УДК 517.432

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ В КВАТЕРНИОННЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И.И. Карпенко

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
факультет Математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г.Симферополь, Крым, Украина, 95007
e-mail: *i_karpenko@ukr.net*

Abstract.
In this paper some general problems of the theory of symmetric operators on quaternionic Hilbert spaces are considered. It's studied possibilities of construction of a boundary value space for such operators and its use for spectral analysis of some classes of regular extensions of symmetric operators.

Введение

Анализ последних достижений и публикаций свидетельствует о вновь возникшем интересе к линейным задачам в пространствах над телом кватернионов, связанном с изучением возможностей кватернмонной квантовой механики [1, 2, 3]. *Целью работы* является применение методов теории пространств граничных значений симметрических операторов, действующих в комплексных гильбертовых пространствах [5], к аналогичным задачам в кватернионных гильбертовых пространствах. Наличие тесной связи между симметрическим оператором и его симплектическим образом позволяет получить необходимые и достаточные условия существования пространства граничных значений такого оператора в случае конечных и равных дефектных чисел, а также дать описание точечного спектра некоторого класса регулярных расширений симметрического оператора в терминах его характеристической функции [6].

1. Линейные операторы в кватернионных гильбертовых пространствах

Пусть $Q = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \mid q_i \in \mathbb{R}\}$ есть тело кватернионов. Тогда $\overline{q} = q_0 j - q_1 i - q_2 j - q_3 k$ — элемент, сопряженный к q, $|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ — модуль кватерниона. Каждый кватернион q единственным образом представим в виде $q = z_1 + z_2 j \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})$. При этом z_1 называется комплексной частью числа q и обозначается так: $z_1 = \mathrm{Com}\, q$.

Пусть H — левое векторное пространство над телом кватернионов, на котором введено кватернионное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В этом случае $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ есть норма в H. Если относительно этой нормы H есть полное нормированное пространство, то H будем называть (левым) кватернионным гильбертовым пространством (q-пространством).

Очевидно, что q-пространство H можно рассматривать как комплексное гильбертово пространство H^s относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot) = \mathrm{Com}\langle\cdot,\cdot\rangle$, причем, нормы векторов в пространствах H и H^s совпадают.

Всякий линейный оператор A, действующий в кватернионном гильбертовом пространстве H, можно рассматривать также как линейный оператор в комплексном пространстве H^s. В этом случае мы будем обозначать его A^s и называть симплектическим образом оператора A.

Пусть J — аптиинволюция в H^s такая, что $Jx = jx \quad (\forall \mathrm{x} \in H)$, и A — линейный оператор в H. Тогда оператор A удовлетворяет соотношению $A^sJ = JA^s$. Обратно, если C — линейный оператор в H^s и $CJ = JC$, то C — линейный оператор в H.

Если A — линейный оператор в H, область определения $D(A)$ которого плотна в H, то для такого оператора стандартным образом можно определить линейный оператор A^*, сопряженный к A. Отметим, что сопряженный к оператору A^s в пространстве H^s совпадает с оператором $(A^*)^s$.

Кватернион q называется собственным значением линейного оператора A, если существует ненулевой вектор $x \in H$ такой, что $Ax = qx$. Вектор x называют собственным вектором оператора A. Нетрудно заметить, что множество собственных векторов, соответствующих данному собственному значению, и нуль-вектор образуют вещественно-линейное пространство (r-пространство). Множество собственных значений оператора A обозначим $\sigma_p(A)$.

Пусть $Ax = qx, \quad x \neq 0$. Если для некоторого ненулевого $p \in Q \quad y = px$, то $Ay = pAx = pqx = (pqp^{-1})px = (pqp^{-1})y$. Следовательно, кватернион pqp^{-1} также является собственным значением оператора A для любого ненулевого p.

Обозначим через $K(q)$ класс сопряженных к q элементов в мультипликативной группе Q^*. Как следует из полученных выше результатов, если q — собственное значение линейного оператора A, то и весь класс $K(q)$ состоит из собственных значений оператора A.

Заметим, что всякий класс $K(q)$ обязательно содержит $\lambda \in \mathbb{C}$, причем, $\mathrm{Im}\ \lambda \geqslant 0$, и такое λ определяется единственным образом. Если $Az = \lambda z$, то $A^sz = \lambda z$, и, следовательно, $\lambda \in \sigma_p(A^s)$. Если $\lambda \in K(q)$, то $\overline{\lambda} \in K(q)$ и также является собственным значением оператора A^s. Таким образом, точечный спектр оператора A^s симметричен относительно вещественной оси. Верно и обратное: если $\lambda \in \sigma_p(A^s)$, то $K(\lambda) \subset \sigma_p(A)$. Следовательно, существует взаимно-однозначное соответствие между собственными значениями с неотрицательной мнимой частью оператора A^s и классами сопряженности из множества собственных значений оператора A.

Если геометрическая кратность собственного значения $\lambda \in \sigma_p(A^s)$ равна s, и векторы $z_1, z_2, \ldots z_s$ образуют базис в соответствующем собственном подпространстве, то размерность овеществленного собственного подпространства равна $2s$, причем базис этого пространства образуют векторы $z_1, z_2, \ldots z_s, iz_1, iz_2, \ldots iz_s$. Пусть $q = p\lambda p^{-1}$. Тогда из условия $A^sz = \lambda z$ следует $A(pz) = q(pz)$. Нетрудно показать, что векторы

$pz_1, pz_2, \dots pz_s, piz_1, piz_2, \dots piz_s$ r-линейно независимы. Если, кроме того, $A\widetilde{z} = q\widetilde{z}$, то $A(p^{-1}\widetilde{z}) = (p^{-1}\widetilde{z})$, и $p^{-1}\widetilde{z}$ является собственным вектором оператора A^s. Следовательно, $p^{-1}\widetilde{z} = \sum \alpha_k z_k + \sum \beta_k iz_k, \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, откуда $\widetilde{z} = \sum \alpha_k pz_k + \sum \beta_k piz_k$. Поэтому размерность вещественного собственного подпространства оператора A, соответствующего любому собственному значению из класса $K(\lambda)$, равна $2s$.

2. Симметрические операторы в q-гильбертовых пространствах

Определение 1. Линейный оператор A, действующий в q-гильбертовом пространстве H, называется симметрическим, если его область определения плотна в H и для всех $x, y \in D(A)$ выполняется условие

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle.$$

Отметим, что оператор A^s при этом также является симметрическим в комплексном гильбертовом пространстве H^s, причем дефектные числа оператора A^s равны между собой, так как $\mathfrak{N}_\lambda = J\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$.

Определение 2. Линейный оператор B называется регулярным расширением симметрического оператора A, если $A \subset B \subset A^*$.

Очевидно, что симплектический образ регулярного расширения оператора A является регулярным расширением оператора A^s. Верно и обратное утверждение. Действительно, пусть B — регулярное расширение оператора A^s и $x \in D(B)$. Если $jx \in D(B)$, то $B(js) = jBx$, так как $B \subset (As)^*$. Если $jx \notin D(B)$, то доопределим оператор на этом векторе по правилу: $B(jx) := jBx$. При этом $A^*(jx) = (A^s)^*(jx) = j(A^s)^*(x) = jBx$. Следовательно, $B \subset A^*$ является регулярным расширением оператора A.

3. Пространство граничных значений симметрического оператора

Пусть A — симметрический оператор в q-гильбертовом пространстве H.

Определение 3. Пространством граничных значений (ПГЗ) симметрического оператора A назовем тройку (X, Γ_1, Γ_2), где X — q-гильбертово пространство, Γ_1, Γ_2 — линейные операторы, действующие из $D(A^*)$ в X такие, что

1) для любых векторов $f, g \in D(A^*)$
$\langle A^*f, g\rangle_H - \langle f, A^*g\rangle_H = \langle \Gamma_1 f, \Gamma_2 g\rangle_X - \langle \Gamma_2 f, \Gamma_1 g\rangle_X$;
2) для любых векторов $\varphi, \psi \in X$ существует вектор $f \in D(A^*)$ такой, что
$\Gamma_1 f = \varphi, \Gamma_2 f = \psi$.

Имеет место очевидное утверждение.

Предложение 1. Если (X, Γ_1, Γ_2) — ПГЗ симметрического оператора A, то $(X^s, \Gamma_1^s, \Gamma_2^s)$ — ПГЗ оператора A^s.

Предложение 2. Пусть $(X^s, \Gamma_1^s, \Gamma_2^s)$ — ПГЗ оператора A^s такое, что X^s — комплексное линейное пространство с антиинволюцией J_0, причем $J_0\Gamma_i^s = \Gamma_i^s J$, где $Jf = jf \quad (\forall f \in H)$. Тогда это ПГЗ порождает ПГЗ оператора A.

Доказательство. Определим в X^s умножение вектора x на число $q \in Q, \quad q = z_1 + z_2 j$ по следующему правилу: $qx := z_1 x + z_2 J_0 x$. Полученное q-линейное пространство обозначим X.

Положим $\Gamma_i f := \Gamma_i^s f$. При этом для любого $q \in Q \quad q = z_1 + z_2 j$

$\Gamma_i(qf) = \Gamma_i^s(z_1 f + z_2 jf) = z_1\Gamma_i^s f + z_2\Gamma_i^s(jf) = z_1\Gamma_i^s f + z_2 J_0\Gamma_i^s(f) = q\Gamma_i^s f = q\Gamma_i f.$

Таким образом, операторы $\Gamma_i \quad (i = 1, 2)$ являются q-линейными операторами, действующими из $D(A^*)$ в X.

Введем в пространстве X q-скалярное произведение

$$\langle x, y\rangle := (x, y)_{X^s} + (x, Jy)_{X^s} j.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\langle A^* f, g\rangle_H - \langle f, A^* g\rangle_H = \\
&= ((A^s) * f, g) + ((A^s) * f, jg)j - (f, (A^s)^* g) - (f, (A^s)^*(jg))j = \\
&= (\Gamma_1^s f, \Gamma_2^s g) - (\Gamma_2^s f, \Gamma_1^s g) + (\Gamma_1^s f, \Gamma_2^s(jg))j - (\Gamma_2^s f, \Gamma_1^s(jg))j = \\
&= (\Gamma_1^s f, \Gamma_2^s g) + (\Gamma_1^s f, J_0\Gamma_2^s(g))j - (\Gamma_2^s f, \Gamma_1^s g) - (\Gamma_2^s f, J_0\Gamma_1^s(g))j = \\
&= \langle \Gamma_1 f, \Gamma_2 g\rangle_X - \langle \Gamma_2 f, \Gamma_1 g\rangle_X.
\end{aligned}$$

Следовательно, (X, Γ_1, Γ_2) — ПГЗ оператора A.

Обсудим проблему существования пространства граничных значений симметрического оператора A. Предположим, что симплектический образ этого оператора имеет четные и равные дефектные числа. Рассмотрим так называемое каноническое пространство граничных значений оператора A^s. Пусть $X^s = \mathfrak{N}_{-i}$, где $\mathfrak{N}_\lambda = R(A^s - \lambda I)^\perp$ — дефектное подпространство оператора A^s. $\Gamma_i^s = P_{-i} + VP_i$; $\Gamma_i^s = -iP_i + iVP_i$, где P_{-i} — проектор $D(A^*)$ на $\mathfrak{N}_{-i}$ параллельно подпространству $D(A) \dotplus \mathfrak{N}_i$, P_i — проектор $D(A^*)$ на подпространство $\mathfrak{N}_i$ параллельно подпространству $D(A) \dotplus \mathfrak{N}_{-i}$, V — унитарное отображение $\mathfrak{N}_i$ на $\mathfrak{N}_{-i}$. Тогда $(X^s, \Gamma_1^s, \Gamma_2^s)$ — ПГЗ оператора A^s.

Пусть $\dim X^s = 2$, n_{-i}^1, n_{-i}^2 — ортонормированиый базис в $\mathfrak{N}_{-i}, n_i^1 = -jn_{-i}^2$, $n_i^2 = jn_{-i}^1$ — ортонормированиый базис в $\mathfrak{N}_i$. Зададим оператор V следующим образом: $Vn_i^k = n_{-i}^k, \quad k = 1, 2$.

Если $f \in D(A^*)$, то

$$f = f_0 + (c_1 n_i^1 + c_2 n_i^2) + (d_1 n_{-i}^1 + d_2 n_{-i}^2)$$

$$jf = jf_0 + (\overline{c_1} n_{-i}^2 - \overline{c_2} n_{-i}^1) + (\overline{d_1} n_i^2 - \overline{d_2} n_i^1).$$

При этом

$$\Gamma_1^s(jf) = \overline{c_1}n_{-i}^2 - \overline{c_2}n_{-i}^1 + \overline{d_1}n_{-i}^2 - \overline{d_2}n_{-i}^1 = -(\overline{c_2} + \overline{d_2})n_{-i}^1 + (\overline{c_1} + \overline{d_1})n_{-i}^2$$
$$\Gamma_1^s(f) = d_1n_{-i}^1 + d_2n_{-i}^2 + c_1n_{-i}^1 + c_2n_{-i}^2 = (c_1 + d_1)n_{-i}^1 + (c_2 + d_2)n_{-i}^2$$

В качестве антиинволюции J_0 в $\mathfrak{N}_{-i}$ выберем такое отображение:

$$J_0(x_1n_{-i}^1 + x_2n_{-i}^2) = -\overline{x_2}n_{-i}^1 + \overline{x_1}n_{-i}^2.$$

Тогда

$$J\Gamma_1^s f = -(\overline{c_2} + \overline{d_2})n_{-i}^1 + (\overline{c_1} + \overline{d_1})n_{-i}^2.$$

Следовательно, $J_0\Gamma_1^s = \Gamma_1^s J$.

Аналогично можно показать, что $J_0\Gamma_2^s = \Gamma_2^s J$.

Согласно предложению 2 такое ПГЗ оператора A^s порождает ПГЗ оператора A. Аналогичные рассуждения можно провести для случая $\dim X^s = 2n$.

Заметим, что $\dim_C X^s = 2\dim_Q X$. На основании предложения 1 $(X^s, \Gamma_1^s, \Gamma_2^s)$ — ПГЗ оператора A^s. Известно, что $\dim_C X^s = 2\dim \mathfrak{N}_\lambda$. Следовательно, если дефектные числа оператора A^s нечетные, то для соответствующего оператора A нельзя построить ПГЗ в смысле определения 1.

4. Характеристическая функция симметрического оператора

Пусть A — симмметрический оператор в квартерионном гильбертовом пространстве H, (X, Γ_1, Γ_2) — его ПГЗ.

При любом $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\ \lambda \neq 0$ обозначим через A_λ расширение оператора A^s, задаваемое равенствами:

$$D(A_\lambda) = D(A) \dotplus \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}},$$
$$A_\lambda(f_0 + f_{\overline{\lambda}}) = A^s f_0 + \lambda f_{\overline{\lambda}} \quad (f_0 \in D(A^s), f_{\overline{\lambda}} \in \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}).$$

Как известно, при $\mathrm{Im}\ \lambda \geqslant 0 \quad (\mathrm{Im}\ \lambda \leqslant 0) \quad A_\lambda$ является максимальным диссипативным (аккумулятивным) оператором. В работе [6] показано, что равенства

$$\begin{aligned} C(\lambda)(\Gamma_1 + i\Gamma_2)f &= (\Gamma_1 - i\Gamma_2)f, \quad (\mathrm{Im}\ \lambda \geqslant 0) \\ C(\lambda)(\Gamma_1 - i\Gamma_2)f &= (\Gamma_1 + i\Gamma_2)f, \quad (\mathrm{Im}\ \lambda \leqslant 0) \end{aligned} \tag{1}$$

на множестве $f \in D(A_\lambda)$ определяет сжимающую аналитическую оператор-функцию комплексного переменного $C(\lambda)$, действующую в X^s, которую будем называть характеристической функцией оператора A. Так как тройка $(X^s, \Gamma_1^s, \Gamma_2^s)$ есть ПГЗ оператора A^s, то $C(\lambda)$ совпадает с характеристической функцией оператора A^s.

Пример 1. Рассмотрим в пространстве $H = L_Q^2[0,1]$ на множестве $D(A) = \{f(t) \in L_Q^2[0,1] | f' \in L_Q^2[0,1], f(0) = f(1) = 0\}$ симметрический оператор $(Af)(t) = f'(t)i$. Как показывают вычисления,

$$\langle A^*f, g\rangle - \langle f, A^*g\rangle = f(1)i\overline{g(1)} - f(0)i\overline{g(0)}.$$

Поэтому выберем пространство граничных значений данного оператора следующим образом:

$$X = Q, (\Gamma_1 f)(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(f(0) - f(1))i; \quad (\Gamma_2 f)(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(f(0) + f(1)).$$

Дефектное подпространство соответствующего с-линейного оператора A^s имеет вид: $\mathfrak{N}_\lambda = \mathrm{span}\{e^{-i\lambda t}, e^{i\lambda t}j\}$. Тогда в соответствии с равенствами (1)

$$C(\lambda) = -e^{i\lambda} I_2, \quad (\mathrm{Im}\ \lambda > 0),$$
$$C(\lambda) = -e^{-i\lambda} I_2, \quad (\mathrm{Im}\ \lambda < 0).$$

Если $H, (X, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — некоторое ПГЗ оператора A, то для любого сжатия K в X сужение оператора A^* на множестве векторов $y \in D(A^*)$, удовлетворяющих условию

$$K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)y = (\Gamma_1 - i\Gamma_2)y,$$

представляет собой регулярное расширение A_K оператора A. Причем, симплектический образ A_K^s является максимальным диссипативным расширением оператора A^s [6]. В этом случае на основании результатов работы [6] можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того, чтобы класс $K(\lambda)$, $\mathrm{Im}\ \lambda \geqslant 0$ принадлежал множеству собственных значений оператора A_K, необходимо и достаточно, чтобы 0 был собственным значением оператора $C(\lambda) - K^s$. Причем, размерность соответствующих вещественных собственных подпространств оператора A_K равна $2s$, где s — размерность ядра оператора $C(\lambda) - K^s$.*

Заключение

Таким образом, в настоящей работе дается определение пространства граничных значений симметрического оператора, действующего в кватернионном гильбертовом пространстве, и рассматриваются условия его существования. В терминах характеристических функций таких операторов получено описание дискретного спектра некоторого класса их регулярных расширений.

Представляется интересным обобщить полученные результаты на эрмитовы операторы с неплотной областью определения, а также использовать рассмотренную методику для исследования кососимметрических операторов и их расширений.

Список литературы

1. Horwitz L.P. Some spectral properties of anti-selfadjoint operators on quaternionic Hilbert spaces// Journal of math, phisics, Bd.34. - 1993. - Vol.8. - P.3405.
2. Leo S.De. Quaternionic eigenvalue problem // Journal of math, phisics, Bd.43. - 2002. - Vol.11. - P.5815-5829.

3. Scolarici G. Pseudoanti-Hermitian operators in quaternionic quantum mechanics // Journal of math, phisics, Bd.35. - 2002. - Vol.34. - P.7493-7606.
4. Viswanath K. Normal operators on quaternionic Hilbert spaces // Trans. Amer. Math. - 1971. - Vol.162. - P.337-350.
5. Деркач В.А. Маламуд М.М. Эрмитовы операторы с лакунами и функция Вейля // Докл. АН СССР. - 1987. - Vol.293 №5. - С.1041-1046.
6. Кочубей А.Н. О характеристических функциях симметрических операторов и их расширений// Изв. АН Арм.ССР XV. - 1980. - №3. - С.219-231.