methods of Functional Analysis and Topology, Kiev, to appear.
16. *Мурач О.О.* Еліптичні оператори в повних шкалах функцінальних просторів // Автореферат канд. дисс. Институт математики НАН Украины. — Киев, 1995.
17. *Ройтберг Б. Я.* Еліптичні граничні задачі в областях з негладкими межами в повних шкалах банахових просторів // Автореферат канд. дисс., Иститут математики НАН Украины. — Киев, 1997.
18. *Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. — М: Наука, 1994.
19. *Овсянников Л.В.* Алалитические группы. — Новосибирск: Изд–во Новосиб. ун–та. — 1972.
20. *Гомилко А.М.* Непрерывные отображения в шкалах банаховых пространств // Украинский математический журнал. — 1989. — Т.41, №8. — с.1130–1134.
21. *Orlov I.V.* An uniform limit continuity in pseudotimological vector spaces // Spectral and Evolutionary Problems. — Simferopol, 1996. — Vol.5. — p.58–65.
22. *Orlov I.V.* A termwisc differentiation in the inductive scales of the locally convex spaces // Operator Theory: Adv. & Appl. Vol.118. Base–Boeton–Berlin: Birkhäuser. 2000. P.321–333.
23. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука, 1968.
24. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.
25. *Орлов И.В.* Теорема Хана–Банаха в индуктивных шкалах пространств // Доповіді НАН Украины. — 1997. — №9. — с.32–36.
26. *Орлов И.В.* Принципы функционального анализа в шкалах пространств: теорема Хана–Банаха // Ученые Записки Таврического национального университета. — Математика. Физика. — 2000. — Т.2, №9. — с.88–95.
27. *Sebastiao e Silva J.* Sur serte classi di spazi locainonte convessi imnportanti per le applicazioni // Rendicondi di matematica e della sue applicazioni. — 1955. — Vol.14, Roma(5). — p.388–410.
28. *Orlov I.V.* Normal functional indices and normal quality // Methods of Functional Analysis and Topology, Kiev. — 2002. — Vol.8, №3. — p.61–71.

29. *Orlov I.V.* Normal Decomposition of Operator Spaces over Locally Convex Spaces // Functional Analysis and Its Applications. — 2002. — Vol.36, №4. — p.318–320.
30. *Орлов И.В.* Нормальные индексы и шкалы операторных пространств. Функцiональний аналiз. Український математичний конгрес–2001: Працi. Киев. — 2002 — с.193–208.
31. *Orlov I.V.* The space of measurable functions with almost everywhere convergence is a nonlinear scale of the locally convex spaces // Spectral and Evolutionary Problems. — Simferopol, 1998. — Vol.8. — p.37–42.
32. *Орлов И.В.* Сходимость почти всюду как сходимость в нелинейной индуктивной шкале локально выпуклых пространств // Ученые Записки Таврического национального университета. Математика. — 2001. — Т.14(53), №1. — с.75–80.
33. *Cohn Donald L.* Measure Theory. — Boston: Birkhäuser, 1980.
34. *Кадец В., Кучеренко Т.* Слабая топология и свойства, выполняющиеся почти всюду // Математическая физика, анализ, геометрия. — 2001. — Т.8. №3. — с.261–271.
35. *Orlov I.V.* A termwise differentiation in linear and nonlinear scales of locally convex spaces. I. The case of scalar argument // Spectral and Evolutionary Problems. — Simferopol, 1996. — Vol.5. — p.116–124.
36. *Orlov I.V.* A termwise differentiation in linear and nonlinear scales of locaIly convex spaces. II. General case // Spectral and Evolutionary Problems. — Simferopol. 1996. — Vol.6. — P.3O3–314.
37. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970.
38. *Ding G.* The Hahn–Banach extension property in not locally convex topological linear spaces // Adv. in Math. (China). — 1992. — Vol.21. — p.427–431. (Chinese)
39. *Buskes G.* The Hahn–Banach theorem surveyed // Diss. Math. — 1993. — Vol.327.
40. *Saccoman J.* Extension theorems and the problem of measure // Riv. Math. Univ. Parma. — 1992. — Vol.1, no.5. — p.287–293.
41. *Plewnia J.* A generalization of the Hahn–Banach theorem // Ann. Polon. Math. — 1993. — Vol.58. — p.47–51.
42. *Sorjonen P.* Hahn–Banach extension properties in linear orthogonality spaces // Funct. Approx. Comment. Math. — 1992. — Vol.20. — p.21–28.