**УДК 517.9**

# О ПРИБЛИЖЕННЫХ И ТОЧНЫХ ПОЛИНОМАХ ТИПА ЧЕБЫШЕВА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

**Трубников Ю.В.**

Витебский государственный университет,
физический факультет,
Московский пр-т, 33, г. Витебск, Беларусь, 210036

**Abstract.**
The paper is devoted to the approximation of polynomials of least. deviation in arbitrary complex domains and to the explicit formulae of such polynomial for rectangles.

## Введение. Постановка задачи

*Статья посвящена* нахождению точных и приближенных полиномов типа Чебышева в комплексной области. Как известно, такие полиномы важны не только с теоретической точки зрения, но и в приложениях, в частности, при построении оптимальных итерационных процессов высоких порядков для операторов с заданной областью локализации спектра (см., например, [1], с. 96). Основными теоретическими методами доказательства экстремальности полиномов в комплексных областях являются методы, основанные на критериях А.Н. Колмогорова (1948) или В.К Иванова – Е.Я. Ремеза (1953) (см., например, [2], с. 7-9) Однако, к общей ситуации проверка условий этих критериев весьма проблематична (она сводится к решению уравнений, содержащих неизвестные полиномы и систему некоторых неизвестных точек (так называемых $e$-точек). Поэтому в приложениях важным является разработка простых методов построения приближенных полиномов типа Чебышева и нахождение явных точных полиномов для естественных областей локализации спектров операторов (например, областей, имеющих прямоугольный вид). Данная работа посвящена именно этим вопросам.

В первой части статьи предлагается простой метод нахождения приближенных экстремальных полиномов в произвольных комплексных областях со спрямляемой границей. Этот метод основан на известном эффекте стремления нормы $L_p$ к норме $L_\infty$ при р $\to \infty$. Оказывается, что при этом можно оценить и скорость сходимости (теорема 1). Более того, как показывают приводимые примеры, в действительности приближения являются хорошими даже при сравнительно небольших $p$.

Предлагаемый метод приближенного нахождения экстремальных полиномов не только позволяет находить аппроксимации к искомым полиномам типа Чебышева, но и может быть использован как «ориентир» для нахождения *точных* полиномов. Используя этот ориентир мы в следующей части статьи находим явные формулы для экстремальных полиномов до 6-го порядка в прямоугольных областях.

## 1. Аппроксимации полиномов типа Чебышева в комплексной области

Пусть $U$ — открытое ограниченное подмножество комплексной плоскости $\mathbf{C}$, граница которого $\Gamma$ состоит из конечного числа непересекающихся спрямляемых жордановых кривых. Через $A$ мы обозначаем подмножестов $C^{n+1}$ вида

$$A = \{a \in \mathbf{C}^{n+1} |\, a = (1, a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i \in \mathbf{C}, \mathbf{i} = \overline{1,n}\}.$$

Пусть $Q_n(a,z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, a \in A$ — полином $n$-ой степени. Положим

$$\|Q_n(a)\|_\infty = \max_{z \in \Gamma} |Q_n(a,z)|.$$

Следующая лемма, по-существу, хорошо известна (однако мы не знаем источника, на который можно сослаться). Для полноты изложения приведено ее доказательство.

**Лемма 1.** *Для любого $\varepsilon > 0$ м любого $a \in A$ существует положительное число $N$, такое что для каждого* p $\geqslant N$ *выполняются неравенства*

$$\|Q_n(a)\|_\infty - \varepsilon \leqslant \left( \frac{1}{l} \int\limits_\Gamma |Q_n(a,z)|^p \, d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|Q_n(a)\|_\infty, \tag{1}$$

*где $l$ – длина кривой* $\Gamma$.

**Доказательство.** Пусть $\Gamma_1 = \Gamma_1(a,\varepsilon) \subset \Gamma$ – множество положительной меры и такое, что

$$|Q_n(a,z)| \geqslant \|Q_n(a)\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}, \quad (z \in \Gamma_1).$$

Мы имеем

$$\left( \frac{1}{l} \int\limits_\Gamma |Q_n(a,z)|^p \, d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \frac{1}{l} \int\limits_{\Gamma_1} |Q_n(a,z)|^p \, d\Gamma + \frac{1}{l} \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma_1} |Q_n(a,z)|^p \, d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant \left( \frac{1}{l} \int\limits_{\Gamma_1} |Q_n(a,z)|^p \, d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left( \frac{1}{l} \int\limits_{\Gamma_1} \left( \|Q_n(a)\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right)^p d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left( \|Q_n(a)\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right) \left( \frac{1}{l} mes \Gamma_1 \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \|Q_n(a)\|_\infty - \varepsilon.$$

Поэтому справедливо левое неравенство в (1). Правое неравенство очевидно. □

Заметим, что если

$$\|Q(a_\bullet)\|_\infty \leqslant \|Q_n(a)\|_\infty, \quad (a \in A)$$

и

$$\min_{a \in A} \left( \frac{1}{l} \int\limits_\Gamma |Q_n(a,z)|^p \, d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \frac{1}{l} \int\limits_\Gamma |Q_n(b,z)|^p \, d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $b = b(p) \in A$, то из леммы 1 следует, что для всех достаточно больших $p$ мы имеем

$$\|Q_n(b)\|_\infty - \varepsilon \leqslant \left(\frac{1}{l}\int\limits_\Gamma |Q_n(b,z)|^p\, d\Gamma\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{1}{l}\int\limits_\Gamma |Q_n(a_\bullet,z)|^p\, d\Gamma\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|Q_n(b)\|_\infty$$

и поэтому

$$\|Q_n(b)\|_\infty \leqslant \|Q_n(a_\bullet)\|_\infty + \varepsilon.$$

Значит, если $p \to \infty$, то последовательность полиномов $Q_n(b(p), z)$ сходится к полиному $Q_n(a_\bullet, z)$ в норме $\|\cdot\|_\infty$.

Пусть $P_n(a,z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$. Для любого фиксированного $p$, $1 \leqslant p < \infty$ функция

$$\mathbf{C^{n+1}} \ni a = (a_0, \ldots, a_n) \to \left(\frac{1}{l}\int\limits_\Gamma |P_n(a,z)|^p\, d\Gamma\right)^{\frac{1}{p}}$$

может рассматриваться как норма в пространстве $\mathbf{C^{n+1}}$. Мы будем обозначать эту норму через $\|a\|_p$. Через $\|a\|_\infty$ мы обозначим норму

$$\|a\|_\infty = \max_{z\in\Gamma} |P_n(a,z)|.$$

Напомним неравенство Кларксона-Ханнера (см., например, [3], 2.5):

Если р $\geqslant 2$, то для любых $f, g \in L^p(\Omega)$ справедливо

$$2^{p-1}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \geqslant \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p$$

(здесь $\|f\|_p$ – стандартная норма в $L^p(\Omega)$)

В наших обозначениях это неравенство означает, что для любых $a, b \in \mathbf{C^{n+1}}$ и любого $p \geqslant 2$ мы имеем

$$2^{p-1}(\|a\|_p^p + \|b\|_p^p) \geqslant \|a+b\|_p^p + \|a-b\|_p^p \tag{2}$$

**Лемма 2.** *Для каждого $p \geqslant 2$ справедливо следующее неравенство*

$$\|a+b\|_p^p - \|a\|_p^p \geqslant \frac{1}{2^{p-1}-1}\|b\|_p^p + \langle grad_a \|a\|_p^p, b\rangle \tag{3}$$

**Доказательство.** Заменяя в (2) $a$ на $\frac{x+y}{2}$ и $b$ на $\frac{x}{2}$ мы приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\left(\|x+y\|_p^p + \|x\|_p^p\right) \geqslant \left\|x + \frac{y}{2}\right\|_p^p + \frac{1}{2^p}\|y\|_p^p. \tag{4}$$

Прибавляя к обеим частям (4) слагаемое – $\|x\|_p^p$ получаем

$$\|x+y\|_p^p - \|x\|_p^p \geqslant 2\left(\left\|x+\frac{y}{2}\right\|_p^p - \|x\|_p^p\right) + \frac{1}{2^{p-1}}\|y\|_p^p. \tag{5}$$

Применяя к первому слагаемому в правой части (5) полученное неравенство еще раз мы имеем

$$\|x+y\|_p^p - \|x\|_p^p \geqslant 2^2 \left( \left\| x + \frac{y}{2^2} \right\|_p^p - \|x\|_p^p \right) + \frac{1}{2^{p-1}} \frac{1}{2^p} \|y\|_p^p + \frac{1}{2^{p-1}} \|y\|_p^p.$$

Продолжая эту процедуру и переходя к пределу получаем

$$\|x+y\|_p^p - \|x\|_p^p \geqslant \frac{\|y\|_p^p}{2^{p-1}-1} + \langle \mathrm{grad}_x \|x\|_p^p, y \rangle.$$

Доказательство завершено. □

Обозначим через $a_\infty \in A$ вектор коэффициентов, на котором достигается минимум нормы $\|a\|_\infty$ на $A$, а через $a(p)$ обозначим соответствующий вектор минимизирующий норму $\|a\|_p$ на A.

**Теорема 1.** *Для любого* $p \geqslant 2$ *справедливо следующее неравенство*

$$\|a_\infty - a(p)\| \leqslant (2^{p-1}-1)^{\frac{1}{p}} \left( \|a(p)\|_\infty - \|a(p)\|_p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{6}$$

**Доказательство.** Из леммы 2 вытекает, что

$$\|a(p) + a_\infty - a(p)\|_p^p - \|a(p)\|_p^p \geqslant \frac{1}{2^{p-1}-1} \|a_\infty - a(p)\|_p^p + \langle grad_a \|a(p)\|_p^p, a_\infty - a(p) \rangle.$$

Но в точке $a(p)$ выполняется равенство $\mathrm{grad}_a \|a(p)\|_p^p = 0$ и поэтому

$$\|a(p)\|_p^p - \|a_\infty\|_p^p \leqslant -\frac{1}{2^{p-1}-1} \|a_\infty - a(p)\|_p^p.$$

Кроме того, мы имеем

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|a(p)\|_\infty^p - \|a_\infty\|_\infty^p = \|a(p)\|_\infty^p - \|a(p)\|_p^p + \|a(p)\|_p^p - \|a_\infty\|_\infty^p - \|a_\infty\|_p^p + \|a_\infty\|_p^p \leqslant \\ \leqslant \|a(p)\|_\infty^p - \|a(p)\|_p^p + \|a(p)\|_p^p - \|a_\infty\|_p^p \leqslant \\ \leqslant \|a(p)\|_\infty^p - \|a(p)\|_p^p - \tfrac{1}{2^{p-1}-1} \|a_\infty - a(p)\|_p^p. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{1}{2^{p-1}-1} \|a_\infty - a(p)\|_p^p \leqslant \|a(p)\|_\infty^p - \|a(p)\|_p^p$$

и доказательство закончено. □

**Замечание 1.** 1. Так как правая часть (6) зависит только от $a(p)$, то после нахождения этого вектора данная оценка становится эффективной.

2. Необходимо отметить, что алгоритм Ремеза ([4], с. 74) в рассматриваемой ситуации (то есть для произвольной области $U$) сходится медленно, а метод Чеботарева перехода от алгебраических полиномов к тригонометрическим ([5], с. 318) порождает громоздкую систему нелинейных уравнений такую, что даже ее приближенное решение (получаемое, например, методом Ньютона-Канторовича) требует очень объемных вычислений.

В следующем примере сравнивается приближенный экстремальный полином, полученный с помощью предложенного метода с известным точным экстремальным полиномом. Пример показывает, что приближения обладают высокой точностью для весьма малых $p$.

**Пример 1.** Пусть $\Gamma$ – граница прямоугольника $U$ в комплексной плоскости, стороны которого параллельны координатным осям и имеют длины соответственно $2\omega$ и $2h$, а центр прямоугольника – $(a,0)$, где $0<\omega<a$.

Известно (см. [2], теорема 3.5), что если $4h^4+4a^2h^2+3\omega^2h^2+\omega^4 \leqslant a^2\omega^2$, то экстремальный полином $Q(a_\bullet, z)$ имеет вид

$$Q(a_\bullet, z) = 1-\frac{2az}{a^2-d^2} = \frac{z^2}{a^2-d^2},$$

где $d^2=\frac{\omega^2}{2}+h^2$.

В частности, если $a=6, \omega=3, h=1$, то

$$Q(a_\bullet, z) = 1-0,3934z+0,0328z^2. \tag{7}$$

Найдем аппроксимацию этого экстремального полинома с помощью предложенного метода для $p=4$.

Принимая во внимание отношение длин сторон прямоугольника мы заключаем, что естественно предположить, что корни искомого полинома лежат на действительной оси, и поэтому он имеет вид

$$Q(d,z)=\frac{(z-a-d)(z-a+d)}{a^2-d^2},$$

где $2d$ – расстояние между корнями. Раскрывая скобки и производя замену $t=\frac{1}{a^2-d^2}$ мы получаем выражение

$$Q(t,z)=1-2atz+tz^2 \tag{8}$$

(содержащее один неизвестный параметр $t$), которое более удобно для проведения вычислений.

Итак, требуется минимизировать функционал

$$\int\limits_\Gamma |Q(t,z)|^4\,d\Gamma.$$

Его производная равна

$$\frac{1}{16}\frac{d}{dt}\int\limits_\Gamma |Q(t,z)|^4\,d\Gamma = b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3, \tag{9}$$

где

$$
\begin{gathered}
b_0 = -ha^2 + h\omega^2 - \tfrac{1}{3}h^3 - \omega a^2 + \tfrac{1}{3}\omega^3 - \omega h^2. \\
b_1 = -\tfrac{2}{3}\omega^2 h^3 - 6a^2\omega^2 h + 2a^2h^3 + 3a^4h + 3\omega^4 h + \tfrac{3}{5}h^5 - \tfrac{2}{3}\omega^3h^2 - \\
-2a^2\omega^3 + 6a^2\omega h^2 + 3a^4\omega + \tfrac{3}{5}\omega^5 + 3\omega h^4. \\
b_2 = \omega^4h^3 - \tfrac{3}{5}\omega^2h^5 - \tfrac{9}{5}a^2h^5 - 3a^6h - 3a^4h^3 + 3\omega^6 h + 9a^4\omega^2 h - \\
-9\omega^4a^2h + 2a^2\omega^2h^3 - \tfrac{3}{7}h^7 + 2a^2\omega^3h^2 - 3\omega h^6 - 3a^6\omega + 3a^4\omega^3 + \\
+\tfrac{3}{5}\omega^5h^2 - \omega^3h^4 - \tfrac{9}{5}a^2\omega^5 + \tfrac{3}{7}\omega^7 - 9a^4\omega h^2 - 9a^2\omega h^4. \\
b_3 = \tfrac{4}{3}a^2\omega^3h^4 + \tfrac{6}{5}a^4h^5 + \tfrac{4}{3}\omega^6h^3 + \tfrac{6}{5}\omega^4h^5 + \tfrac{4}{7}a^2h^7 + \tfrac{4}{3}a^6h^3 + \tfrac{4}{7}\omega^2h^7 + 6a^4\omega^4h - \\
-4a^6\omega^2h - 4a^2\omega^6h + \tfrac{4}{5}a^2\omega^2h^5 - \tfrac{4}{3}a^4\omega^2h^3 - \tfrac{4}{3}a^2\omega^4h^3 + \tfrac{1}{9}h^9 + a^8h + \omega^8h - \tfrac{4}{7}a^2\omega^7 + \\
+\omega h^8 + \tfrac{6}{5}\omega^5h^4 + \tfrac{6}{5}a^4\omega^5 + \tfrac{4}{3}\omega^3h^6 - \tfrac{4}{3}a^6\omega^3 + \tfrac{4}{7}\omega^7h^2 + \tfrac{1}{9}\omega^9 + 4\omega h^2a^6 + \\
+4a^2\omega h^6 - \tfrac{4}{5}a^2\omega^5h^2 - \tfrac{4}{3}a^4\omega^3h^2 + 6a^4\omega h^4 + \omega a^8.
\end{gathered}
$$

Подставляя заданные параметры $a = 6$, $\omega = 3$ и $h = 1$ в эти формулы мы видим (вспоминая (9)), что уравнение

$$b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 = 0$$

приобретает вид

$$-2069,33 + 204134t - 6814820t^2 - 76869000t^3 = 0$$

и его решение $-t_\bullet = 0,03106$. Поэтому (8) дает

$$Q(t_\bullet, z) = 1 - 0.37279z + 0,03106z^2,$$

что является хорошей аппроксимацией для (7).

Прямоугольник в комплексной плоскости является удобной областью локализации спектра оператора и поэтому столь важно (имея ввиду приложения теории экстремальных полиномов к конструированию итерационных процессов высоких порядков) находить томные формулы для экстремальных полиномов в таких областях. Оставшаяся часть статьи посвящена этой проблеме.

## 2. Экстремальные полиномы первой степени комплексного аргумента, заданные на прямоугольнике

Изучение точных экстремальных полиномов на прямоугольниках мы начнем с вопроса о нахождении экстремального полинома вида

$$P(z) = 1 + \zeta z,$$

заданного па прямоугольнике $D$ с вершинами в точках

$$z_1 = a + ib_1,\ z_2 = a + ib_2,\ z_3 = a + 2\omega + ib_2,\ z_4 = a + 2\omega + ib_1\ (0 < a, b_1 < b_2).$$

**Теорема 2.** *Если выполнено условие*

$$a \leqslant \operatorname{Re} z_3 \leqslant \operatorname{Re} z_1 + 2\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{|z_1||z_2|(|z_1|+|z_2|)}{\overline{z}_1|z_2|+\overline{z}_2|z_1|}\right] - \operatorname{Re} z_1\right\}, \tag{10}$$

*то*

$$\zeta_* = -\frac{\overline{z}_1|z_2|+\overline{z}_2|z_1|}{|z_1||z_2|(|z_1|+|z_2|)},$$

*при этом* $\|P_*\| = \frac{|z_1-z_2|}{|z_1|+|z_2|}$.

*Если*

$$0 \leqslant \operatorname{Im} z_4 \leqslant \operatorname{Im} z_1 + 2\left\{\operatorname{Im}\left[\frac{|z_1||z_4|(|z_1|+|z_4|)}{\overline{z}_1|z_4|+\overline{z}_4|z_1|}\right] - \operatorname{Im} z_1\right\}, \tag{11}$$

*то*

$$\zeta_* = -\frac{\overline{z}_1|z_4|+\overline{z}_4|z_1|}{|z_1||z_4|(|z_1|+|z_4|)},$$

*при этом* $\|P_*\| = \frac{|z_1-z_4|}{|z_1|+|z_4|}$.

*Если же не выполнены оба условия (10) и (11), то*

$$P_*(z) = 1 - \frac{2z}{z_1+z_3} = 1 - \frac{2z}{z_2+z_4};\ \|P_*\| = \left|\frac{z_3-z_1}{z_3+z_1}\right| = \left|\frac{z_4-z_2}{z_4+z_2}\right|. \tag{12}$$

**Доказательство.** Условие (10) означает, что прямоугольник $D$ полностью расположен внутри окружности, являющейся линией уровня экстремального полинома, построенного для отрезка $[z_1, z_2]$. Условие (11) означает, что прямоугольник $D$ полностью расположен внутри окружности, являющейся линией уровня экстремального полинома, построенного для отрезка $[z_1, z_4]$.

Если не выполняется случай, когда прямоугольник $D$ лежит внутри одной из окружностей, то экстремальным является полином с линией уровня, имеющей центр в центре прямоугольника. В этом случае функционал $\mu = (\lambda_1, \lambda_2)$ является решением системы уравнений

$$\lambda_1 \operatorname{Re}\left[\left(1 - \frac{2z_1}{z_1+z_3}\right)\overline{z}_1\right] + \lambda_2 \operatorname{Re}\left[\left(1 - \frac{2z_3}{z_1+z_3}\right)\overline{z}_3\right] = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Решение данной системы записывается короче, если считать, что

$$z_1 = u - w + (v-h)i, \quad z_3 = u + w + (v+h)i;$$

где $z_0 = u + vi$ – центр прямоугольника. В этом случае

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\frac{2uvh + uw^2 + u^2w + uh^2 - v^2w}{2uvh + y^2v - v^2w}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\frac{2uvh - uw^2 + u^2w - uh^2 - v^2w}{2uvh + y^2v - v^2w}.\square$$

## 3. Экстремальные полиномы вида $z^2 + az + b$ комплексного аргумента, заданные на прямоугольнике с центром в нуле

В данном пункте рассматривается одно из самых естественных обобщений на комплексный случай полиномов Чебышева, т.е. задача нахождения квадратичного полинома с минимальной чебышевской нормой (экстремального полинома), заданного на прямоугольнике $D_1$ с вершинами в точках

$$z_1 = -w + hi, z_2 = w + hi, z_3 = w - hi, z_4 - w - hi \quad (w > 0, h > 0),$$

Естественным обобщением полиномов Чебышева является тот случай, когда коэффициент при $z^2$ равен единице, т.е. класс полиномов вида

$$P(z) = z^2 + a_1 z + a_0.$$

**Теорема 3.** *При выполнении неравенства $w \geqslant 2h$ экстремальным является полином*

$$P_*(z) = z^2 - \frac{w^2}{2} - h^2,$$

*при этом $\|P_*\| = \frac{w^2}{2} + 2h^2$; если $\frac{h}{2} \leqslant w < 2h$, то*

$$P_*(z) = z^2 - w^2 + h^2;\ \|P_*\| = 2wh;$$

*и, наконец, если $w < \frac{h}{2}$, то*

$$P_*(z) = z^2 + w^2 + \frac{h^2}{2}; \quad \|P_*\| = 2w^2 + \frac{h^2}{2}.$$

**Доказательство.** 1. Пусть выполнено условие $w \geqslant 2h$. Система уравнении (1.16) из [2] для полинома $Q(z) = z^2 - \frac{w^2}{2} - h^2$, рассматриваемая относительно функционала $\mu = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, примет следующий вид:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left[\lambda_1 \overline{Q}(-w+hi)(x+yi) + \lambda_2 \overline{Q}(hi)(x+yi) + \lambda_3 \overline{Q}(w+hi)(x+yi)\right] = 0, \\ \operatorname{Re}\left[\lambda_1 \overline{Q}(-w+hi)(-w+hi) + \lambda_2 \overline{Q}(hi)(hi) + \lambda_3 \overline{Q}(w+hi)(w+hi)\right] = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \lambda_j \geqslant 0 (j = 1, 2, 3). \end{cases} \tag{13}$$

В системе (13) $x + yi$ – произвольное комплексное число.

Решая систему (13) относительно $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, получаем

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{4}\frac{w^2 + 4h^2}{w^2}, \lambda_2 = \frac{1}{4}\frac{w^2 - 4h^2}{w^2}.$$

Таким образом, функционал $\mu$ с требуемыми свойствами найден.

2. Рассмотрим далее случай, когда выполняется неравенство $\frac{h}{2} \leqslant w < 2h$. Покажем, что полином $Q(z) = z^2 - w^2 + h^2$ является в этом случае экстремальным. Действительно, максимум модуля такого полинома достигается только в вершинах прямоугольника и, следовательно, система уравнений (13) будет иметь

вид

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left[\lambda_1\overline{Q}(-w+hi)(x+yi)+\lambda_2\overline{Q}(w+hi)(x+yi)\right]=0, \\ \operatorname{Re}\left[\lambda_1\overline{Q}(-w+hi)(-w+hi)+\lambda_2\overline{Q}(w+hi)(w+hi)\right]=0, \\ \lambda_1+\lambda_2=1, \lambda_j \geqslant 0(j=1,2). \end{cases} \tag{14}$$

Покажем, что решением системы (14) являются $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ Действительно, пусть $x + yi$ – произвольное комплексное число, тогда

$$\operatorname{Re}\left[\overline{Q}(-w+hi)(x+yi)+\overline{Q}(w+hi)(x+yi)\right]=4whi(x+yi)-4whi(x+yi)\equiv 0;$$

$$\operatorname{Re}\left[\overline{Q}(-w+hi)(-w+hi)+\overline{Q}(w+hi)(w+hi)\right]=-4wh^2+4wh^2\equiv 0.$$

Таким образом, и в этом случае функционал с требуемыми свойствами найден.

3. Наконец, если выполнено условие $w < \frac{h}{2}$, то полином $Q(z) = z^2 + w^2 + \frac{h^2}{2}$ является экстремальным. В этом случае система уравнений для нахождения $\mu$ принимает следующий вид

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[\lambda_1\overline{Q}(-w+hi)(x+yi)+\lambda_2\overline{Q}(-w)(x+yi)+ \\ +\lambda_3\overline{Q}(w+hi)(x+yi)+\lambda_4\overline{Q}(w)(x+yi)]=0, \\ \operatorname{Re}[\lambda_1\overline{Q}(-w+hi)(-w+hi)+\lambda_2\overline{Q}(-w)(-w)+ \\ +\lambda_3\overline{Q}(w+hi)(w+hi)+\lambda_4\overline{Q}(w)(w)]=0, \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1, \lambda_j \geqslant 0(j=1,2,3,4) \end{cases} \tag{15}$$

Выбирая интересующее нас решение $\lambda_j, (j = 1, 2, 3, 4)$ получаем, что

$$\lambda_1=\lambda_3=\frac{h^2+4w^2}{4h^2}; \lambda_2=\lambda_4=\frac{h^2-4w^2}{4h^2}. \square$$

## 4. **Экстремальные полиномы высоких порядков**

В действительности метод приближенного построения экстремальных полиномов, описанный выше может быть также использован, как ориентир для последующего нахождения явных формул для точного построения экстремальных полиномов высоких порядков. Это и является предметом исследования данного пункта. Например, полином третьей степени с фиксированным коэффициентом, равным единице, при $z^3$ на прямоугольнике $\{-w \leqslant x \leqslant w, -h \leqslant y \leqslant h\}$ следовало бы искать в виде

$$P_3 = (x+iy)^3 + (c+id)(x+iy)^2 + (a+ib)(x+iy).$$

Слагаемое $a_0 + ib_0$ отсутствует, так как явным образом нарушает симметрию (например, при горизонтальном расположении корней $P_3 = (z-z_1)(z-z_2)z$); причем интегрирование по контуру даже квадрата модуля такого полинома приводит к тому, что $b = c = d = 0$.

Это подсказывает нам, что в случае, когда $w = h = 1$, необходимо искать полином с минимальной чебышевской нормой в виде $P_3(z) = z^3$(как показано в приводимой ниже теореме 4 это действительно верно). Аналогичные вычисления, проведенные для полиномов от четвертой до шестой степени, подсказывают нам вид соответствующих полиномов. Явные формулы для них получены в теореме 4.

Рассмотрим следующую задачу: на квадрате $D$ с вершинами в точках

$$z_1 = -1 + i, z_3 = 1 + i, z_5 = 1 - i, z_7 = -1 - i$$

найти полиномы с минимальной чебышевской нормой при условии, что коэффициент перед $z^n$ равен единице. В теореме 4 найдены такие полиномы до шестой степени включительно. Для всех полиномов доказательство проводится по единой схеме: находится функционал $\mu$ удовлетворяющий условиям теоремы 1.5 из [2]

Обозначим

$$z_2 = i, z_4 = 1, z_6 = -i, z_8 = -1.$$

**Теорема 4.** *Экстремальными на квадрате $D$ являются следующие полиномы*

$$P_1 = z,\ P_2 = z^2,\ P_3 = z^3,\ P_4 = z^4 + \frac{3}{2},\ P_5 = z^5 + (9 - 5\sqrt{2})z,\ P_6 = z^6 + \frac{7}{3}z^2.$$

**Доказательство.** Экстремальность полинома $P_1$ очевидна. Докажем экстремальность полинома $P_2$. Доказательство проведем с помощью явного указания функционала $\mu$. Так как $\overline{P_2}(z_1) = 2i, \overline{P_2}(z_3) = -2i$ то функционал $\mu$ удовлетворяющий условию теоремы 1.5 из [2] можно определить следующим образом:

$$\langle \mu, g \rangle = \frac{i}{2} g(z_1) - \frac{i}{2} g(z_2),$$

где $g$ — произвольный полином. Здесь в качестве банахова пространства $E$ можно взять банахово пространство всех полиномов степени $\leqslant 3$, а в качестве подпространства $G$ – множество всех полиномов степени $\leqslant 2$. Тогда если $c = x + yi$ – произвольная комплексная константа, то

$$\mathrm{Re}\langle \mu, c \rangle = \mathrm{Re}\left[\frac{i}{2}(x + yi) - \frac{i}{2}(x + yi)\right] = 0;$$

$$\mathrm{Re}\langle \mu, z \rangle = \mathrm{Re}\left[\frac{i}{2}(-1 + i) - \frac{i}{2}(1 + i)\right] = 0;$$

$$\mathrm{Re}\langle \mu, z^2 \rangle = \mathrm{Re}\left[\frac{i}{2}(-2i) - \frac{i}{2}(2i)\right] = \mathrm{Re}(1 + i) = 2 = \|z^2\|.$$

Экстремальность полинома $P_2$ следует, таким образом, из теоремы 1.5 из [2]. Проведем аналогичные построения для полинома $P_3$. Так как

$$\overline{P_3}(z_1) = 2 - 2i, \overline{P_3}(z_3) = -2 - 2i, \overline{P_3}(z_5) = -2 + 2i, \overline{P_3}(z_7) = 2 + 2i,$$

то определим функционал $\mu$ следующим образом

$$\langle \mu, g \rangle = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) g(z_1) + \tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) g(z_2) + \\ + \tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) g(z_3) + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) g(z_4).$$

Тогда

$$\begin{gathered}
\operatorname{Re}\langle\mu, c\rangle = \operatorname{Re}\Big\{\tfrac{1}{4}\Big[\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{i}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{i}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{i}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{i}{\sqrt{2}}\Big](x+yi)\Big\} = 0;\\
\operatorname{Re}\langle\mu, z\rangle = \tfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{Re}\big\{(1-i)(-1+i) + (-1-i)(1+i) + (-1+i)(1-i) +\\
+(1+i)(-1-i)\big\} = 0;\\
\operatorname{Re}\langle\mu, z^2\rangle = \tfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{Re}\big\{(1-i)(-1+i)^2 + (-1-i)(1+i)^2 + (-1+i)(1-i)^2 +\\
+(1+i)(-1-i)^2\big\} = 0;\\
\operatorname{Re}\langle\mu, z^3\rangle = \tfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{Re}\big\{(1-i)(-1+i)^3 + (-1-i)(1+i)^3 + (-1+i)(1-i)^3 +\\
+(1+i)(-1-i)^3\big\} = \tfrac{16}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = \|z^3\|.
\end{gathered}$$

Экстремальность полинома $P_3$ доказана.

Для доказательства экстремальности $P_4$ полинома определим функционал $\mu$ следующим образом

$$\langle\mu, g\rangle = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{P}_4}{\|P_4\|}g(z_k),$$

тогда (так как $\|P_4\| = \frac{5}{2}$) получаем

$$\operatorname{Re}\langle\mu, c\rangle = \frac{1}{20}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{8}(-1)^k\frac{5}{2}(x+yi) = 0;$$

$$\operatorname{Re}\langle\mu, z\rangle = \frac{1}{8}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{8}(-1)^k z_k = 0;$$

$$\operatorname{Re}\langle\mu, z^2\rangle = \frac{1}{8}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{8}(-1)^k z_k^2 = 0;$$

$$\operatorname{Re}\langle\mu, z^3\rangle = \frac{1}{8}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{8}(-1)^k z_k^3 = 0;$$

$$\operatorname{Re}\langle\mu, z^4\rangle = \frac{1}{8}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{8}(-1)^k z_k^4 = \frac{20}{8} = \|P_4\|.$$

Экстремальность полинома $P_5$ устанавливается аналогично, но вычисления становятся более громоздкими. Действительно,

$$\begin{gathered}
\overline{P}_5(z_1) = 5[\sqrt{2} - 1 + (\sqrt{2}-1)i];\\
\overline{P}_5(z_2) = -5(2-\sqrt{2})i;\\
\overline{P}_5(z_3) = -5(\sqrt{2}-1) + 5(\sqrt{2}-1)i;\\
\overline{P}_5(z_4) = 10 - 5\sqrt{2};\\
\overline{P}_5(z_5) = -5[\sqrt{2} - 1 - (\sqrt{2}-1)i];\\
\overline{P}_5(z_6) = (10 - 5\sqrt{2})i;
\end{gathered}$$

$$\overline{P}_5(z_7) = 5[\sqrt{2} - (\sqrt{2}-1)i];$$
$$\overline{P}_5(z_8) = -10 + 5\sqrt{2}.$$

Пусть далее

$$h_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{4},\ h_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{4},\ h_3 = \frac{3-2\sqrt{2}}{4},\ h_4 = \frac{2-\sqrt{2}}{4},$$
$$h_5 = \frac{4\sqrt{2}-5}{4},\ h_6 = \frac{5-3\sqrt{2}}{4},\ h_7 = \frac{\sqrt{2}-1}{4},\ h_8 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Определим функционал $\mu$ следующим образом:

$$\langle \mu, g\rangle = \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{8} h_k \overline{P}_5(z_k) g(z_k),$$

тогда

$$\mathrm{Re}\langle \mu, c\rangle = \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{8} h_k \overline{P}_5(z_k)(x+iy) = 0;$$

$$\mathrm{Re}\langle \mu, z\rangle = \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{8} h_k \overline{P}_5(z_k) z_k = 0;$$

$$\mathrm{Re}\langle \mu, z^2\rangle = \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{8} h_k \overline{P}_5(z_k) z_k^2 = 0;$$

$$\mathrm{Re}\langle \mu, z^3\rangle = \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{8} h_k \overline{P}_5(z_k) z_k^3 = 0;$$

$$\mathrm{Re}\langle \mu, z^4\rangle = \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{8} h_k \overline{P}_5(z_k) z_k^4 = 0;$$

$$\mathrm{Re}\langle \mu, z^5\rangle = \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{8} h_k \overline{P}_5(z_k) z_k^5 = 10-5\sqrt{2} = \|P_5\|.$$

Предыдущие равенства доказывают экстемальность полинома $P_5$. Для доказательства экстремальности полинома $P_6$ положим

$$h_1 = h_3 = h_5 = h_6 = h_7 = \frac{1}{12},\ h_2 = \frac{1}{4},\ h_4 = h_8 = \frac{1}{6},$$

тогда

$$\langle \mu, g\rangle = \frac{3}{10} \sum_{k=1}^{8} h_k \overline{P}_6(z_k) g(z_k)$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Re}\langle \mu, c\rangle = \frac{3}{10} \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{8} h_k \overline{P}_6(z_k)(x+iy) = 0;$$

$$\mathrm{Re}\langle\mu, z^m\rangle = \frac{3}{10}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{8} h_k\overline{P}_6(z_k)z_k^m = 0,\ (m = 1, 2, \ldots, 5);$$

$$\mathrm{Re}\langle\mu, z^6\rangle = \frac{3}{10}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{8} h_k\overline{P}_6(z_k)z_k^6 = \frac{10}{3} = \|P_6\|.\square$$

**Замечание 2.** Отметим, что при проведении аналогичного доказательства для полинома седьмой степени возникают дополнительные трудности. Дело в том, что коэффициенты систем линейных уравнений теоремы 1.5 из [2] находились по отношению к известным точкам $z_k$, $k = 1, \ldots, 8$ а экстремальные точки «подозрительного» на экстремальность полинома $P_7$ требуют точного решения алгебраического уравнения тринадцатой степени (производная от квадрата модуля полинома $P_7$ приравнивается к нулю).

## Заключение

В статье предложен метод нахождения приближенных экстремальных полиномов в *произвольных* комплексных областях со спрямляемой границей. Дана оценка скорости сходимости данного метода. Найдены явные формулы для экстремальных полиномов до 6-го порядка н прямоугольных областях.

## Список литературы

1. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. - Москва: Наука. - 1969. - 205 с.
2. Трубников Ю.В. Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями. - Москва: Астропресс-XXI. - 2002. - 256 с.
3. Либ Э., Лосс М. Анализ. - Новосибирск: Научная книга. - 1998. - 243 с.
4. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. - Москва: Наука. - 1977. - 248 с.
5. Чеботарев И.Г. Собрание сочинений, Т.2. - Москва-Ленинград: Изд-во АН СССР. - 1949. - 322 с.