УДК 513.88

О КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЯХ ОТ ПАРЫ ПРОЕКТОРОВ

М.В. Заводовский

Институт математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3, г. Киев, Украина
e-mail: *mzu@imath.kiev.ua*

In article study quadratic functions from pair projections of methods theory of representations and spectral theorems.

Введение

Для операторов принадлежащих алгебре, порожденной парой проекторов, многие свойства (в частности обратимость) исследуются методами теории представлений при помощи соответствующих спектралных теорем.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $P_1, P_2 \in L(H)$ – проекторы. Положим $H_k = IMP_k$, $H_k^{\perp} = KerP_k$ при $k = 1, 2$. Тогда $H = H_1 \oplus H_1^{\perp} = H_2 \oplus H_2^{\perp}$. Введем следующие обозначения $H_{0,0} = H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}$, $H_{0,1} = H_1^{\perp} \cap H_2$, $H_{1,0} = H_1 \cap H_2^{\perp}$, $H_{1,1} = H_1 \cap H_2$. Пусть $P_{i,j} = H \longrightarrow H_{i,j}$ – проекторы.

Введем оператор $A = I - P_1 - P_2 + \{P_1, P_2\}$.

Для пары проекторов в гильбертовом пространстве известна (см. [1] , [2]) слеедующая *спектральная теорема в форме операторов умножения:*

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство и $P_1, P_2 \in L(H)$ – проекторы. Тогда существует единственное, с точностью до эквивалентности мер μ_k,разложение H в прямую сумму инвариантных относительно P_1 и P_2 подпространств

$$H = H_{0,0} \oplus H_{0,1} \oplus H_{1,0} \oplus H_{1,1} \oplus \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{C}^2 \otimes L_2((0,1), d\mu_k),$$

где $\mu_k \succeq \mu_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$. Для проекторов P_1 и P_2 имеют место единственные разложения

$$P_1 = P_{1,0} \oplus P_{1,1} \oplus \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_k,$$

$$P_2 = P_{0,1} \oplus P_{1,1} \oplus \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau(1-\tau)} \\ \sqrt{\tau(1-\tau)} & 1-\tau \end{pmatrix} \otimes I_k.$$

Приведем её эквивалентную формулировку *в форме разложения единицы*, (о разложении единицы см. [3]) используемую в дальнейшем:

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство и $P_1, P_2 \in L(H)$ – ортопроекторы. Тогда существует единственное, с точностью до эквивалентности мер

μ,разложение H в прямой интеграл инвариантных относительно P_1 и P_2 подпространств

$$H = H_{0,0} \oplus H_{0,1} \oplus H_{1,0} \oplus H_{1,1} \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \int_{(0,1)}^{\oplus} H_\lambda d\mu(\lambda))$$

и также существуют единственные, с точностью до эквивалентности мер, разложения ортопроекторов

$$P_1 = P_{1,0} \oplus P_{1,1} \oplus \int_{(0,1)}^{\oplus} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes dE(\tau),$$

$$P_2 = P_{0,1} \oplus P_{1,1} \oplus \int_{(0,1)}^{\oplus} \begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau(1-\tau)} \\ \sqrt{\tau(1-\tau)} & 1-\tau \end{pmatrix} \otimes dE(\tau).$$

Здесь $\{E(\tau)\}_{\tau\in(0,1)}$ – разложение единицы оператора A.

Целью работы является получение необходимого и достаточного условий представимости самомсопряженнго оператора в виде квадратичной функции от пары проекторов.

1. О квадратичных функциях от пары проекторов

В ряде работ (см. например [4]) изучалась структура линейных комбинаций проекторов. Применим спектральную теорему для пары проекторов для изучения квадратичных функций от них.

Положим

$$a_1 = \frac{\gamma + \delta + 2\varepsilon - |\gamma - \delta|}{2},$$
$$a_2 = \frac{2\alpha + \gamma + \delta + 2\varepsilon - |2\alpha + \gamma + \delta|}{2},$$
$$b_1 = \frac{\gamma + \delta + 2\varepsilon + |\gamma - \delta|}{2},$$
$$b_2 = \frac{2\alpha + \gamma + \delta + 2\varepsilon + |2\alpha + \gamma + \delta|}{2}.$$

Введем множество $S = [a_1, a_2] \cup [b_1, b_2]$.

В статье доказывается следующая теорема

Теорема 1. Для того, чтобы оператор $A = A^*$ был представим в виде

$$A = \alpha\{P_1, P_2\} + \frac{\beta}{i}[P_1, P_2] + \gamma P_1 + \delta P_2 + \varepsilon I,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(A) \subseteq S$ и функция кратности была инвариантна отностиельно преобразования

$$\varphi : \frac{1}{2}(2\tau\alpha + \gamma + \delta + 2\varepsilon - \sqrt{(2\tau\alpha + 2\tau\delta + \gamma - \delta)^2 + 4\tau(1-\tau)(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + 2\alpha\delta)}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \frac{1}{2}(2\tau\alpha + \gamma + \delta + 2\varepsilon + \sqrt{(2\tau\alpha + 2\tau\delta + \gamma - \delta)^2 + 4\tau(1-\tau)(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + 2\alpha\delta)}).$$

Доказательство. Пусть $A = \alpha\{P_1, P_2\} + \frac{\beta}{i}[P_1, P_2] + \gamma P_1 + \delta P_2 + \varepsilon I$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Поскольку неприводимые пары проекторов лишь одномерны и двумерны, то спектр $\sigma(A)$ оператора A можно найти в неприводимых представлениях:

1: Если $x \in H_{0,0}$, то $Ax = \varepsilon x$;
2: Если $x \in H_{0,1}$, то $Ax = (\delta + \varepsilon)x$;
3: Если $x \in H_{1,0}$, то $Ax = (\gamma + \varepsilon)x$;
4: Если $x \in H_{1,1}$, то $Ax = (2\alpha + \gamma + \delta + \varepsilon)x$.

Таким образом $\{\varepsilon, \delta + \varepsilon, \gamma + \varepsilon, 2\alpha + \gamma + \delta + \varepsilon\} \subseteq \sigma(A)$.

Возьмем какое-нибудь двумерное инвариантное относительно P_1 и P_2 подпространство L. В L можно выбрать ортонормированный базис такой, что матрицы сужений P_1 и P_2 на L будут иметь вид:

$$P_1|L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ P_2|L = \begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau(1-\tau)} \\ \sqrt{\tau(1-\tau)} & 1-\tau \end{pmatrix}, \text{где } 0 < \tau < 1.$$

Тогда $A|L = \begin{pmatrix} 2\tau\alpha + \gamma + \delta\tau + \varepsilon & (\alpha + \frac{\beta}{i} + \delta)\sqrt{\tau(1-\tau)} \\ (\alpha - \frac{\beta}{i} + \delta)\sqrt{\tau(1-\tau)} & \delta - \delta\tau + \varepsilon \end{pmatrix}$

Из уравнения $det(A - \lambda I) = 0$ найдем следующие собственные значения

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\big((2\tau\alpha + \gamma + \delta + 2\varepsilon) + \sqrt{(2\tau\alpha + 2\tau\delta + \gamma - \delta)^2 + 4\tau(1-\tau)(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + 2\alpha\delta)}\big),$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\big(2\tau\alpha + \gamma + \delta + 2\varepsilon + \sqrt{(2\tau\alpha + 2\tau\delta + \gamma - \delta)^2 + 4\tau(1-\tau)(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + 2\alpha\delta)}\big).$$

Найденные собственные значения принадлежат множеству S. Причем λ_1 и λ_2 входят одновременно в сспектр оператора A.

Обратно, пусть $\sigma(A) \subseteq S$. По спектральной теореме в форме разложения единицы существует единственное, с точностью до эквивалентности мер, разложение пространства H прямую суму инвариантных относительно P_1 и P_2 подпространств:

$$H = H_\varepsilon \oplus H_{\gamma+\varepsilon} \oplus H_{\delta+\varepsilon} \oplus H_{2\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon} \oplus \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{C}^2 \otimes L_2(S, d\mu_k),$$

где $\mu_k \succeq \mu_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Обозначим $P_\omega : H \to H_\omega$ – проектор в H. Зададим P_1 и P_2 следующим образом

$$P_1 = P_{\gamma+\varepsilon} \oplus P_{2\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon} \oplus \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_k,$$

$$P_2 = P_{\delta+\varepsilon} \oplus P_{2\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon} \oplus \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau(1-\tau)} \\ \sqrt{\tau(1-\tau)} & 1-\tau \end{pmatrix} \otimes I_k,$$

где I_k – единичный оператор в $L_2(S, \mu_k)$, то есть I_k есть оператор в $L_2(S, \mu_k)$ на характеристическую функцию множества S $\chi_{supp(\mu_k)}(t),\ t \in S$.

Пусть I – единичный оператор в H. Тогда I представляется в виде

$$I = P_\varepsilon \oplus P_{\gamma+\varepsilon} \oplus P_{\delta+\varepsilon} \oplus P_{2\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon} \oplus \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_k.$$

Рассмотрим следующее выражение

$$\alpha\{P_1, P_2\} + \frac{\beta}{i}[P_1, P_2] + \gamma P_1 + \delta P_2 + \varepsilon I =$$

$$= \alpha(2P_{2\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon} \oplus \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 2\tau & \sqrt{\tau(1-\tau)} \\ \sqrt{\tau(1-\tau)} & 0 \end{pmatrix} \otimes I_k)+$$

$$+\frac{\beta}{i}\sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\tau(1-\tau)} \\ -\sqrt{\tau(1-\tau)} & 0 \end{pmatrix} \otimes I_k+$$

$$+\gamma(P_{\gamma+\varepsilon} \oplus P_{2\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon} \oplus \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes I_k)+$$

$$+\delta(P_{\delta+\varepsilon} \oplus P_{2\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon} \oplus \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau(1-\tau)} \\ \sqrt{\tau(1-\tau)} & 1-\tau \end{pmatrix} \otimes I_k)+$$

$$+\varepsilon(P_\varepsilon \oplus P_{\gamma+\varepsilon} \oplus P_{\delta+\varepsilon} \oplus P_{2\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon} \oplus \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_k) =$$

$$= \varepsilon P_\varepsilon \oplus (\gamma+\varepsilon)P_{\gamma+\varepsilon} \oplus (\delta+\varepsilon)P_{\delta+\varepsilon} \oplus (2\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)P_{2\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon} \oplus$$

$$\oplus \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 2\tau\alpha+\gamma+\delta\tau+\varepsilon & (\alpha+\frac{\beta}{i}+\delta)\sqrt{\tau(1-\tau)} \\ (\alpha-\frac{\beta}{i}+\delta)\sqrt{\tau(1-\tau)} & \gamma+\delta-\delta\tau \end{pmatrix} \otimes I_k.$$

Полученный оператор обозначим через A. Этот оператор A явялется самосопряженным. Его функция кратности будет инвариантна относительно преобразования φ.

Сформулируем ряд утверждений, которые следуют из доказанной теоремы.

Следствие 1. Для ограниченной обратимости ооператоров $\frac{1}{i}[P_1, P_2]$ и $\{P_1, P_2\}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $H_{0,0} = H_{0,1} = H_{1,0} = H_{1,1} = 0$.

Следствие 2. Для ограниченной обратимости операторов $\gamma P_1 + \delta P_2$ необходимо и достаточно, чтобы 0 не входил во множество $[\frac{\gamma+\delta-|\gamma-\delta|}{2}, \frac{\gamma+\delta-|\gamma+\delta|}{2}] \cup [\frac{\gamma+\delta+|\gamma-\delta|}{2}, \frac{\gamma+\delta+|\gamma+\delta|}{2}]$.

Заключение

В работе изучены квадратичные функции от пары проекторов в гильбертовом пространстве. *Основным результатом данной статьи* явялется доказанная теорема о необходимом и достаточном условиях представимости самосопряженнго оператора в виде квадратичной функции от двух проекторов.

Автор искренне признателен Ю.С. Самойленко за постановку задачи и полезные замечания в ходе работы над заметкой.

Список литературы

1. Ch. Davis Separation of two linear subspaces// Acta Sci. Math.(Szeged). – 1958 – 19. – P. 172-187.
2. P.R. Halmos Two subspaces// Trans.Amer. Math.Soc. – 1969 – 144. – P.381-389.
3. Н.И.Ахиезер, И.М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – M: Наука, 1966. –стр.185-217.
4. K. Nishio The sructure of real linear combination of two projection // Linear algebra and its applications. – 1985. – 66. – P. 169-176.
5. A. Klyachko Stable bundless, representation theory and Hermitian operators, Selecta Math. (N.S.). – 1999, – 4. – P. 419-445.
6. A. Knutson, T. Tao The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products I: proof of the saturation conjecture, JAMS. – 1999. – Vol.12, № 4. – P. 1055-1090.