УДК 511.138:517.527:517.584:511.216

# ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ПРОГРЕССИЯМИ

**Д.В.Третьяков**

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *tretyakov@ccssu.crimea.ua*

**Abstract** New irrational numbers decompositions into ordinary continued fractions (OCF) in the form of $b, a+b, ..., an+b, ...$ and into зо called completely almost periodic OCF of the first rank in the form $[a_0, ..., a_m, d, b_0, ..., b_k, c+d, b_0, ...b_k, ...]$ were obtained with the help of suggested parametric generalization of Eiler's method. The description of all irrationalities decomposed into OCF of indicated types was given. Besides it was obtained the decompositions of some transcendental functions into more general P-fractions.

## Введение

*Анализ публикаций* по ценный дробям (ЦД) (см., напр., обзоры в [2] н [3], а также, напр., [8] и [9]) позволяет сделать вывод, что в теории обыкновеных цепных дробей (ОЦД) (или правильных цепных дробей) количество известных раэложений иррациональных чисел ограничено. В связи с этим, *важной и актуальной проблемой* является проблема поиска новых разложений и новых методов, к ним приводящих, причем, *особый интерес* представляют методы, укладывающиеся в рамки теории ОЦД, поскольку это, в частности, связано с *вычислением наилучших рациональных приближений раскладываемых чисел.*

*Цель данной работы* — получить новые разложения в рамках теории ОЦД, без привлечения более общих методов (см., напр., [2] и [3]), которые, кстати, не всегда позволяют это сделать. *Для решения задачи* здесь предложено параметрическое обобщение известного метода Л.Эйлера (см., напр., [1]). Остановимся более подробг о на содержании работы.

Будем говорить, что иррациональное число $a$ порождено арифметической прогрессией $\{an+b \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, a+b \in \mathbb{N}\}$, если $a = [b, a+b, ..., an+b, ...]$. В п.1 получена формула для вычисления таких дробей, решена обратная задача, позволяющая точно охарактеризовать класс раскладываемых чисел и являющаяся частным случаем аналогичиой задачи для фукциональных Р-дробей [2] вида $\left[b, \frac{hx^2}{an+b}\right]_{n=1}^{\infty}$ (в обозначениях Принсгейма). Всвязи с этим получены разложения некоторых трансциндентных функций.

В п.2 изучаются вполне почти периодические (ВПП) ОЦД. ЦД $[q_0, q_1, ...]$ называется ВПП ранга $r \geqslant 0$ с периодом $s \in \mathbb{N}$, если существует такой набор элементов разложения $q_j, q_{j+1}, ..., q_{j+s-1}$, что

$$(\forall m \in \mathbb{N})\ (\forall k = \overline{0, s-1})\ q_{j+k+m(r+s)}.$$

Очевидно, любая периодическая ОЦД — это ВПП дробь ранга 0. Разложение Эйлера $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, ...]$ [1] даёт нам простой пример ВПП ранга 1, с периодом 2.

В работе подробно исследован случай $r = 1$, который сводится к решению к решению некоторой задачи из п.1. Получен критерий того, что данная ОЦД является ВПП и решены обратные задачи для чистых и смешанных ВПП и ОЦД.

## 1. Разложение иррациональных чисел, порождённых арифметическими прогрессиями в ЦД

Рассмотрим ОЦД $[b, a+b, ...an+b, ...]$, где $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, a+b \in \mathbb{N}$. Если $r_n$ — n-й-остаток ЦД, то $r_n = an + b + \frac{1}{r_{n+1}}$. Полагая $r_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}$ (см., напр., [1]), приходим к линейному рекуррентному уравнению

$$f_n - (an+b)f_{n+1} = f_{n+2} \tag{1}$$

Рассмотрим более общую фукциональную систему

$$\begin{cases} f_n(x) - (an+b)f_{n+1}(x) = hx^2 f_{n+2}(x) \\ f'_n(x) = (\text{sign } h) r x f_{n+1}(x) \end{cases} \tag{2}$$

где $\{a, b\} \subset \mathbb{Z}(b \neq 0), \text{sign } a = \text{sign } r,\ \{h, r\} \subset \mathbb{R}$. Из структуры системы 2 следует [3], что решение её следует искать в виде

$$f_n(x) = (\mu x)^{1-n-b/a} Z_{n+b/a-1}(\lambda x), \text{ где } Z = \begin{cases} I,\ h > 0 \\ J,\ h < 0, \end{cases} \tag{3}$$

$J_v$ — функция Бесселя I рода, $I_v$ — модифицированная функция Бесселя I рода [5]. Подставляя 3 во второе уравнение системы 2, получаем

$$f'_n(x) = (\mu x)^{-n-b/a} \mu[\lambda x Z'_{n+b/a-1}(\lambda x) - (n + b/a - 1) Z_{n+b/a-1}(\lambda x)] =$$
$$= (\text{sign } h)(\mu x)^{-n-b/a} \mu \lambda x Z_{n+b/a}(\lambda x).$$

Таким образом, должно выполняться условие

$$\mu\lambda = r \tag{4}$$

Подстановка 3 в первое уравнение системы дает

$$f_n(x) - (n + b/a) a f_{n+1}(x) = (\mu x)^{1-n-b/a}[Z_{n+b/a-1}(\lambda x) - 2(n + b/a)\frac{a\lambda}{2\mu\lambda x} Z_{n+b/a}(\lambda x)] =$$
$$= (\text{sign } h)(\mu x)^{1-n-b/a} Z_{n+b/a+1}(\lambda x),$$

если справедливо отношение

$$a\lambda = 2\mu. \tag{5}$$

Отсюда, сравнивая полученное с правой частью первого уравнения 2, приходим к следующей зависимости между параметрами: $\lambda = \frac{2\sqrt{|h|}}{a}$ и

$$ar = 2|h|. \tag{6}$$

Таким образом, система 2 имеет решение

$$f_n(x) = (\sqrt{|h|}x)^{1-n-b/a} Z_{n+b/a-1}\left(\frac{2\sqrt{|h|}x}{a}\right)$$

и, следовательно,

$$\left[b, \frac{hx^2}{an+b}\right]_{n=1}^{\infty} = r_0(x) = \frac{f_0(x)}{f_1(x)} = \sqrt{|h|}x \frac{Z_{b/a-1}\left(\frac{2\sqrt{|h|}x}{a}\right)}{Z_{b/a\left(\frac{2\sqrt{|h|}x}{a}\right)}}. \tag{7}$$

Крайне правое отношение в равенстве 7 при $Z = J$ есть дробная цилинрическая функция $\frac{a}{2}C_{b/a}\left(\frac{2\sqrt{|h|}x}{a}\right)$ по классификации Оное (см., напр., [6])). Отметим, что из признаков сходимости предельно-периодических ЦД [3] следует, что данная ЦД равномерно сходится к функции из правой части 7 в любой конечной области комплексной области, за исключением конечного множества точек несущественной расходимости.

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы 7:

а) пусть $a = 2b$. Тогда, например, если $h > 0$, то

$$\left[b, \frac{hx^2}{b(2n+1)}\right]_{n=1}^{\infty} = \sqrt{h}x \frac{I_{-1/2}\left(\frac{2\sqrt{h}x}{b}\right)}{I_{1/2}\left(\frac{\sqrt{h}x}{b}\right)} = \sqrt{h}x \operatorname{cth} \frac{\sqrt{h}x}{b}. \tag{8}$$

Аналогично рассматривается случай $h < 0$. Таким образом,

$$\left[b, \frac{hx^2}{b(2n+1)}\right]_{n=1}^{\infty} = \sqrt{|h|}xc\left(\frac{\sqrt{|h|}x}{b}\right), \text{ где } c = \begin{cases} \operatorname{ctg}, \ h < 0 \\ \operatorname{cth}, \ h > 0. \end{cases} \tag{9}$$

б) общая формула для ОЦД, порожденной арифметической прогрессией $\{an+b\}_n$, получается из 7 при $\{a, a+b\} \subset \mathbb{N}$ и $x = \frac{1}{\sqrt{h}}(h > 0)$:

$$[b, a+b, ..., an+b, ...] = \frac{I_{b/a-1}(\frac{2}{a})}{I_{b/a}(\frac{2}{a})}; \tag{10}$$

в) положим в 9 $a = 2k, b = k$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу 8

$$[k, 3k, 5k, ..., (2n+1)k, ...] = \operatorname{cth}\frac{1}{k} = \frac{e^{\frac{2}{k}}+1}{e^{\frac{2}{k}}-1},$$

то есть, получается известная формула Эйлера (см., напр., [1]).

г) если $m \in \mathbb{N}$ — фиксировано, то, полагая в 10 $a = 2, b = 2m+1$, получаем [5]

$$[2m+1, 2m+3, 2m+5, ...] = \frac{I_{m-1/2}(1)}{I_{m+1/2}(1)}.$$

Аналогично, при $a = 2, b = 2m$

$$[2m, 2m+2, 2m+4m...] = \frac{I_{m-1}(1)}{I_m(1)};$$

д) в формуле 9 примем $x = \frac{1}{\sqrt{|h|}}$, тогда

$$\left[b, \frac{\text{sign } h}{b(2n+1)}\right]_{n=1}^{\infty} = c\left(\frac{1}{b}\right)$$

— частные случаи разложения Ламберта (см., напр., [3]).

Рассмотрим теперь функцию

$$\frac{x\xi q}{2}\frac{Z_s(\xi x)}{Z_{s+1}(\xi x)},$$

где $s = \frac{p}{q} \in Q$, $\{p,q\} \subset \mathbb{Z}$, $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ — фиксированные числа. Определим величины $h, r, a$ и $b$ из 6 и равенств

$$\text{sign } h = \begin{cases} 1, \ Z = I \\ -1, \ Z = J, \end{cases}, \quad \xi = \frac{2\sqrt{|h|}}{a}, \begin{cases} a = q \\ b = p+q. \end{cases} \tag{11}$$

Из условия sign $\xi$ = sign $a$ выбираем знак $a$ в системе 11. В результате получим, что

$$h = \text{sign } h\frac{q^2\xi^2}{4}, \ r = \frac{q\xi^2}{2} \tag{12}$$

Тогда из доказанного ранее следует, что решением задачи 2 является функция $f_n(x) = (\sqrt{|h|}x)^{1-n-b/a}Z_{n+b/a-1}\left(\frac{2\sqrt{|h|}x}{a}\right)$, по которой строится разложение в ОЦД вида 7. Таким образом, доказана

**Теорема 1.** *Функции*

$$\frac{x\xi q}{2}\frac{Z_s(\xi x)}{Z_{s+1}(\xi x)},$$

*где $s = p/q$, $\xi \in R\backslash\{0\}$ и только они, раскладываются в ОЦД вида 7, где $a = q$, $b = p+q$, sign $\xi$ = sign $a$, причём данная ЦД сходится равномерно к указанной функции в любой конечной области комплексной плоскости за исключением множества точек несущественной расходимости.*

**Следствие 1.** *Иррациональное число*

$$\beta = \frac{I_{p/q}\left(\frac{2}{q}\right)}{I_{p/q+1}\left(\frac{2}{q}\right)}, \ \{p,q\} \subset \mathbb{Z}$$

*раскладывается в ОЦД* $[q+p, 2q+p, 3q+p, ...]$,*порожденную арифметической прогрессией, тогда и только тогда, когда* $q>0$ *и* $2q+p>0$.

**Доказательство.** Всамом деле, с помощью числа $\beta$ запишем равенство

$$\frac{\xi}{2\sqrt{h}} = \frac{2}{q}, \tag{13}$$

по которому построим разложение

$$\frac{x\xi q}{2}\frac{I_{p/q(\xi x)}}{I_{p/q+1}(\xi x)} = \left[q+p, \frac{hx^2}{q_n+q+p}\right]_{n=1}^{\infty}$$

с помощью теоремы 1 для любой пары $(\xi, h), h \neq 0$ из равенства (13). При $x = \frac{1}{\sqrt{h}}$ получаем ЦД $[q+p, 2q+p, 3q+p, ...]$, которая будет обыкновенной только при $q>0$ и $2q+p>0$. Обратно, при этих условиях доказательством служит формула 10.

**Следствие 2.** $(\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\})(\forall a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}:\ a+b \in \mathbb{N})$

$$\left[\frac{I_{n+b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right)}{I_{n+b/a}\left(\frac{2}{a}\right)}\right] = an+b,\ \left\{\frac{I_{n+b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right)}{I_{n+b/a}\left(\frac{2}{a}\right)}\right\} = \frac{I_{n+b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right)}{I_{n+b/a}\left(\frac{2}{a}\right)},$$

*где* $[x]$ *и* $\{x\}$ *— целая и дробная части числа* $x$.

Легко проверить, что последовательность $(-1)^n K_{n+b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$, где $K_v$ — модифицированная функция Бесселя II рода [5], также удовлетворяет уравнению системы 1. Поэтому справедливо

**Следствие 3.** *В условиях следствия 2 общее решение уравнения*

$$f_n - (an+b)f_{n+1} = f_{n+2}$$

*имеет вид*

$$f_n = C_1 I_{n+b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right) + C_2(-1)^n K_{n+b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right).$$

Например, для функции — знаменателя $J_{10/3}(\sqrt{3}x)$ $a=3, b=10, h=-\frac{-27}{4}, r=\frac{9}{2}$ и

$$\frac{3\sqrt{3}x}{2}\frac{J_{7/3}(\sqrt{3}x)}{J_{10/3}(\sqrt{3}x)} = \left[10, \frac{-\frac{27x^2}{4}}{3n+10}\right]_{n=1}^{\infty}.$$

Анадогично, для функции $I_{-8/5}(4x)$ $a=5, b=-3, h=100, r=40$ и

$$10x\frac{I_{-8/5}(4x)}{I_{-3/5}(4x)} = \left[-3, \frac{100x^2}{5n-3}\right]_{n=1}^{\infty}.$$

Пусть

$$g(x) = 5\pi x\frac{J_{11/10}(-\pi x)}{J_{21/10}(-\pi x)}.$$

Тогда $a=-10, h=-25\pi^2, b=-21$. Таким образом,

$$g(x)=\left[-21,\frac{-25\pi^2x^2}{-10n-21}\right]_{n=1}^{\infty}$$

Если

$$a=\frac{I_{-3/4}\left(\frac{1}{2}\right)}{I_{1/4}\left(\frac{1}{2}\right)},$$

то $q=4>0, 2q+p=5>0$, и, следовательно, $a=[1,5,9,...,4n+1,...]$.
Число

$$\varsigma=\frac{I_{-4}(2)}{I_{-3}(2)}$$

не раскладывается в ОЦД вида 9, так как $q=1>0, 2q+p=-2<0$.

**Замечание 1.** Отметим в заключение этого пункта, что последовательности функций вида

$$\begin{cases}(\sqrt{|h|}x)^{1-n-b/a}Y_{n+b/a-1}\left(\frac{2\sqrt{|h|}x}{a}\right),\ h<0\\ (-1)^n(\sqrt{|h|}x)^{1-n-b/a}Y_{n+b/a-1}\left(\frac{2\sqrt{|h|}x}{a}\right),\ h>0,\end{cases}$$

где $Y_v$ — функция Бесселя II рода, а $K_v$ — модифицированнам функции Бесселя II рода [5], соответгтвенно, также удовлетворяют системе 2. Этот факт позволяет также записывать различные разложения в ОЦД указанного вида и решать аналогичные обратные задачи (данное замечание справедливо также и для результатов п.2).

## 2. Вполне почти периодические обыкновенный цепные дроби ранга 1, порождённые арифметическими прогрессиями

Рассмотрим ВВП ОЦД ранга 1, с периодом $k+1$

$$\phi=[d,b_0,...,b_k,c+d,b_0,...,b_k,...,cn+d,b_0,...,b_k,...], \tag{14}$$

где $\{c,b_0,...,b_k\}\subset\mathbb{N}, d\in\mathbb{Z}, c+d\in\mathbb{N}$. Положим $[b_0,...b_k]=\frac{T_k}{U_k}$. Тогда для остатка $r_{n(k+2)}$ ОЦД 14 имеем

$$r_{n(k+2)}=cn+d+\frac{1}{[b_0,...,b_k,r_{(n+1)(k+2)}]}=cn+d+\frac{r_{(n+1)(k+2)}U_k+U_{k-1}}{r_{(n+1)(k+2)}T_k+T_{k-1}}, \tag{15}$$

где $r_{(n+1)(k+2)}=[c(n+1)+d,b_0,...,b_k,...]$. Для того, чтобы линеаризовать уравнение 15, сделаем подстановку

$$r_{n(k+2)}=\frac{f_n+\beta f_{n+1}}{\gamma f_{n+1}},\ \{\beta,\gamma\}\subset\mathbb{Z}.$$

Тогда

$$\frac{f_n+\beta f_{n+1}}{\gamma f_{n+1}}=cn+d+\frac{U_kf_{n+1}+(\beta U_k+\gamma U_{k-1})f_{n+2}}{T_kf_{n+1}+(\beta T_k+\gamma T_{k-1})f_{n+2}}.$$

Уравнение 15 линеаризуется, если выполнены условия

$$\begin{cases} \gamma = T_k \\ \beta T_k + \gamma T_{k-1} = 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$r_{n(k+2)} = \frac{f_n - T_{k-1} f_{n+1}}{T_k f_{n+1}} \tag{16}$$

Подставим последнюю формулу в 15:

$$\frac{f_n - T_{k-1} f_{n+1}}{T_k f_{n+1}} = cn + d + \frac{U_k f_{n+1} + (T_k U_{k-1} - T_{k-1} U_k) f_{n+2}}{T_k f_{n+1}} =$$

$$= cn + d + \frac{U_k f_{n+1} + (-1)^{k+1} f_{n+2}}{T_k f_{n+1}}.$$

Отсюда последовательность $f_n$ удовлетворяет линейному рекуррентному уравнению

$$f_n - (cT_k n + dT_k + T_{k-1} + U_k) f_{n+1} = (-1)^{k+1} f_{n+2} \tag{17}$$

Используя результаты п.1, рассмотрим более общую задачу

$$\begin{cases} f_n(x) - (an + b) f_{n+1}(x) = (-1)^{k+1} h x^2 f_{n+2}(x) \\ f_n'(x) = (-1)^{k+1} r x f_{n+1}(x) \ (h > 0), \end{cases} \tag{18}$$

где

$$\begin{cases} a = cT_k \\ b = dT_k + T_{k-1} + U_k, \end{cases} \tag{19}$$

а также константы $h$ и $r$ таковы (sign a = sign r), что выполнятся условие $ar = 2h$. Тогда, решение 18 имеет вид

$$f_n(x) = (\sqrt{h}x)^{1-n-b/a} Z_{n+b/a-1}\left(\frac{2\sqrt{h}x}{a}\right), \text{ где } Z = \begin{cases} I, \ k - \text{нечетн.} \\ J, \ k - \text{четное.} \end{cases} \tag{20}$$

Положив $x = \frac{1}{\sqrt{h}}$ и $n = 0$ в 16, приходим к формуле

$$\phi = \frac{Z_{b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right) - T_{k-1} Z_{b/a}\left(\frac{2}{a}\right)}{T_k Z_{b/a}\left(\frac{2}{a}\right)} \tag{21}$$

Таким образом, любая ВПП ОЦД ранга 1 сворачнвается по формуле 21. При этом, выполнено условие

$$a + b > T_{k-1} + U_k. \tag{22}$$

Рассмотрим ЦД вида

$$\breve{\phi} = [d, b_k, ...b_0, c + d, b_k, ..., b_0, ...cn + d, ..., b_k, ..., b_0, ...].$$

Так как

$$[b_k, ..., b_0] = \frac{T_k}{T_{k-1}}, \ [b_k, ..., b_1] = \frac{U_k}{U_{k-1}},$$

то используя формулы 19 и 20, получаем, что

$$\breve{\phi} = \frac{Z_{b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right) - U_k Z_{b/a}\left(\frac{2}{a}\right)}{T_k Z_{b/a}\left(\frac{2}{a}\right)},$$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи формулы 21:

а) $k = 0$ и $T_0 = U_0 = 1$, $d = m - 2$, $m \in \mathbb{N}$, $c = 2m$. Так как $T_{-1} = 1$, то из 19 $a = 2m$, $b = m$. В силу известных свойств функции Бесселя [5]

$$[m-2, 1, 3m-2, 1, 5m-2, 1...] = \frac{J_{-0,5}\left(\frac{1}{m}\right) - J_{0,5}\left(\frac{1}{m}\right)}{J_{0,5}\left(\frac{1}{m}\right)} = \mathrm{ctg}\,\frac{1}{m} - 1,$$

Отсюда для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{ctg}\,\frac{1}{m} = [m-1, 1, 3m-2, 1, 5m-2, 1...]$$

Отметим, что эта формула не следует из известного разложения Ламберта для $\mathrm{tg}\,x$ (см., напр., [3]);

б) $k = 1$, $T_1 = m$, $U_1 = m - 1$, $T_0 = 1$, $c = 2$, $d = 0$, $m \geqslant 2$. Тогда $a = 2m$, $b = m$ и

$$[0, 1, m-1, 2, 1, m-1, 4, 1, m-1, ...] = \frac{I_{-0,5}\left(\frac{1}{m}\right) - I_{0,5}\left(\frac{1}{m}\right)}{mI_{0,5}\left(\frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{m}(\mathrm{cth}\,\frac{1}{m} - 1).$$

в) имеет место формула

$$\frac{J_0\left(\frac{1}{5s}\right) - 3J_1\left(\frac{1}{5s}\right)}{10J_1\left(\frac{1}{5s}\right)} = [s-1, 1, 2, 3, 2s-1, 1, 2, 3, 3s-1, 1, 2, 3, ...],\ s \in \mathbb{N}.$$

Легко видеть, что для любой смешанной ВПП ОДД ранга 1

$$\sigma = [a_0, ..., a_m, d, b_0, ..., b_k, c + d, b_0, ..., b_k, ...] \tag{23}$$

имеет место формула

$$\sigma = \frac{P_m Z_{b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right) + t_{mk} Z_{b/a}\left(\frac{2}{a}\right)}{Q_m Z_{b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right) + v_{mk} Z_{b/a}\left(\frac{2}{a}\right)}, \tag{24}$$

где

$$\frac{P_m}{Q_m} = [a_0, ..., a_m],\ t_{mk} = \begin{vmatrix} P_{m-1} & T_{k-1} \\ P_m & T_k \end{vmatrix},\ v_{mk} = \begin{vmatrix} Q_{m-1} & T_{k-1} \\ Q_m & T_k \end{vmatrix}, \tag{25}$$

числа $a$ и $b$ определяются равенствами 19, а функция Z — соотношениями 3.

Рассмотрим примеры.

а) с помощью 24 докажем формулу Гурвица [4]

$$e^{\frac{1}{k}} = [1, k-1, 1, 1, 3k-1, 1, 1, 5k-1, ...].$$

Действительно, в этом случае

$$P_0 = Q_0 = 1, m = 0, T_1 = 2, U_1 = T_0 = 1, t_{01} = 1, v_{01} = -1, d = k-1, c = 2k, a = 4k, b = 2k.$$

б)

$$\frac{me^{\frac{2}{m}}}{3}=\left[\frac{m+2}{2},m-1,2,1,m-1,4,1,m-1,...\right],$$

если $m$-четное. Здесь

$$P_1=\frac{1}{2}[(m+2)(m-1)+2],\ Q_1=m-1,\ P_0=\frac{1}{2}(m+2),\ Q_0=1,$$

$T_1=m,\ U_1=m-1,\ t_{11}=\frac{m}{2},\ v_{11}=1, c=2, d=2, a=2m, b=3m$. (при $m=2$ получается известное разложение Эйлера для числа $e$). Например, при $m=4$

$$2\sqrt{e}=[3,3,2,1,3,4,1,3,6,1,3,...].$$

в)

$$\frac{m\left(e^{\frac{2}{m}}+1\right)}{2}=[m+1,m-1,2,1,m-1,4,1,m-1,...]$$

По аналогии с теорией квадратичных иррациональностей рассмотрим чистую ВПП ОЦД

$$\delta=[b_0,...,b_k,d,b_0,...,b_k,c+d,b_0,...,b_k,...].$$

(дробь вида

$$\eta=[a_0,...,a_m,d,b_0,...,b_k,c+d,b_0,...,b_k,...]$$

будем называть смешанной ВПП ОЦД). Имеет место следующий критерий вполне почти периодичности ОЦД

**Лемма 1.** ОЦД является ВПП дробью ранга t, с периодом s тогда и только тогда, когда

$$(\exists m\in\mathbb{N}):(\forall j\geqslant 0)\ r_{m+(j+1)t+js+1}=\frac{P_s r_{m+(j+1)(t+s)+1}+P_{s-1}}{Q_s r_{m+(j+1)(t+s)+1}+Q_{s-1}}.$$

Применяя равенства 24 и 25, получаем, что

$$\delta=\frac{T_k Z_{b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right)}{U_k Z_{b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right)+(-1)^{k+1}Z_{b/a}\left(\frac{2}{a}\right)}.$$

Назовем иррациональное число

$$\delta=\frac{(-1)^{k+1}Z_{b/a}\left(\frac{2}{a}\right)-P_{k-1}Z_{b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right)}{P_k Z_{b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right)}$$

числом, сопряженным к числу $\delta$. Вычисляя дробь $\eta$, приходим к следующему аналогу теоремы Галуа [7].

**Теорема 2.** *Если*

$$\delta=[b_0,...,b_k,d,b_0,...,b_k,c+d,b_0,...,b_k,...],$$

*то*

$$-\frac{1}{\delta'}=[b_k,...,b_0,d,b_k,...,b_0,c+d,b_k,...,b_0,...].$$

Рассмотрим теперь обратные задачи для смешанной и чистой ВПП ЦД. Пусть задано число

$$\zeta = \frac{fZ_{b/a-1}(u) + gZ_{b/a}(u)}{hZ_{b/a-1}(u) + tZ_{b/a}(u)},$$

где $\{f, g, t, b\} \subseteq \mathbb{Z}$, $\{h, a\} \subseteq \mathbb{N}$. Найдём вначале $a$ из равенства $u = \frac{2}{a}$, а затем $b$ и запишем разложение

$$\frac{f}{h} = \frac{P_m}{Q_m} = [a_0, ..., a_m],\ a_0 = |\zeta|$$

Вычисляя $P_{m-1}$ и $Q_{m-1}$, рассмотрим систему

$$\begin{cases} P_{m-1}x - P_m y = g \\ Q_{m-1}x - Q_m y = t, \end{cases} \tag{26}$$

определитель которой равен $(-1)^{m+1}$. Если решения этой системы имеют одинаковые знаки и $|x| > |y|$, то записав равенства

$$\frac{|x|}{|y|} = [b_k, ..., b_0] = \frac{T_k}{T_{k-1}},$$

находим после этого $U_k$ из формулы

$$[b_0, ..., b_k] = \frac{T_k}{U_k}.$$

При вычеслении $c$ и $d$ представляются две возможности:

1) чётность $k$ соответствует типу функции $Z$ в смысле 20. Если выполнено условие 22 и система

$$\begin{cases} cT_k = a \\ dT_k = b - T_{k-1} - U_k \end{cases} \tag{27}$$

разрешима в целых числах так, что $c + d \in \mathbb{N}$, то

$$\zeta = [a_0, ..., a_m, d, b_0, ..., b_k, c + d, b_0, ..., b_k, 2c + d, ...] \tag{28}$$

2) чётность $k$ не соответствует типу функции $Z$ в смысле 20. Тогда при условии указанной разрешимости системы 26 рассмотрим разложения

$$\frac{|x|}{|y|} = [b_k, ..., b_0 - 1, 1] = \frac{T_k}{T_{k-1}} = [1, b_0 - 1, ..., b_k].$$

Если выполнено условие 22 и система 27 разрешима в целых числах так, что $c + d \in \mathbb{N}$,то

$$\zeta = [a_0, ..., a_m, d, 1, b_0 - 1, ..., b_k, c + d, 1, b_0 - 1, ..., b_k, 2c + d, ...] \tag{29}$$

Легко проверить с помощью формул 24 и 25, что правые части равенств 28 и 29 совпадает с числом $\zeta$. Таким образом, доказана следующая

**Теорема 3.** *Число*

$$\zeta = \frac{fZ_{b/a-1}(u) + gZ_{b/a}(u)}{hZ_{b/a-1}(u) + tZ_{b/a}(u)},$$

*где* $\{f, g, t, b\} \subset \mathbb{Z}$, $\{a, h\} \subset \mathbb{N}$, *и* $\frac{f}{h} = [a_0, ..., a_m] = \frac{P_m}{Q_m}, a_0 = |\zeta|$ *раскладывается в ВПП ОЦД вида 23 тогда и только тогда, когда,* $u = \frac{2}{a}$, *система 26 имеет решения* $\{x, y\} \subset \mathbb{Z}$ *одинаковых знаков, таких, что* $|x| > |y|$ *и система 27 разрешима относительно* $c$ *и* $d$ *в целых числах, с учётом типа функции* $Z$, *так, что* $c+d \in \mathbb{N}$.

**Следствие 4.** *Число* $\zeta$ *раскладывается в чистую ВПП ОЦД в том и только в том случае, когда* $u = \frac{2}{a}$, $g = 0$, $t \in \{-1, 1\}$, $|f| > |h|$, *sign* $f$ = *sign* $h$, *система 27 разрешима также как в теореме 3 и знак* $t$ *соответствует типу функции* $Z$.

**Следствие 5.** *Для того, чтобы число* $\zeta$ *раскладывалось в ВПП ОЦД вида 14, необходимо и достаточно, чтобы* $u = \frac{2}{a}$, $f = 1$, $h = 0$, $|t| > |g|$, *sign* $t$ = -*sign* $g$, *и система 27 разрешима также как и в теореме 3* ($P_{-2} = 0$, $Q_{-2} = 1$).

Рассмотрим некоторые примеры.

а)Число

$$\frac{I_{7/5}\left(\frac{2}{5}\right) - 5I_{12/5}\left(\frac{2}{5}\right)}{8I_{12/5}\left(\frac{2}{5}\right)}$$

не раскладывается в ЦД вида 14, так как система 27 не разрешима в целых числах. Уменьшив порядки функций Бесселя, легко привести пример неразложимого числа по причине невыполнимости условия 22.

б) Пусть

$$\xi = \frac{J_{-13/28}\left(\frac{1}{14}\right) - 3J_{15/28}\left(\frac{1}{14}\right)}{7J_{15/28}\left(\frac{1}{14}\right)}.$$

Используя ассимптотику функции $J_v$ [6], получим, что $|\xi| = 1$. Далее $a = 28, b = 15, t = 7, g = -3, |t| > |g|, \frac{7}{3} = [2, 3], k = 1$ — нечётное, поэтому, необходимо записать разложения

$$\frac{7}{3} = [2, 2, 1] = \frac{T_2}{T_1}, \ [1, 2, 2] = \frac{7}{5} = \frac{T_2}{U_2}.$$

Из системы 27 находим, что $c = 4$, $d = 1$ и, согласно формуле 29, а также следствию 4

$$\xi = [1, 1, 2, 2, 5, 1, 2, 2, 9, ...].$$

в) Рассмотрим иррациональность

$$\gamma = \frac{5J_0\left(\frac{1}{20}\right) + 15J_1\left(\frac{1}{20}\right)}{3J_0\left(\frac{1}{20}\right) + 11J_1\left(\frac{1}{20}\right)}.$$

Также как и в примере 2 находим, что $|\gamma| = 1$ и, что

$$a = b = 40, \frac{5}{3} = [1, 1, 2] = \frac{P_2}{Q_2}, \ \frac{P_1}{Q_1} = \frac{2}{1}.$$

Система $\begin{cases} 2x-5y=15 \\ x-3y=11, \end{cases}$ имеет решение $\begin{cases} x=-10 \\ y=-7, \end{cases}$ Так как $|x|>|y|$,

$$\frac{10}{7}=[1,2,3]=\frac{T_2}{T_1},\ \frac{10}{3}=[3,2,1]=\frac{T_2}{U_2},$$

система 27 имеет вид $\begin{cases} 10c=40 \\ 10d=30, \end{cases}$ и, следовательно $\begin{cases} c=4 \\ d=3, \end{cases}$ , то применяя формулу 28 и теорему 3, получаем, что

$$\gamma=[1,1,2,3,3,2,1,7,3,2,1,11,3,2,1,15,...].$$

г) Число

$$\tau=\frac{7I_{12/7}\left(\frac{2}{7}\right)}{3I_{12/7}\left(\frac{2}{7}\right)+I_{19/7}\left(\frac{2}{7}\right)}$$

раскладывается в чистую ВПП ОЦД. Действительно, используя следствие 2, получаем, что $\tau = 2$. Так как $k$ — нечётное, $a=7, b=19, \frac{7}{3}=[2,3]=\frac{T_1}{U_1}, T_0=2, U_0=1, x=7, y=2, c=1, d=2$, то

$$\tau=[2,3,2,2,3,3,2,3,4,2,3,5,...].$$

д) Пусть $m\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ — фиксированное число. Величина

$$\varphi=\frac{m(m\operatorname{sh}m^{-1}-\operatorname{ch}m^{-1})}{\operatorname{sh}m^{-1}-(m-1)(m\operatorname{sh}m^{-1}-\operatorname{ch}m^{-1})}$$

выражается через Бесселя следующим образом [5]

$$\varphi=\frac{-mI_{1,5}\left(\frac{1}{m}\right)}{I_{0,5}\left(\frac{1}{m}\right)+(m-1)I_{1,5}\left(\frac{1}{m}\right)} \tag{30}$$

По следствию 2 $[\varphi]=-1$. Из 30 вытекает тогда, что

$$\frac{0}{1}=[-1,1]=\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_0}{Q_0}=\frac{-1}{1}.$$

Система 28 имеет вид $\begin{cases} -x=-m \\ x-y=m-1, \end{cases}$ , откуда

$$x=m,\ y=1,\ \frac{m}{1}=[m-1,1]=\frac{T_1}{T_0},\ \frac{T_1}{U_1}=\frac{m}{m-1}.$$

Из системы 19 находим, что $c = d = 2$. Таким образом, $\varphi=[-1,1,2,1,m-1,4,1,m-1,6,1,...]$.

**Замечание 2.** Отметим, что для ВПП ОЦД ранга $r>1$ подстановка 16 уже не приводит к желаемому результату, так как коэффициенты подстановки для соответствующего остатка уже, вообще говоря, зависят от $n$ и частные случаи, когда указанная зависимость отсутствует, сводятся к случаю $r=1$.

## Заключение

*Основные результаты работы:*

1) Найдена формула для вычисления ЦД, порождёных арифметическими прогрессиями и получено описание всех иррациональностей, которые раскладываются в такие дроби.

2) Изучены ВПП ОЦД ранга $r > 1$, порождённые арифметическими прогрессиями, найдены фурмулы для вычисления различных классов таких дробей и характеризации иррациональностей, раскладываемых в такие дроби.

*На основе полученных результатов* преполагается исследовать иррациональности, порождённые несколькими арифметическими прогрессиями и ВПП ОЦД ранга $r > 1$.

## Список литературы

1. Бухштаб А. А. Теория чисел. Министерства просвещения. РСФСР, 1960.-376 с.
2. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. М.: Мир, 1985. - 414 с.
3. Данилов В. Л., Иванова А. Н., Исакова Е. К., Люстерник Л. А., Салехов Г. С., Хованский А. Н., Цлаф Л. Я., Янпольский А. Р. Математический анализ (СМБ). М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.-439 с.
4. Hurwitz A. Uber die Kettenbruche, beren Teilnenner arihmetische Reihen bilden, Vierteljahrschrift der naturforschenden Cesselschaft in Zurich, 41:2, 1896.-34-64.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т. 2.-М.: Наука-1974-295 с.
6. Воронцов А.А., Мировицкая С. Д. Специальные Функции задач теории рассеяния.-М.: Радио и связь, 1991.-199 с.
7. Дэвенпорт Л. Высшая арифметика.-М.: Наука, 1965.-175 с.
8. Benjamin A. T., Quinn J. J. Counting on continued fractions, Mathematics Magazine, 73 (2000), pp. 98-104.
9. Samur J. D. Some remarks on a probability limit theorem for continued fractions, Trans. of Amer. Math. Soc., Vol. 348, num. 4, April 1996, pp. 1411-1428.