**УДК 517.98**

# НЕПРЕРЫВНОСТЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ В КОЛЬЦЕ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К КОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА ОТНОСИТЕЛЬНО ДВУСТОРОННЕЙ СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ

**М.А.Муратов**

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *kromsh@crimea.com*

**Abstract**

In the paper,continuous algebraic operations in the ring of measurable operators affiliated to a finite von Neumann algebra with bilaterally convergence almost everywhere are studied.

## Введение

Кольца измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана, впервые появились в работах Сигала И.Е. [1]. В этой работе были введены некоммутативные аналоги сходимостей почти всюду и по мере последовательностей измеримых операторов, и рассмотрены основные свойства этих сходимостей. В частности, было показано, *что умножение непрерывно относительно каждого сомножителя в топологии звездной сходимости, индуцированной сходимостью почти всюду, но не обязательно непрерывно относительно совокупности сомножителей*. Впоследствии сходимости почти всюду и по мере и их различные вариации рассматривались и изучались многими авторами (Stinespring W.E. [2], Sankaran S. [3], Padmanabhan A.R. [4], Yeadon F.J. [5], [6], Paszkewicz [7], [8], Муратов М.А. [9]-[14], Чилин В.И. [14], Junge M. [15]и другие), установившими ряд важных и полезных соотношений между ними. В частности, в работах [9], [10] были рассмотрены двусторонние аналоги сходимостей почти всюду и по мере, выдерживающие инволюцию и позволяющие исследовать порядковые свойства сходящихся последовательностей.

*Настоящая работа посвящена вопросу непрерывности алгебраических операций в кольце измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана, относительно двусторонней сходимости почти всюду.* Для полноты изложения мы приводим формулировкм всех известных нам к настоящему моменту утверждений и фактов, имеющих отношение к рассматриваемому вопросу, с соответствующими ссылками на первоисточники. Используется терминология и обозначения теории алгебр фон Неймана из [17], [16], теории некоммутативного интегрирования [1], [4], [18], теории упорядоченных алгебр [19].

## 1. Основные понятия и факты

Пусть $\mathcal{A}$ - конечная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $m$ - точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ - решетка всех ортопроекторов в $\mathcal{A}$.

Замкнутый оператор $T$, присоединенный к $\mathcal{A}$ и имеющий всюду плотную область определения $D(T)$, называется $m$-измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in \mathcal{A}_P$, что $P(\mathcal{H}) \subset D(T)$ и $m(P^{\perp}) < \varepsilon$, где $P^{\perp} = I - P$, $I$ - единица алгебры $\mathcal{A}$.

Множество $S(\mathcal{A}, m)$ всех $m$-измеримых операторов является $*$-алгеброй относительно сильной суммы, сильного произведения и перехода к сопряженному оператору ([1]). Если алгебра $\mathcal{A}$ коммутативная, то ее можно отождествить с алгеброй $L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$ всех ограниченных комплексных функций, заданных на некотором пространстве $(\Omega, \Sigma, m)$ с полной мерой $m$, обладающей свойством прямой суммы (см., например, [16]). В этом случае $S(\mathcal{A}, m)$ совпадает с алгеброй $L_0(\Omega, \Sigma, m)$ всех измеримых комплексных функций на $(\Omega, \Sigma, m)$ .

Для каждого подмножества $\mathcal{M}$ из $\mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ через $\mathcal{M}_h$ (соответственно $\mathcal{M}_+$) обозначим множество всех самосопряженных (соответственно положительных самосопряженных) операторов из $\mathcal{M}$. Частичный порядок в $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$, порожденный собственным конусом $\mathcal{S}_+(\mathcal{A}, m)$, будем обозначать через $\leqslant$ .

Каждый оператор $T \in S(\mathcal{A}, m)$ имеет полярное разложение $T = U|T|$, где $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ - модуль этого оператора, а $U$- соответствующая частичная изометрия из $\mathcal{A}$.

Через $P_\varepsilon(T) = \{|T| > \varepsilon\}$ будем обозначать спектральный проектор для $|T|$, соответствующий интервалу $(\varepsilon, \infty)$ . Известно, что

$$|T|P_\varepsilon(T) = P_\varepsilon(T)|T| \geqslant \varepsilon P_\varepsilon(T)$$

и

$$P_\varepsilon(T)^{\perp}|T| \leqslant \varepsilon P_\varepsilon(T)^{\perp}.$$

Рассмотрим в $S(\mathcal{A}, m)$ топологию сходимости по мере $\tau$, базу окрестностей нуля которой образуют множества $U_{\varepsilon,\delta} = \{T \in S(\mathcal{A}, m) : \ \exists P \in \mathcal{A}_p$ такой, что $m(P^{\perp}) < \delta$, $TP \in \mathcal{A}$, $\|TP\| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon, \delta > 0$, $\|\cdot\|$ - $C^*$ норма на $\mathcal{A}$.

Известно, что $(S(\mathcal{A}, m), \tau)$ является отделимой полной топологической $*$- алгеброй (см., например, [20]).

Если последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{A}, m)$ сходится в топологии $\tau$ к оператору $T$, то обычно говорят, что $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $T$ по мере $m$ ($T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$) .

Заметим, что $S_h(\mathcal{A}, m)$ и $S_+(\mathcal{A}, m)$ замкнуты в топологии $\tau$.

Говорят, что последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S_h(\mathcal{A}, m)$ возрастает (убывает) к оператору $T \in S_h(\mathcal{A}, m)$, если $T_n \leqslant T_{n+1}$ (соответственно $T_n \geqslant T_{n+1}$ ) для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $T = \sup_n T_n$ (соответственно $T = \inf_n Tn$ ). Обозначают $T_n \uparrow T$ (соответственно $T_n \downarrow T$).

Напомним теперь определения сходимостей почти всюду и двусторонней почти всюду.

Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}, T \subset S(\mathcal{A}, m)$.

Говорят, что последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к оператору $T$ -почти всюду ($T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой проектор $P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ , что $m(P^{\perp}) < \varepsilon, (T_n - T)P \in \mathcal{A}$ и $\lim_{n\to\infty} \|(T_n - T)P\| = 0$; - двусторонне почти всюду ($T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой проектор $P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ , что $m(P^{\perp}) < \varepsilon, P(T_n - T)P \in \mathcal{A}$ и $\lim_{n\to\infty} \|P(T_n - T)P\| = 0$ .

Очевидно, что из сходимости почти всюду следует двусторонняя сходимость почти всюду. Обратное, вообще говоря, не верно. В ( [9, теорема 3.5]) доказано, что если $\mathcal{A}$ - конечная алгебра фон Неймана и $m$ - точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$, то сходимость почти всюду и двусторонняя сходимость почти всюду совпадают в том и только в том случае, когда алгебра $\mathcal{A}$ имеет тип $I$.

## 2. Сходимости почти всюду последовательностей в $S(\mathcal{A}, m)$

В этом разделе мы рассмотрим непрерывность алгебраических операций и инволюций в кольце $\mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ относительно сходимости почти всюду (См. [1]).

Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty},\ T,\ \{S_n\}_{n=1}^{\infty},\ S \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$.

**Предложение 1.** 1) Если $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$ и $\lambda$ - комплексное число, то $\lambda T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} \lambda T$ .
2) Если $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$, $S_n \xrightarrow{\text{п.в.}} S$, то $T_n + S_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T + S$.

Следующий пример показывает, что инволюция, в общем случае, не является непрерывной относительно сходимости почти всюду.

**Пример.** 2

Пусть $\mathcal{A}$ - фактор типа $H_1$ и $\mathcal{B}$ - максимальная коммутативная подалгебра в $\mathcal{A}$. Как известно, $\mathcal{B}$ $*$ -изоморфна $W^*$ алгебре $L = L_\infty([0, 1], \lambda)$ всех измеримых по Лебегу функций на [0,1] [1] . Поэтому в $\mathcal{B}$ существует последовательность проекторов $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $m(G_n) \to 0$ при $n \to \infty$ , но $G_n \overset{\text{п.в.}}{\nrightarrow} 0$. Рассмотрим последовательность проекторов $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{A}_p$ такую, что $E_n \downarrow 0$ и $m(G_n) = m(E_n)$ .

Пусть $M^Z : \mathcal{A} \to Z(\mathcal{A})$ - математическое ожидание алгебры $\mathcal{A}$ на центре $Z$ [21] . Так как $\mathcal{A}$ - фактор, то

$$M^Z(E_n) = m(E_n)I = m(G_n)I = M^Z(G_n)$$

Поэтому $E_n \sim G_n$. Тогда существует последовательность частичных изометрий $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $V_nV_n^* = G_n$ и $V_n^* = E_n$.

Покажем, что $V_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$ , но $V_n^* \overset{\text{п.в.}}{\nrightarrow} 0$.

Рассмотрим проекторы $P_n = E_n^{\perp}$. Ясно, что $P_n \uparrow I$ и $\|V_nP_n\| = 0$. Следовательно, $V_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$.

Кроме того, $G_nV_n = V_n, EV_N^* = V_n^*, V_n = V_nE_n$.

Допустим, что $V_n^* \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$. Тогда $\forall\varepsilon > 0$ существует проектор $H$ такой, что $m(H) > 1-\varepsilon$ и $\|HV_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ [4]. Следовательно, $||HV_nV_n^*|| \to 0$, то есть $\|HG_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ математическое ожидание алгебры $\mathcal{A}$ на подалгебру $\mathcal{B}$ [21]. Тогда

$$\|\Phi(H)G_n\| = ||\Phi(HG_n)|| \leqslant ||HG_n|| \to 0$$

при $n \to \infty$ и $m(\Phi(H)) = m(H) > 1-\varepsilon$.

Положим $R = \Phi(H) \geqslant \frac{1}{2} = \vee F \in \mathcal{B}_p : \Phi(H)F \geqslant \frac{1}{2}F$. Тогда

$$\begin{aligned} 1-\varepsilon \leqslant m(\Phi(H)R) + m(\Phi(H)R^{\perp}) \leqslant m(\Phi(HR)) + \tfrac{1}{2}m(R^{\perp}) = m(HR) + \tfrac{1}{2}m(R^{\perp}) = \\ = m(RHR) + \tfrac{1}{2}m(R^{\perp}) \leqslant m(R) + \tfrac{1}{2}m(R^{\perp}) = m(R) + \tfrac{1}{2}m(I-R) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}m(R). \end{aligned}$$

Следовательно, $m(R) > 1-2\varepsilon$. Кроме того, $R \leqslant 2\Phi(H)$.

Поэтому, $G_nRG_n \leqslant 2G_n\Phi(H)G_n$ и

$$||G_nRG_n|| \leqslant 2||G_n\Phi(H)G_n|| = 2||\Phi(H)G_n|| \to 0,$$

то есть $||G_nR|| \to 0$ при $n \to \infty$.

Мы получили, что $G_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$ вопреки предложению. Следовательно, $V_n^* \overset{\text{п.в.}}{\nrightarrow} 0$.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *Следующие условия эквивалентны:*

1) $(T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T) \Longrightarrow (T_n^* \xrightarrow{\text{п.в.}} T^*)$ *для любой последовательности* $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{A}, m)$.

2) $\mathcal{A}$ *является алгеброй типа I.*

Доказательство этой теоремы смотри, например в [12].

Перейдем к рассмотрению умножения. Как уже отмечалось, Сигал И.Е. доказал, что кольцо $\mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ всех $m$-измеримых операторов является топологичнским кольцом с инволюцией относительно звездной сходимости, индуцированной сходимостью почти всюду (умножение непрерывно относительно каждого сомножителя, но не обязательно относительно совокупности сомножителей) (см. [1]). Напомним, что последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ звездно сходится почти всюду к оператору $T$, если каждая подпоследовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит подпоследовательность, почти всюду сходящуюся к оператору $T$. Мы приведем несколько более общий вариант теоремы Сигала.

**Теорема 2.** *Пусть $\mathcal{A}$ - конечная алгебра фон Неймана, $m$ - точный нормальнй конечный след на $\mathcal{A}$. Если последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ сходится почти всюду к оператору $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ , то для любых $A \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ и $C \in \mathcal{A}$ последовательность $CT_nA$ сходится почти всюду к $CTA$ :*

$$(T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T) \Longrightarrow (CT_nA \xrightarrow{\text{п.в.}} CTA)$$

**Доказательство.** Пусть сначала $A \in \mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$. Так как $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$, то для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой проектор $E_\varepsilon \in \mathcal{A}_p$, что $m(E_\varepsilon^\perp) < \varepsilon, (T_n - T)E_\varepsilon \in \mathcal{A}$ и $\lim_{n\to\infty} ||(T_n - T)E_\varepsilon|| = 0$.

Пусть

$$A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$$

спектральное разложение оператора A, где $E_\lambda \uparrow I$ при $\lambda \to +\infty$ и $E_\lambda \downarrow 0$ при $\lambda \to -\infty$.

Существует такое число $\lambda_0 > 0$, что $m(E_{-\lambda_0} \vee E_{\lambda_0}^\perp) < \varepsilon$.

Положим $P_0 = E_{-\lambda_0}^\perp \wedge E_{\lambda_0}$. Тогда $AP_0 = P_0A \in \mathcal{A}$ и $m(P_0^\perp) < \varepsilon$.

Обозначим через $E = E_\varepsilon \wedge P_0$, и $Q = I - r(E^\perp A)$, где $r(Z)$ - правый носитель оператора $Z$.

Тогда

$$m(Q^\perp) = m(r(E^\perp A)) \leqslant m(E^\perp) = m(E_\varepsilon^\perp \vee P_0^\perp) \leqslant m(E_\varepsilon^\perp) + m(P_0^\perp) < 2\varepsilon$$

и $AQ = EAQ$. Следовательно

$$AQ = EA(I - r(E^\perp)) = EAQ = E_\varepsilon EP_0AQ.$$

Поэтому

$$\|(T_n - T)AQ\| = \|(T_n - T)E_\varepsilon EP_0AQ\| \leqslant \|(T_n - T)E_\varepsilon\|\|P_0A\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, $T_nA \xrightarrow{\text{п.в.}} TA$ для каждого оператора $A \in S_h(\mathcal{A}, m)$.

Пусть теперь оператор $A \in S(\mathcal{A}, m)$.

Тогда $A = ReA + \imath ImA$ и, по доказанному, $T_nReA \xrightarrow{\text{п.в.}} TReA$ и $T_nImA \xrightarrow{\text{п.в.}} TImA$. Поэтому, в силу предложения (1, $T_nA \xrightarrow{\text{п.в.}} TA$.

Наконец, для любого $C \in \mathcal{A}$ имеем:

$$\|C(T_n - T)AQ\| \leqslant \|C\|\|(T_n - T)AQ\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, $CT_nA \xrightarrow{\text{п.в.}} CTA$.

Следующий пример показывает, что если последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{A}, m)$ сходится почти всюду к оператору $T \in S(\mathcal{A}, m),$ и $B \in S(\mathcal{A}, m)$ , то, вообще говоря, нельзя утверждать, что последовательность $\{BT_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится почти всюду к $BT$ .

**Пример.** 3

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ типа $II$. Покажем, что тогда существует такая последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{A}, m)$ , что $A_n \downarrow 0$, но $A_n \overset{\text{п.в.}}{\nrightarrow} 0$.

Рассмотрим такую последовательность $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_p$ , что

1) $E_m E_n = 0$ при $n \neq m$;
2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} E_k = I$;
3) для любого $n$ найдется набор $\{E_{ni}\}_{i=1}^{2^{n-1}}$ таких проекторов, что $E_{ni}E_{nj} = 0$ при $i \neq j,$ $\sum_{i=1}^{2^{n-1}} E_{ni} = E_1$ и $E_{ni} \sim E_n$ $\forall i = 1, 2, ..., 2^{n-1}$.

Обозначим через $V_{ni}$ частичные изометрии, для которых

$$V_{ni}^* V_{ni} = E_{ni}$$

$$V_{ni} V_{ni}^* = E_n.$$

Пусть теперь $n \geqslant 2, i = 1, 2, ..., 2^{n-1}$.

Построим операторы $X_{ni} \in (E_{ni} + E_n)\mathcal{A}(E_{ni} + E_n)$ такие, что

$$E_{ni} X_{ni} E_{ni} = E_{ni},$$

$$E_n X_{ni} E_n = E_n,$$

$$E_{ni} E_{ni} E_n = V_{ni}^*,$$

$$E_n X_{ni} E_{ni} = V_{ni}.$$

Тогда $X_{ni} \geqslant 0$ и $\|X_{ni}\| \leqslant \sqrt{2}$.

Положим $X_1 = X_{21}, X_2 = X_{22}, X_3 = X_{31}, X_4 = X_{32}, X_5 = X_{33}, X_6 = X_{34}$, и так далее.

Так как $0 \leqslant X_n \leqslant \sqrt{2}I$, то последовательность $B_n = \frac{1}{2^{n+1}}(2 \cdot I + X_n) \downarrow 0$ .

Действительно,

$$B_n - B_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}(2 \cdot I + X_n) - \frac{1}{2^{n+2}}(2 \cdot I + X_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+2}}(2 \cdot I + 2 \cdot X_n - X_{n+1}) > 0,$$

так как $0 \leqslant X_{n+1} \leqslant \sqrt{2} \cdot I < 2 \cdot I$.

Рассмотрим оператор

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n E_n \in S_+(A, m),$$

где $\alpha_1 = 1, \alpha_n = n 2^{2^{n+2}},$ при$n \geq 2$.

Определим последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$A_n = AB_nA, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Так как $B_n \downarrow 0$, то $A_n \downarrow 0$.

Покажем, что $A_n \overset{\text{п.в.}}{\not\to} 0$.

Допустим, что это не так, то есть $A_n \xrightarrow{\text{п.в}} 0$. Тогда существует такая последовательность проекторов $\{P_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_p$, что $P_l \uparrow I$ при $l \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} ||A_nP_l|| = 0, \ \forall l \in \mathbb{N}.$$

Тогда $(P_l \wedge E_1) \uparrow E_1$ при $l \to \infty$ [17].

Поэтому существует такой номер $l_0$, что

$$m(P_{l0} \wedge E_1) > \frac{1}{2} m(E_1).$$

Обозначим $E_0 = P_{l0} \wedge E_1$, тогда

$$m(E_0) = m(E_0E_1E_0) = m(E_0(\sum_{i=1}^{2^{n-1}} E_{ni})E_0) =$$

$$\sum_{i=1}^{2^{n-1}} E_0 m(E_0E_{ni}E0) > \frac{1}{2} m(E_1),$$

и поэтому $\forall n \geq 2$ существует такой индекс $i_n$, что

$$m(E_nE_{ni_n}E_0) > \frac{1}{2^n} m(E_1).$$

Пусть $X_{ni_n} = X_{k_n}$. Тогда $\{k_n\}_{n=2}^{\infty}$ возрастающая последовательность индексов и $k_{n-1} < k_n < 2^{n+1}$.

Рассмотрим соответствующую подпоследовательность $\{B_{k_n}\}_{n=2}^{\infty}$ :

$$B_{k_n} = \frac{1}{2^{k_n+1}}(2 \cdot I + X_{k_n}) = \frac{1}{2^{k_n+1}}(2 \cdot I + X_{ni_n}).$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} ||A_nE_0|| = 0, \ \lim_{n\to\infty} ||\frac{1}{2^{k_n}} A^2E_0|| = 0 \ \text{ и}$$

$$A_{k_n} = AB_{k_n}A = \frac{1}{2^{k_n}} A^2 + \frac{1}{2^{k_n+1}} AX_{ni_n}A, \ \text{то}$$

$$\lim_{n\to\infty} ||\frac{1}{2^{k_n+1}} AX_{ni_n}AE_0|| = 0.$$

Но

$$AX_{ni_n}A = A(E_{ni_n} + E_n)X_{ni_n}(E_{ni_n} + E_n)A = (E_{ni_n} + \alpha_nE_n)X_{ni_n}(E_{ni_n} + \alpha_nE_n) =$$

$$= E_{ni_n}X_{ni_n}E_{ni_n} + \alpha_nE_nX_{ni_n}E_{ni_n} + \alpha_nE_{ni_n}X_{ni_n}E_n + \alpha_n^2E_nX_{ni_n}E_n =$$

$$= E_{ni_n} + \alpha_n E_n V_{ni_n} E_{ni_n} + \alpha_n E_{ni_n} V^*_{ni_n} E_n + \alpha_n^2 E_n.$$

Следовательно,

$$AX_{ni_n} AE_0 = E_{ni_n} E_0 + \alpha_n E_n V_{ni_n} E_{ni_n} E_0.$$

Поэтому $\lim_{n\to\infty} ||\alpha_n \frac{1}{2^{k_n+1}} E_n V_{ni_n} E_{ni_n} E_0|| = 0$.

Значит, $\lim_{n\to\infty} ||\alpha_n \frac{1}{2^{k_n+1}} E_n V_{ni_n} E_{ni_n} E_0||_{L_2(A,m)} = 0$ [1], [6]

С другой стороны,

$$||\alpha_n \frac{1}{2^{k_n+1}} E_n V_{ni_n} E_{ni_n} E_0||^2_{L_2(A,m)} = \alpha_n^2 \frac{1}{2^{2(k_n+1)}} m(E_0 E_{ni_n} V^*_{ni_n} E_n V_{ni_n} E_{ni_n} E_0) =$$

$$= \alpha_n^2 \frac{1}{2^{2(k_n+1)}} m(E_0 E_{ni_n} E_0) > \alpha_n^2 \frac{1}{2^{2(k_n+1)+n}} m(E_1) = \alpha_n^2 \frac{1}{2^{2k_n+n+2}} m(E_1) >$$

$$> \alpha_n^2 \frac{1}{2^{2^{n+2}+n+2}} m(E_1) = \frac{n^2 2^{2\cdot 2^{n+2}}}{2^{2^{n+2}+n+2}} m(E_1) > n^2 m(E_1).$$

Противоречие показывает, что $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ не сходится к нулю почти всюду.

Положим $Z_n = (I + A_1)^{-\frac{1}{2}} A_n (I + A_1)^{-\frac{1}{2}}$. Тогда

$$0 \le Z_{n+1} \le Z_n \le Z_1 = A_1 (I + A_1)^{-1} \le I,$$

то есть последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^\infty$ принадлежит $\mathcal{A}$ и $||Z_n|| \le 1$ для любого натурального числа $n$. Кроме того, $Z_n \downarrow 0$. Тогда по теореме 2 ([11]) $Z_n \xrightarrow{\text{п.в}} 0$.

Обозначим через $T_n = Z_n (I + A_1)^{\frac{1}{2}}$. Из теоремы 2 следует, что $T_n \xrightarrow{\text{п.в}} 0$. Однако, если положить $B = (I + A_1)^{\frac{1}{2}}$, то

$$BT_n = (I + A_1)^{\frac{1}{2}} Z_n (I + A_1)^{\frac{1}{2}} =$$

$$(I + A_1)^{\frac{1}{2}} (I + A_1)^{-\frac{1}{2}} A_n (I + A_1)^{-\frac{1}{2}} (I + A_1)^{\frac{1}{2}} = A_n \overset{\text{п.в.}}{\not\to} 0.$$

Итак, $T_n \xrightarrow{\text{п.в}} 0,\ B = (I + A_1)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{S}(A, m),$ но $BT_n \overset{\text{п.в.}}{\not\to} 0$. $\square$

**Замечание 1.** Пример 2 показывает, что если $\{T_n\}_{n=1}^\infty,\ T,\ \{S_n\}_{n=1}^\infty,\ S \subset \mathcal{S}(A, m)$, $T_n \xrightarrow{\text{п.в}} T,\ S_n \xrightarrow{\text{п.в}} S$, то, в общем говоря, нельзя утверждать, что $S_n T_n \xrightarrow{\text{п.в}} ST$.

Действительно, если положить $S_n = B = (I + A_1)^{\frac{1}{2}}$ для любого натурального $n$ и $T_n = Z_n (I + A_1)^{\frac{1}{2}}$, то $S_n \xrightarrow{\text{п.в}} B,\ T_n \xrightarrow{\text{п.в}} 0,$ но $S_n T_n \xrightarrow{\text{п.в}} 0$.

В заключении пункт приведем теорему Сигала И.Е. (См. [1])

**Теорема 3.** *Пусть* $\{T_n\}_{n=1}^\infty,\ T \subset \mathcal{S}(A, m)$ *и* $T_n \xrightarrow{n.в} T$. *Тогда*

1) *Существует подпоследовательность* $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ *такая, что* $T^*_{n_k} \xrightarrow{n.в} T^*$.
2) *Для каждого оператора* $S \in \mathcal{S}(A, m)$ *существует подпоследовательность* $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ *такая, что* $ST_{n_k} \xrightarrow{n.в} ST$.

## 3. Двусторнняя сходимость почти всюду последовательностей в $\mathcal{S}(A, m)$

В этом разделе мы рассмотрим непрерыность алгебраических операций и инволюции в кольце $\mathcal{S}(A, m)$ относительно двусторонней сходимости почти всюду.

Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty},\ T,\ \{S_n\}_{n=1}^{\infty},\ S \subset \mathcal{S}(A, m)$.

**Предложение 2.** 1) Если $T_n \xrightarrow{\text{п.в}} T$ и $\lambda -$ комплексное число, то $\lambda T_n \xrightarrow{\text{д.п.в}} \lambda T$.

2) Если $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в}} T,\ S_n \xrightarrow{\text{д.п.в}} S$, то $T_n + S_n \xrightarrow{\text{д.п.в}} T + S$.

3) Если $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в}} T,$ то $T_n^* \xrightarrow{\text{д.п.в}} T^*$.

Доказательство этого предложения смотри в [9].

Для двусторонней сходимости почти всюду имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.** *Пусть $\mathcal{A} -$ конечная алгебра фон Неймана $m -$ точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$. Если последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(A, m)$ сходится двусторонне почти всюду к оператору $T \in \mathcal{S}(A, m)$, то для любых $A, B \in \mathcal{S}(A, m)$ последовательность $\{BT_nA\}_{n=1}^{\infty}$ сходится почти всюду к $BTA$ :*

$$(T_n \xrightarrow{\partial.n.\mathit{в}} T) \Rightarrow (BT_nA \xrightarrow{\partial.n.\mathit{в}} BTA)$$

**Доказательство.** Пусть сначала $A, B \in \mathcal{S}(A, m)$.

Так как $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в}} T$, то для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой проектор $E_\varepsilon \in \mathcal{A}_p$, что $m(E_m^\perp) < \varepsilon$, $E_\varepsilon(T_n - T)E_\varepsilon \in \mathcal{A}$ и $\lim_{n\to\infty} ||E_\varepsilon(T_n - T)E_\varepsilon|| = 0$.

Пусть

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$$

и

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu dF_\mu$$

спектральные разложения операторов $A$ и $B$, где $E_\lambda \uparrow I$ при $\lambda \to +\infty,\ E_\lambda \downarrow 0$ при $\lambda \to -\infty$, $F_\mu \uparrow I$ при $\mu \to +\infty$ и $F_\mu \downarrow 0$ при $\mu \to -\infty$.

Существуют такие числа $\lambda_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$, что $m(E_{-\lambda_0} \bigvee E_{\lambda_0}^\perp) < \varepsilon$ и $m(F_{-\mu_0} \bigvee E_{\mu_0}^\perp) < \varepsilon$.

Положим $P_0 = E_{-\lambda_0}^\perp \bigwedge E_{\lambda_0}$ и $Q_0 = F_{-\mu_0}^\perp \bigwedge F_{\mu_0}$. Тогда $AP_0 = P_0A \in \mathcal{A},\ m(P_0^\perp) < \varepsilon$. $BQ_0 = Q_0B \in \mathcal{A}$ и $m(Q_0^\perp) < \varepsilon$. Обозначим через $E = E_\varepsilon \bigwedge P_0 \bigwedge Q_0$, и $Q = (I - r(E^\perp A)) \bigwedge (I - r(E^\perp B))$.

Тогда

$$m(E^\perp) = m(E_\varepsilon^\perp \bigvee P_0^\perp \bigvee Q_0^\perp) \le m(E_\varepsilon^\perp) + m(P_0^\perp) + m(Q_0^\perp) < 3\varepsilon$$

и

$$m(Q^{\perp}) = m[(I - r(E^{\perp}A))^{\perp} \bigvee (I - r(E^{\perp}B))^{\perp}] \leq m(E^{\perp}) + m(E^{\perp}) < 6\varepsilon.$$

Кроме того, $AQ = EAQ = E_{\varepsilon}EP_0AQ$ и

$$QB = (BQ)^* = [B(I - r(E^{\perp}B))Q]^* = (EBQ)^* = QBE = QBQ_0EE_{\varepsilon}.$$

Поэтому

$$\| QB(T_n - T)AQ \| = \| QBQ_0EE_{\varepsilon}(T_n - T)E_{\varepsilon}EP_0AQ \| \leq$$

$$\leq \| BQ_0 \| \| E_{\varepsilon}(T_n - T)E_{\varepsilon} \| \| P_0A \| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, $BT_nA \xrightarrow{\text{п.в}} BTA$ для любых операторов $A, B \in \mathcal{S}_{\langle}(A, m)$.
Пусть теперь операторы $A, B \in \mathcal{S}_{\langle}(A, m)$.
Тогда $A = ReA + iImA,\ B = ReB + iImB$ и, по доказанному,

$$ReBT_nReA \xrightarrow{\text{д.п.в}} ReBTReA,\ ImBT_nReA \xrightarrow{\text{д.п.в}} ImBTReA,$$

$$ReBT_nImA \xrightarrow{\text{д.п.в}} ReBTImA \text{ и } ImBT_nImA \xrightarrow{\text{д.п.в}} ImBTImA.$$

Поэтому, в силу предложения (2),

$$BT_nA \xrightarrow{\text{д.п.в}} BTA.$$

**Замечание 2.** Если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty},\ T,\ \{S_n\}_{n=1}^{\infty},\ S \subset \mathcal{S}(A, m), T_n \xrightarrow{\text{д.п.в}} T,\ S_n \xrightarrow{\text{д.п.в}} S$, то, в общем, нельзя утверждать, что $S_nT_n \xrightarrow{\text{д.п.в}} ST$.

Рассмотрим еще раз пример 2. Пусть $\mathcal{A}-$ фактор типа $II_1$, $\mathcal{B}-$ максимальная коммутативная подалгебра в $\mathcal{A}$, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая последоватльность проекторов в $\mathcal{B}$, что $m(G_n) \to 0$ при $n \to \infty$, но $G_n \overset{\text{п.в.}}{\nrightarrow} 0$. Как уже отмечалось выше, существует последовательность частичных изометрий $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $V_nV_n^* = G_n,\ V_n \xrightarrow{\text{п.в}} 0$, но $V_n^* \overset{\text{п.в.}}{\nrightarrow} 0$. Поэтому $V_n \xrightarrow{\text{д.п.в}} 0$, и, следовательно, $V_n^* \xrightarrow{\text{д.п.в}} 0$, в то время, как $V_nV_n^* = G_n \overset{\text{п.в.}}{\nrightarrow} 0$. Так как $\mathcal{B}-$ максимльная коммутативная подалгебра в $\mathcal{A}$, то $G_n \overset{\text{д.п.в.}}{\nrightarrow} 0$.

## Заключение

*Результаты данной статьи позволяют утверждать,* что в кольце $\mathcal{S}(A, m)$ измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$, алгебраические операции умножения на скаляр, суммы, инволюции и умножения слева и справа на измеримые операторы непрерывны относительно джвусторонней сходимости почти всюду.

*Построенные примеры показывают,* что:

– существуют такие $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T \subset \mathcal{S}(A, m)$, что $T_n \xrightarrow{\text{п.в}} T$, но $T_n^* \overset{\text{п.в.}}{\nrightarrow} T^*$;

– существуют такие $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T \subset \mathcal{S}(A,m)$ и $B \in \mathcal{S}(A,m)$, что $T_n \xrightarrow{\text{п.в}} T$, но $BT_n \overset{\text{п.в.}}{\not\to} BT$;

– существуют такие $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}_{\langle}(A,m)$, что $T_n \downarrow 0$, но $T_n \overset{\text{п.в.}}{\not\to} 0$;

– существуют такие $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, $S \subset \mathcal{S}(A,m)$, что $T_n \xrightarrow{\text{п.в}} T$, $S_n \xrightarrow{\text{п.в}} S$, но $S_nT_n \overset{\text{п.в.}}{\not\to} ST$;

– существуют такие $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, $S \subset \mathcal{S}(A,m)$, что $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в}} T$, $S_n \xrightarrow{\text{д.п.в}} S$, но $S_nT_n \overset{\text{д.п.в.}}{\not\to} ST$.

## Список литературы


1. *Segal I.E.* A non-commutative extension of abstract integration // Ann.Math. - 1953. - No. 57. - P. 401-457.
2. *Stinespring W.E.* Integration theorems for gages and duality for unimodular groups // Tranc.Amer.Math.Soc. - 1959. - No.90. - P.15-56.
3. *Sankaran S.* Stohastic convergence for operators // Quart.J.Math. - 1964. - ser.2, No.15. - P.97-102.
4. *Padmanabhan A.R.* Convergence in measure and related results in finite rings of operators // Tranc.Amer.Math.Soc. - 1967.- No.128. - P.359-388.
5. *Yeadon F.J.* Convergence of measureble operators //Proc.Camb.Phil.Soc. - 1973.-No.74.-P.257-268.
6. *Yeadon F.J.* Non-commutative $L^p$ spaces // Math.Proc.Camb.Phil.Soc. - 1975.-No.77.-P.91-102.
7. *Paszkiewicz A.* Convergence almost everywhere in $W^*-$algebras // J.Funct.Anal.- 1986. - 69. - P. 143-154.
8. *Paszkiewicz A.* Convergences in $W^*$ - algebras// J. Funct. Anal. - 1986. - 69. - P.143-154.
9. *Муратов М.А.* Некоторые вопросы сходимости последовательностей неограниченных операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана // Функ.Анализ-Труды Украинского Математич. Конгресса.- Киев.-2001.- Киев: Инст.матем.НАНУ, 161-175 (2002).
10. *M.A. Muratov* Order properties of convergent sequences of unbounded measureble operators affiliated to a finite von Neumann algebra // Methods Funct.Anal.Topology.-2002.- 8, №3. - P. 50-60.
11. *Муратов М.А. , Чилин В.И.* Сходимость почти всюду и $(o)-$сходимость в кольцах измеримых операторов , присоединенных к конечной алгебре фон Неймана // Укр.Мат.Журнал - 2003.- Т.55, - No.9 - С.1196-1205.
12. *Муратов М.А.* Различные виды сходимости в кольцах измеримых операторов. // Уч.записки Таврич. Нац.Ун.Математика, механика, информатика и кибернетика. - 2002. - 15(54), №2.-С. 49-61.
13. *Муратов М.А. , Чилин В.И.* Порядковая сходимость в индивидуальной эргодической теореме для некоммутативных $L_p$ пространств измеримых операторов // Уч.записки Таврич. Нац.Ун.Математика, механика, информатика и кибернетика. - 2003. - 16(55), №1.-С. 17-22.
14. *Чилин В.И.* Топологические $O^*-$алгебры // Функциональный анализ и его приложения. - 980. - Т.14, вып. 1.-С.87-88.
15. *Marius Junge, Quanhua Xu* Theoremes ergodiques maximaux dans les espaces $L_P$ non commutatifs // C.R.Acad.Sci.Paris. - 2002. - ser.I, No.334. - P. 773-778.
16. *Takesaki M.* Theory of operator algebras I. - New York:Springer, 1979. - 415 p.
17. *Stratila S., Zsido L.* Lectures on von Neumann algebras. - England Abacus Press, 1975. - 478 p.
18. *Fack T., Kosaki H.* Generalized $s-$numbers of $\tau-$ mesaurable operators // Pacific J.Math.- 1986. - Vol. 123. - P.269-300.

19. *Сарымсаков Т.А., Аюпов Ш.А., Хаджиев Д., Чилин В.И.*. Упорядоченные алгебры.- Ташкент: ФАН, 1983.- 303с.
20. *Nelson E.* Notes on non commutative integretion // J.Funct.Anal.-1974. - No.15.-P.103-116.
21. *Arveson W.* Analiticity in operator algebras, Amer. J.Math.-1967.-89 - P.578-642.