**УДК 519.21**

# ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ЯДРА В НАБЛЮДЕНИЯХ ПРИ ИЗВЕСТНЫХ СОСТОЯНИЯХ И ПРОИЗВОДНЫХ СИСТЕМЫ

**Наконечный А.Г.**

Киевский национальний университет им. Т.Г. Шевченко,
факультет кибернетики,
пр-т Академика Глункова, 2, корпус 6, Киев, Украина
e-mail: *nakonechniy@unicyb.kiev.ua*

**Марценюк В.П.**

Тернопольская государственная медицинская академия,
кафедра медицинской информатики,
площадь Воли, 1, Тернополь, Украина
e-mail: *marceniuk@yahoo.com*

**Abstract.**

In this work we consider identification problem if we have some observations of the system including some unknown integral kernel, its known state and may be its derivative $y(t) = \int_0^t K(t-s)x(s)ds + f_2(t)$. Assuming differentiability of integral kernel $K(s) \in R^{m\times n}$ and quadratic constrains we obtained a posteriori estimate of integral kernel, a posteriori set and error. Also we consider the case of unknown restrictions for initial value of integral kernel. All results are presented in the form including solutions of adjoint systems and eigenvalues of some linear operators.

## Введение и постановка задачи

При построении моделей ряда процессов в биологии и медицине [1]-[3] сталкиваются с системами, включающими непрерывно распределенное запаздывание в наблюдениях. Общие методы идентификации систем такого рода разрабатывались в работах [4, 5]. Так в [4] предложены методы оценивания в Гильбертовых пространствах. В работах [2, 3] вид интегрального ядра выбирается исходя из биологических соображений и экспериментальных данных. Таким образом, существует потребность в некоторых универсальных методах построения оценок интегрального ядра, гарантирующих их оптимальность в определенном смысле. В данном исследовании реализован подход оценивания интегрального ядра как Чебышевского центра, т.е. центра симметрии апостериорного множества.

В работе мы рассматриваем случай, когда имеем некоторые наблюдения $y(t) \in R^m$, $t \in [0, T]$ вида:

$$y(t) = \int_0^t K(t-s)x(s)ds + f_2(t), \tag{1}$$

где $f_2(t) \in C[[0, T], R^m]$ – неизвестные ошибки, $K(s) \in R^{m\times n}$, $s \in [0, T]$ – неизвестная матричная функция, состоящая из непрерывно дифференцируемых элементов.

Следующие результаты будут основаны на предположении, что

$$\begin{cases} dK(s)/ds = F_1(s), \\ K(0) = K_0 \end{cases} \tag{2}$$

где $F_1(s) \in L_2[[0,T], R^{m\times n}]$ – неизвестная матричнозначная функция, $K_0 \in R^{m\times n}$ – неизвестная постоянная матрица. Далее будем использовать обозначение $K(F_1, K_0)(s)$ для решения (2).

Значения $f_2$, $F_1$, $K_0$ ограничены неравенствами

$$\int\limits_0^T (Q_2, f_2, f_2)dt + \gamma^2 sp \int\limits_0^T F_1(t)F_1^T(t)dt + \beta^2 sp K_0 K_0^T \leqslant 1, \tag{3}$$

задающими априорное множество. Здесь $Q_2 \in R^{m\times m}$, $\gamma$, $\beta$ – известные положительно-определенная матрица и положительные константы соответственно.

*Целью работы является нахождение апостериорной оценки интегрального ядра $K(s)$, апостериорного множества $G_y$ и апостериорной погрешности $\sigma$.*

Найдем сначала апостериорные оценки $K_0$ и $F_1(s)$.

**Утверждение 1.** Апостериорные оценки $K_0$ и $F_1(s)$ по наблюдениям (1) могут быть вычислены как

$$\hat{K}_0 = \frac{1}{\beta^2}\psi^T(0), \tag{4}$$

$$\hat{F}_1(s) = \frac{1}{\gamma^2}\psi^T(s), \tag{5}$$

где $\psi \in C^1[[0,T], R^{m\times n}]$ – матрица, являющаяся решением начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{d\psi(s)}{ds} = \int_s^T Q\left[y(t) - \int_0^T [\hat{K}_0 + \int_0^{t-s_1} \hat{F}_1(s_3)ds_3]x(s_1)ds_1\right] x^T(t-s)dt, \\ \psi(T) = O \end{cases} \tag{6}$$

$O$ – нуль-матрица.

**Доказательство.** Рассмотрим производную Гато функционала $J(F_1, K_0)$, где $G(s) \in L_2[[0,T], R^{m\times n}]$ – матричнозначная функция, $L \in R^{m\times n}$ – постоянная матрица.

$$\left.\frac{d}{d\tau} J(F_1 + \tau G, K_0 + \tau L)\right|_{\tau=0} =$$

$$= -2\int\limits_0^T \left( Q_2[y(t) - \int\limits_0^t K(F_1,K_0)(t-s)x(s)ds], \int\limits_0^t K(G,L)(t-s)x(s)ds \right) dt + \tag{7}$$

$$+2\gamma^2 sp \int\limits_0^T F_1(t)G^T(t)dt + 2\beta^2 sp K_0 L^T.$$

Изменяя в (7) порядок интегрирования, получаем

$$\frac{d}{d\tau}J(F_1+\tau G, K_0+\tau L)\bigg|_{\tau=0} =$$

$$= 2\int\limits_0^T\int\limits_s^T \left( K^T(G,L)(s)Q_2[y(t) - \int\limits_0^t K(F_1,K_0)(t-s_1)x(s_1)ds_1], x(t-s)\right) dtds+$$

$$+2\gamma^2 sp\int\limits_0^T F_1(t)G^T(t)dt + 2\beta^2 spK_0L^T = \tag{8}$$

$$2sp\int\limits_0^T K^T(G,L)(s)\int\limits_0^T Q_2\left[y(t) - \int\limits_0^t K(F_1,K_0)(t-s_1)x(s_1)ds_1\right] x^T(t-s)dtds+$$

$$+2\gamma^2 sp\int\limits_0^T F_1(t)G^T(t)dt + 2\beta^2 spK_0L^T.$$

Введем матричную функцию $\psi(s)$ как решение начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{d\psi(s)}{ds} = \int_s^T Q_2\left[y(t) - \int_0^T K(F_1,K_0)(t-s_1)x(s_1)ds_1\right] x^T(t-s)dt, \\ \psi(T) = O \end{cases} \tag{9}$$

Как следует из (8) и (9)

$$\frac{d}{d\tau}J(F_1+\tau G, K_0+\tau L)\bigg|_{\tau=0} = 2spK^T(G,L)(T)\psi(T) - 2spK^T(G,L)(0)\psi(0) -$$

$$-2sp\int\limits_0^T G(s)\psi(s)ds + 2\gamma^2 sp\int\limits_0^T F_1(t)G^T(t)dt + 2\beta^2 spK_0L^T. \tag{10}$$

Наконец мы заключаем, что $\frac{d}{d\tau}J(F_1+\tau G, K_0+\tau L)\bigg|_{\tau=0} = 0$ только в том случае, когда имеет место (5).

**Теорема 1.** *Апостериорное множество для задачи* (1)-(3) *может быть описано как*

$$G_y = \left\{ (F_1,K_0) \in L_2([0,T],R^{m\times n}) \times R^{m\times n} : \left( \mathcal{P}\begin{pmatrix} F_1-\hat{F}_1 \\ K_0-\hat{K}_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_1-\hat{F}_1 \\ K_0-\hat{K}_0 \end{pmatrix} \right) \leqslant 1-\alpha \right\}, \tag{11}$$

*где* $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(L_2([0,T],R^{m\times n}) \times R^{m\times n}, L_2([0,T],R^{m\times n}) \times R^{m\times n})$ *– некоторый положительно определенный оператор,* $\hat{F}_1$, $\hat{K}_0$ *– заданы* (5), $\alpha : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *– константа, определенная как*

$$\alpha = J(\hat{F}_1,\hat{K}_0) = \int\limits_0^T \left( Q_2(y(t) - \int\limits_0^t K(\hat{F}_1)(t-s)x(s)ds), y(t) - \int\limits_0^t K(\hat{F}_1)(t-s)x(s)ds \right) dt +$$

$$+\gamma^2 sp \int\limits_0^T \hat{F}_1(t)\hat{F}_1^T(t)dt + \beta^2 sp\hat{K}_0\hat{K}_0^T. \tag{12}$$

**Доказательство.** Используем разложение $J(F_1,K_0)$ в ряд Тейлора

$$J(F_1,K_0) = J(\hat{F}_1,\hat{K}_0) + \left( J'(\hat{F}_1,\hat{K}_0), \begin{pmatrix} F_1-\hat{F}_1 \\ K_0-\hat{K}_0 \end{pmatrix} \right)_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}} +$$

$$+\frac{1}{2}\left( J''(\hat{F}_1,\hat{K}_0)\begin{pmatrix} F_1-\hat{F}_1 \\ K_0-\hat{K}_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_1-\hat{F}_1 \\ K_0-\hat{K}_0 \end{pmatrix} \right)_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}}.$$

Здесь введено скалярное произведение для произвольных $F_1, F_2 \in L_2([0,T],R^{m\times n})$ и $K_1, K_2 \in R^{m\times n}$

$$\left( \begin{pmatrix} F_1 \\ K_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_2 \\ K_2 \end{pmatrix} \right)_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}} = \int\limits_0^T spF_1(s)F_2^T(s)ds + spK_1K_2^T.$$

Поскольку $J'(\hat{F}_1,\hat{K}_0) = 0$, то для апостериорного множества получаем, что

$$J(F_1,K_0) = \alpha + \frac{1}{2}\left( J''(\hat{F}_1,\hat{K}_0)\begin{pmatrix} F_1-\hat{F}_1 \\ K_0-\hat{K}_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_1-\hat{F}_1 \\ K_0-\hat{K}_0 \end{pmatrix} \right) \leqslant 1. \tag{13}$$

Вычислим

$$\frac{d^2}{d\tau^2} J(F_1+\tau G, K_0+\tau L)|_{\tau=0} = 2\int\limits_0^T \left( Q_2 \int\limits_0^t K(G,L)(t-s)x(s)ds, \int\limits_0^t K(G,L)(t-s)x(s)ds \right) dt +$$

$$+2\gamma^2 sp \int\limits_0^T G(t)G^T(t)dt + 2\beta^2 spLL^T. \tag{14}$$

Отсюда,

$$G_y = \left\{ \begin{array}{l} (F_1, K_0) \in L_2([0,T], R^{m\times n}) \times R^{m\times n} : \\ \int_0^T (Q_2 \int_0^t [K_0 - \hat{K}_0 + \int_0^{t-s} (F_1(s_1) - \hat{F}_1(s_1)) ds_1] x(s) ds, \\ \int_0^t [K_0 - \hat{K}_0 + \int_0^{t-s} (F_1(s_1) - \hat{F}_1(s_1)) ds_1] x(s) ds) dt + \\ +\gamma^2 sp \int_0^T (F_1(t) - \hat{F}_1(t))(F_1(t) - \hat{F}_1(t))^T dt + \beta^2 sp (K_0 - \hat{K}_0)(K_0 - \hat{K}_0)^T \leqslant \\ \leqslant 1 - \alpha \end{array} \right\} \tag{15}$$

Применяя в (15) смену порядка интегрирования, получаем

$$G_y = \left\{ \begin{array}{l} (F_1, K_0) \in L_2([0,T], R^{m\times n}) \times R^{m\times n} : \\ sp \int_0^T \int_s^T \int_{s_2}^T [K_0 - \hat{K}_0 + \int_0^s (F_1(s_1) - \hat{F}_1(s_1)) ds_1] Q_2 \int_0^t [K_0 - \hat{K}_0 + \\ + \int_0^{s_2} (F_1(s_1) - \hat{F}_1(s_1)) ds_1] x(t - s_2) x^T (t - s) dt ds_2 ds + \\ +\gamma^2 sp \int_0^T (F_1(t) - \hat{F}_1(t))(F_1(t) - \hat{F}_1(t))^T dt + \beta^2 sp (K_0 - \hat{K}_0)(K_0 - \hat{K}_0)^T \leqslant \\ \leqslant 1 - \alpha \end{array} \right\} \tag{16}$$

Учитывая левую сторону неравенства в (16) видим, что существует линейный положительно определенный оператор $\mathcal{P}$, удовлетворяющий представлению (11).

**Замечание 1.** Апостериорное множество $G_y$ (11) является симметрическим относительно $(\hat{F}_1, \hat{K}_0)$. Таким образом, вместе с $G_y$ будем использовать множество $\widetilde{G}_y$, симметричное относительно $(O, O)$, где $O$ – нуль-матрица, т.е.

$$\widetilde{G}_y = \left\{ (\widetilde{F}_1, \widetilde{K}_0) \in L_2([0,T], R^{m\times n}) \times R^{m\times n} : \left( \mathcal{P} \begin{pmatrix} \widetilde{F}_1 \\ \widetilde{K}_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widetilde{F}_1 \\ \widetilde{K}_0 \end{pmatrix} \right) \leqslant 1 - \alpha \right\}. \tag{17}$$

Следующей нашей *целью является нахождение апостериорного множества задачи* (1)-(3) *для интегрального ядра* $K(s)$.

**Определение 1.** Апостериорным множеством задачи (1)-(3) для интегрального ядра $K(s)$ называется

$$G_K = K(\bullet) \in L_2([0,T], R^{m\times n}) : J(F_1, K_0) \leqslant 1.$$

**Теорема 2.** *Апостериорное множество задачи* (1)-(3) *может быть описано как*

$$G_K = \{ K(\bullet) \in L_2([0,T], R^{m\times n}) : (S^{-1}(K - \hat{K}), (K - \hat{K}))^{1/2} \leqslant (1 - \alpha)^{1/2} \}, \tag{18}$$

*где* $S \in \mathcal{L}(L_2([0,T], R^{m\times n}), L_2([0,T], R^{m\times n}))$ *— некоторый положительно определенный линейный оператор,* $\hat{K}(s)$ *– задается* (4), $\alpha : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *– константа, определенная в* (12).

**Доказательство.** Так как $G_K$ – выпуклое ограниченное замкнутое множество, то $K(s) \in G_K$ тогда и только тогда, когда

$$\inf_{(F_1,K_0)\in G_y} \int\limits_0^T spC(s)K^T(s)ds \leqslant \int\limits_0^T C(s)K^T(s)ds \leqslant \sup_{(F_1,K_0)\in G_y} \int\limits_0^T C(s)K^T(s)ds \tag{19}$$

для любого $C(s) \in L_2([0,T], R^{m\times n})$. Обозначим

$$\Phi(K) = \int\limits_0^T (C(s), K(s))ds$$

и

$$\widetilde{F}_1 = F_1 - \hat{F}_1, \quad \widetilde{K}_0 = K_0 - \hat{K}_0. \tag{20}$$

Отсюда

$$\widetilde{K} = K(\widetilde{F}_1, \widetilde{K}_0) = K(F_1, K_0) - K(\hat{F}_1, \hat{K}_0)$$

и

$$\Phi(K) = \Phi(\widetilde{K}) + \Phi(\hat{K}). \tag{21}$$

Таким образом

$$\inf_{G_y}[\Phi(\widetilde{K}) + \Phi(\hat{K})] \leqslant \Phi(K) \leqslant \sup_{G_y}[\Phi(\widetilde{K}) + \Phi(\hat{K})]$$

и

$$\inf_{G_y} \Phi(\widetilde{K}) \leqslant \Phi(K) - \Phi(\hat{K}) \leqslant \sup_{G_y} \Phi(\widetilde{K}).$$

Здесь $\widetilde{G}_y$ – введен в (17). Отметим, что $\widetilde{G}_y$ – симметричное относительно $(O,O)$. Следовательно, $\sup_{\widetilde{G}_y} \Phi(\widetilde{K}) = -\inf_{\widetilde{G}_y} \Phi(\widetilde{K})$ и

$$|\Phi(K) - \Phi(\hat{K})| \leqslant \sup_{\widetilde{G}_y} \Phi(\widetilde{K}),$$

то есть

$$\frac{|\Phi(K) - \Phi(\hat{K})|}{\sup_{\widetilde{G}_y} \Phi(\widetilde{K})} \leqslant 1.$$

Отсюда

$$\sup_{l\in L_2([0,T],R^{m\times n})} \frac{|\Phi(K) - \Phi(\hat{K})|}{\sup_{\widetilde{G}_y} \Phi(\widetilde{K})} \leqslant 1. \tag{22}$$

Теперь оценим $\Phi(\widetilde{K})$ при $\widetilde{K} : (F_1, \widetilde{K}_0) \in \widetilde{G}_y$. Введем матрицу $Z(t) \in R^{m\times n}$ как решение задачи

$$\begin{cases} -\frac{dZ(t)}{dt} = C(t), \quad t < T, \\ z(T) = 0 \end{cases} \tag{23}$$

Тогда

$$\Phi(\overline{K}) = \int\limits_0^T spC(t)\widetilde{K}^T(t)dt = \int\limits_0^T sp\left(-\frac{dZ}{dt}\widetilde{K}^T(t)\right)dt = spZ(0)\widetilde{K}_0^T + \int\limits_0^T spZ(t)\widetilde{F}_1^T(t)dt \tag{24}$$

Применяя в (24) обобщенное неравенство Коши-Буняковского имеем

$$\Phi(\overline{K}) \leqslant \left((1-\alpha)\mathcal{P}^{-1}\begin{pmatrix} Z(\bullet) \\ Z(0)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z(\bullet) \\ Z(0)\end{pmatrix}\right)^{1/2}_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}} \cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{1-\alpha}\mathcal{P}\begin{pmatrix} \widetilde{F_1}(\bullet) \\ \widetilde{K}_0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widetilde{F_1}(\bullet) \\ \widetilde{K}_0\end{pmatrix}\right)^{1/2}_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}} \tag{25}$$

Поскольку

$$\sup_{\bar{G}_y}\left(\frac{1}{1-\alpha}\mathcal{P}\begin{pmatrix} \widetilde{F_1}(\bullet) \\ \widetilde{K}_0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widetilde{F_1}(\bullet) \\ \widetilde{K}_0\end{pmatrix}\right)^{1/2}_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}} = 1,$$

то

$$\sup_{\bar{G}_y}\Phi(\tilde{K}) = \left((1-\alpha)\mathcal{P}^{-1}\begin{pmatrix} Z(\bullet) \\ Z(0)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z(\bullet) \\ Z(0)\end{pmatrix}\right)^{1/2}_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}} \tag{26}$$

Поскольку $\left(\mathcal{P}^{-1}\begin{pmatrix} Z(\bullet) \\ Z(0)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z(\bullet) \\ Z(0)\end{pmatrix}\right)_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}}$ – квадратичный непрерывный функционал и $Z(t)$ непрерывно зависит от $C(t)$, то возможно представление

$$\left(\mathcal{P}^{-1}\begin{pmatrix} Z(\bullet) \\ Z(0)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z(\bullet) \\ Z(0)\end{pmatrix}\right)_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}} = \int\limits_0^T spSC(s)C^T(s)ds \tag{27}$$

для некоторого оператора $S : L_2([0,T], R^{m\times n}) \to L_2([0,T], R^{m\times n})$.

Применяя обобщенное неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$|\Phi(K) - \Phi(\tilde{K})| = \left|\int\limits_0^T spC(s)\tilde{K}^T(s)ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_0^T spSC(s)C^T(s)ds\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^T spS^{-1}\tilde{K}(s)\tilde{K}^T(s)ds\right)^{1/2} \tag{28}$$

Таким образом, используя (26), (27), и (28) в (22), приходим к

$$\sup_{l\in L_2([0,T],R^{m\times n})}\frac{|\Phi(K) - \Phi(\tilde{K})|}{\sup\limits_{\bar{G}_y}\Phi(\tilde{K})} =$$

$$=\frac{\left(\int_0^T spSC(s)C^T(s)ds\right)^{1/2}\left(\int_0^T spS^{-1}\tilde{K}(s)\tilde{K}^T(s)ds\right)^{1/2}}{\left((1-\alpha)\mathcal{P}^{-1}\begin{pmatrix}Z(\bullet)\\Z(0)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Z(\bullet)\\Z(0)\end{pmatrix}\right)^{1/2}_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}}}=$$

$$=\frac{\left(\int_0^T spS^{-1}\tilde{K}(s)\tilde{K}^T(s)ds\right)^{1/2}}{(1-\alpha)^{1/2}}\leqslant 1 \tag{29}$$

Значит неравенство в (18) имеет место.

**Теорема 3.** *Апостериорная погрешность* $\sigma_a^{(1)}$ *для задачи* (1)-(3) *на основе апостериорного множества* $G_y$, *заданного выражением* (11) *равна*

$$\sigma_a^{(1)}=\frac{1}{1-\alpha}\lambda_{\max}(\mathcal{P}) \tag{30}$$

**Доказательство.** Рассмотрим

$$\begin{aligned}\sigma_a^{(1)}=\sup_{F_1,K_0\in G_y}\left[\|K_0-\tilde{K}_0\|^2+\int\limits_0^T\|F_1(s)-\tilde{F}_1(s)\|^2ds\right]=\\=\sup_{(\tilde{F}_1,\tilde{K}_0)\in\tilde{G}_y}\left[\|\tilde{K}_0\|^2+\int\limits_0^T\|\tilde{F}_1(s)\|^2ds\right]\end{aligned} \tag{31}$$

Введем линейный оператор, заданный как

$$L(t)=\begin{pmatrix}L_2(\bullet)\\L_1\end{pmatrix}\in L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n} \tag{32}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_a^{(1)}=\sup_{l:\|l\|\leqslant 1}\sup_{(\tilde{F}_1,\tilde{K}_0)\in\tilde{G}_y}\left[\left(L,\begin{pmatrix}\tilde{F}_1(\bullet)\\\tilde{K}_0\end{pmatrix}\right)_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}}\right]^2=\\=\sup_{(\tilde{F}_1,\tilde{K}_0)\in\tilde{G}_y}\sup_{l:\|l\|\leqslant 1}\left[spL_1\tilde{K}_0^T+\int\limits_0^T spL_2(s),\tilde{F}_1^T(s)ds\right]^2\end{aligned} \tag{33}$$

Учитывая неравенство в (17) и применяя обобщенное неравенство Коши-Буняковского в (33), получаем

$$\sigma_a^{(1)} = \sup_{(\tilde{F}_1,\tilde{K}_0)\in\tilde{G}_y} \sup_{l:\|l\|\leqslant 1} \left[ \left( L(\bullet), \begin{pmatrix} \tilde{F}_1(\bullet) \\ \tilde{K}_0 \end{pmatrix} \right)_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}} \right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{(\tilde{F}_1,\tilde{K}_0)\in\tilde{G}_y} \sup_{l:\|l\|\leqslant 1} \left[ \left( \frac{1}{1-\alpha}\mathcal{P}L(\bullet), L(\bullet) \right)_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}} \right.$$
$$\left. \left( (1-\alpha)\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{F}_1(\bullet) \\ \tilde{K}_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{F}_1(\bullet) \\ \tilde{K}_0 \end{pmatrix} \right)_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}} \right] = \tag{34}$$
$$= \sup_{l:\|l\|\leqslant 1} \left( \frac{1}{1-\alpha}\mathcal{P}L(\bullet), L(\bullet) \right)_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}}$$
$$\sup_{(\tilde{F}_1,\tilde{K}_0)\in\tilde{G}_y} \left( (1-\alpha)\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{F}_1(\bullet) \\ \tilde{K}_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{F}_1(\bullet) \\ \tilde{K}_0 \end{pmatrix} \right)_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}}$$
$$= \frac{1}{1-\alpha}\lambda_{\max}(\mathcal{P})$$

Следует иметь в виду, что, на самом деле, в (34) мы получаем равенство, потому что неравенство Коши-Буняковского переходит в равенство, если $\|L\|_{L_2([0,T],R^{m\times n})\times R^{m\times n}} = 1$.

## Случай неизвестных ограничений на начальное значение интегрального ядра

Далее, рассмотрим случай модели (1), (2), когда у нас нет никакой информации о неизвестном значении $K_0$. Т.е. мы рассматриваем следующие ограничения

$$J(F_1,K_0) = \int_0^T \left( Q_2(y(t) - \int_0^T K(t-s)x(s)ds), y(t) - \int_0^T K(t-s)x(s)ds \right) dt +$$
$$+ \gamma^2 sp \int_0^T F_1(t)F_1^T(t)dt \leqslant 1 \tag{35}$$

**Утверждение 2.** *Апостериорные оценки для $K_0$ и $F_1(s)$ из задачи* (1), (2), (35) *могут быть вычислены как*

$$\hat{K}_0 = \int_0^T \int_s^T \left( y(t) - \int_0^t \int_0^{t-s} \hat{F}_1(s_2)ds_2 x(s_1)ds_1 \right) x^T(t-s)dtds \left( \int_0^T \int_s^T \int_0^t x(s_1)ds_1 x^T(t-s)dtds \right)^{-1} \tag{36}$$

$$\hat{F}_1(s) = -\frac{1}{\gamma^2}\psi(s), \tag{37}$$

*где* $\psi \in C^1\left[[0,T],R^{m\times n}\right]$ *– матричная функция, являющаяся решением начальной задачи*

$$\begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds} = \int_s^T Q_2\left(y(t) - \int_0^t(\hat{K}_0 + \int_0^{t-s_1}\hat{F}_1(s_2)ds_2)x(s_1)ds_1\right)x^T(t-s)dt, \\ \psi(T) = O \end{cases} \tag{38}$$

*O - нуль-матрица.*

**Доказательство.** Представим неизвестное интегральное ядро как

$$K(t) = K_0 + K_1(t) \tag{39}$$

где $K_1(t) \in C^1([0,T],R^{m\times n})$ удовлетворяет

$$\begin{cases} \frac{dK_1}{ds} = F_1(s), \\ K_1(0) = O \end{cases} \tag{40}$$

Тогда

$$\frac{d}{d\tau}J(F_1+\tau G, K_0+\tau L)\Big|_{\tau=0} =$$

$$= -2\int_0^T(Q_2(y(t)-\int_0^t(K_0+K_1(F_1,O)(t-s_1))x(s_1)ds_1),\int_0^t(K_0+K_1(G,L)(t-s))x(s)dsdt+$$

$$+\gamma^2 sp\int_0^T F_1(t)G^T(t)dt =$$

$$= 2sp\int_0^T\int_s^T(K_0^T+K_1^T(G,L)(s))Q_2(y(t)-\int_0^t(K_0+K_1(F_1,O)(t-s_1))x(s_1)ds_1)x^T(t-s)dtds+$$

$$+\gamma^2 sp\int_0^T F_1(t)G^T(t)dt =$$

$$= 2spK_0^T\int_0^T\int_s^T Q_2(y(t)-\int_0^t(K_0+K_1(F_1,O)(t-s_1))x(s_1)ds_1)x^T(t-s)dtds+$$

$$+2sp\int_0^T K_1^T(G,L)(s)\int_s^T Q_2(y(t)-\int_0^t(K_0+K_1(F_1,O)(t-s_1))x(s_1)ds_1)x^T(t-s)dtds+$$

$$2\gamma^2 sp\int_0^T F_1(t)G^T(t)dt \tag{41}$$

Введем матричную функцию $\psi(s) \in C^1([0,T], R^{m\times n})$ как решение начальной задачи

$$\begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds} = \int_s^T Q_2 \left( y(t) - \int_0^t (K_0 + K_1(F_1, O)(t-s_1))x(s_1)ds_1 \right) x^T(t-s)dt, \\ \psi(T) = O \end{cases} \tag{42}$$

и матрицу $K_0$, удовлетворяющую

$$\int_0^T \int_s^T Q_2 \left( y(t) - \int_0^t (K_0 + K_1(F_1, O)(t-s_1))x(s_1)ds_1 \right) x^T(t-s)dtds = 0, \tag{43}$$

т.е.

$$K_0 = \int_0^T \int_s^T \left( y(t) - \int_0^t K_1(F_1, O)(t-s_1)x(s_1)ds_1 \right) x^T(t-s)dtds \left( \int_0^T \int_s^T \int_0^T x(s_1)ds_1 x^T(t-s)dtds \right)^{-1}$$

Тогда из (42) и (43) следует, что

$$\frac{d}{d\tau} J(F_1 + \tau G, K_0 + \tau L)\Big|_{\tau=0} = 2sp\int_0^T G^T(s)\psi(s)ds + 2\gamma^2 sp\int_0^T F_1(t)G^T dt$$

Отсюда, оценки $K_0$ и $F_1(s)$ могут быть выбраны в соответствии с (36), (37).

Апостериорные множества $G_y$, $G_K$ и апостериорная погрешность $\sigma_a^{(1)}$ для задач (1), (2), (35) имеет вид, сходный с представленным в теоремах 1, 2, 3.

## Заключение

*Таким образом, мы рассмотрели задачу оценивания, когда заданы некоторые наблюдения системы, включающие неизвестное интегральное ядро, ее известное состояние и возможно производную. Предполагая дифференцируемость интегрального ядра и квадратичные ограничения, получены апостериорная оценка интегрального ядра, апостериорное множество и погрешность. Также рассматривается случай неизвестных ограничений на начальное значение интегрального ядра. Все результаты представлены в виде, включающем решения сопряженных систем и собственные значения некоторых линейных операторов.*

*Представляется целесообразным проведение дальнейших исследований* в случае неизвестного состояния системы, заданного интегродифференциальным уравнением, а также о теоретическом обосновании существования решения подобного рода задач идентификации в Гильбертовом пространстве.

## Список литературы


1. Marzeniuk V. P., Nakonechny A. G. System analysis methods of medical and biological processes. — Ternopil: Ukrmedknyha, 2003. — 241p.
2. Gopalsamy K. S., Stability and oscillation in delay differential equations of population dynamics, Kluwer Academic Publishers, AA Dordrecht, The Nethederlands. 1992.
3. Beuter A., L. Glass, M. C. Mackey, M. S. Titcomber. Nonlinear Dynamics in Biology and Medicine. 2002.
4. Наконечный А. Г. Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в Гильбертовых пространствах. Киев: КГУ, 1985.
5. Бублик Б. Н., Данилов В. Я., Наконечный А. Г.Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах. К: УМК ПО, 1988.