УДК 517.98

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, ПОРОЖДАЮЩЕЙ ВНУТРЕННЮЮ ЗАДАЧУ СОПРЯЖЕНИЯ

Старков П.А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО,
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ и ИНФОРМАТИКИ
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г.СИМФЕРОПОЛЬ, КРЫМ, УКРАИНА, 95007
E-MAIL: *pstarksci@aport.ru*

Abstract.

In the paper, some initial-boundary value problem of mathematical physio is considered. The problem generates interim transmission problem that was investigated earlier. Time derivative into the equation, and the fixed complex parameter enters into the boundary condition. *The purpose of the work* is to show application of the operator method for studying of this initial-boundary value problem.

1. Постановка задачи

Будем считать, что $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — односвязная ограниченная область с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$. Для функции $u = u(t,x), x = x(x_1,\dots,x_m) \in \Omega, t \geqslant 0$, рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u - \Delta u = f(t,x) \quad (\text{в } \Omega), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \mu u + \varphi(t,x) \quad (\text{на } \Gamma), \quad u(0,x) = u^0(x); \tag{2}$$

здесь $f(t,x)$ и $\varphi(t,x)$ — заданные функции в области Ω и на Γ соответственно, μ – заданное комплексное число, а $u(t,x)$ — искомая функция.

Задача (1)-(2) порождает внутреннюю задачу сопряжения, если положить $f(t,x) \equiv 0, \varphi(t,x) \equiv 0$ и искать решение в виде

$$u(t,x) = e^{\lambda t}u(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Тогда для амплитудных функций $u(x)$ приходим к задаче, которая изучалась в [1]-[4].

2. Исследование задачи

Если в (1)-(2) $\mu \in \mathbb{R}$, то эта задача приводится к стандартному уравнению параболического типа в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. При $\mu \in \mathbb{C}$ применим тот же операторный подход, который использовался в [4].

В статье будут использоваться следующие обозначения скалярных произведений: $(\cdot,\cdot)_\Omega$ для $L_2(\Omega)$ и $(\cdot,\cdot)_0$ для $L_2(\Gamma)$. Будем считать, что искомая функция

$u(t,x)$ есть функция переменной t со значениями в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega) := W_2^1(\Omega) \subset H := L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(\xi, \psi)_{1,\Omega} = \int\limits_{\Omega} [\xi\overline{\psi} + \nabla\xi \cdot \overline{\nabla\psi}] d\Omega.$$

В связи с этим далее $\partial/\partial t$ заменим на d/dt. Представим решение $u(t)$ в виде суммы $u(t) = v(t) + w(t)$, где $v(t)$ и $w(t)$ решения следующих вспомогательных краевых задач.

Первая вспомогательная задача:

$$Av := v - \Delta v = \hat{f} := f - \frac{du}{dt} \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ (на } \Gamma). \tag{4}$$

Вторая вспомогательная задача:

$$w - \Delta w = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \hat{\psi} := \mu u + \varphi \text{ (на } \Gamma). \tag{5}$$

Введём оснащения гильбертовых пространств $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$:

$$H^1 \subset H = L_2(\Omega) \subset (H^1)^*, \quad H^{1/2}(\Gamma) \subset L_2(\Gamma) \subset (H^{1/2}(\Gamma))^*. \tag{6}$$

Тогда при $v \in H^1$ линейный ограниченный функционал $l(v) := (v, \varphi)_\Omega, \quad \varphi \in H$, расширяется по непрерывности на элементы $\varphi \in (H^1)^*$. Этот функционал будем обозначать следующим образом

$$\tilde{l}(v) := \langle v, \varphi \rangle_\Omega, \quad v \in H^1, \varphi \in (H^1)^*, \tag{7}$$

причем имеет место равенство

$$|\langle v, \varphi \rangle_\Omega| \leqslant ||v||_{1,\Omega} \cdot ||\varphi||_{(H^1)^*}. \tag{8}$$

Аналогичные факты справедливы и для второй тройки пространств в (6): взамен функционала $(\varphi, \psi)_0$ приходим к функционалу $\langle \varphi, \psi \rangle_0$ с оценкой

$$|\langle \varphi, \psi \rangle_0| \leqslant ||\varphi||_{H^{1/2}(\Gamma)} \cdot ||\psi||_{(H^{1/2}(\Gamma))^*}. \tag{9}$$

Определение 1. Элемент $v \in H^1$ называется обобщенным решением первой вспомогательной задачи, если

$$(\eta, v)_{1,\Omega} = \langle \eta, \hat{f} \rangle_\Omega, \quad \forall \eta \in H^1. \tag{10}$$

Определение 2. Элемент $w \in H^1$ называется обобщенным решением второй вспомогательной задачи, если

$$(\eta, w)_{1,\Omega} = \langle \gamma\eta, \hat{\psi} \rangle_0, \quad \gamma\eta = \eta \mid_\Gamma, \quad \forall \eta \in H^1. \tag{11}$$

Первая и вторая вспомогательные задачи хорошо известны и подробно разобраны, в частности, в [4]. Решение задачи (4) даётся формулой

$$v = A^{-1}\left(f - \frac{du}{dt}\right), \tag{12}$$

а задача (5) — формулой

$$w = T(\mu\gamma u + \varphi). \tag{13}$$

Таким образом, формальные преобразования задачи (1)-(2) приводят к следующей системе уравнений и начальному условию:

$$u(t) = v(t) + w(t), \quad \frac{du}{dt} + Av = f(t), \tag{14}$$

$$w(t) = \mu T\gamma u(t) + T\varphi(t), \quad u(0) = u^0, \tag{15}$$

где A и T — операторы краевых задач (4) и (5) соответственно. Напомним свойства операторов A и T.

1) оператор A положительно определён и самосопряжен в пространстве H на области определения

$$\mathcal{D}(A) := \left\{u \in H^1 : \Delta u \in H, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ (на } \Gamma)\right\};$$

2) оператор A имеет дискретный спектр $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$, состоящий из конечнократных положительных собственных значений $\lambda_k(A)$ с предельной точкой $+\infty$ и асимптотическим поведением

$$\lambda_k(A) = (\mathrm{c}_A)^{-2/3}k^{2/3}[1 + o(1)] \ (k \to \infty), \ \mathrm{c}_A = \frac{\operatorname{mes}\Omega}{6\pi^2}, \ \Omega \in \mathbb{R}^3; \tag{16}$$

3) оператор A^{-1} положителен и компактен

$$0 < A^{-1} \in \mathfrak{S}(H);$$

4) энергетическое пространство H_A оператора A совпадает с $\mathcal{D}(A^{1/2})$ и соответствующие нормы также совпадают

$$||u||_A^2 = ||u||_{1,\Omega}^2 = \int\limits_\Omega \left[|u|^2 + |\nabla u|^2\right] d\Omega;$$

5) оператор T ограничено действует из $(H^{1/2(\Gamma)})^*$ в H^1 и справедливо тождество

$$(\eta, T\psi)_{1,\Omega} = \langle\gamma\eta, \psi\rangle_0, \quad \forall\eta \in H^1, \quad \forall\psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^*. \tag{17}$$

В системе уравнений (14), (15) исключим искомые функции $u(t)$ и $w(t)$ и получим дифференциальное уравнение для $v(t)$. Из уравнения (15) с учетом первого уравнения (14) получим

$$(I - \mu T\gamma)\omega = \mu T\gamma v + T\varphi. \tag{18}$$

Лемма 1. *Оператор $T\gamma : H^1 \to H^1$ имеет представление*

$$T\gamma = A^{-1/2}(A^{-1/2}T)(\gamma A^{-1/2})A^{-1/2} =: A^{-1/2}Q^*QA^{-1/2} =: F, \tag{19}$$

и поэтому является неотрицательным компактным оператором с ядром

$$\ker F = \ker (T\gamma) = \overset{0}{H}_A := \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = 0\}. \tag{20}$$

Далее будем предполагать, что число μ невещественное либо принимает неисключительные вещественные значения, т.е.

$$\mu \neq \lambda_k^{-1}(F), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

где $\{\lambda_k(F)\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность положительных собственных значений оператора F (с предельной точкой $\lambda = 0$). Тогда (по лемме 1 оператор $I - \mu T\gamma$ ограниченно обратим и из (18) имеем

$$w = (I - \mu T\gamma)^{-1}(\mu T\gamma v + T\varphi). \tag{22}$$

Опираясь на это представление и на первую формулу (14), исключим во второй формуле (14) $w(t)$ (путём дифференцирования (22) по t); это дает уравнение для $v(t)$, которое, как легко проверить, имеет вид

$$(I - \mu T\gamma)^{-1}\frac{dv}{dt} + Av = f(t) - (I - \mu T\gamma)^{-1}T\frac{d\varphi}{dt}. \tag{23}$$

Применяя слева оператор $(I - \mu T\gamma)$, приходим к задаче Коши

$$\frac{dv}{dt} + (I - \mu T\gamma)Av = (I - \mu T\gamma)f(t) - T\frac{d\varphi}{dt}, \tag{24}$$

$$v(0) = u^0 - w(0) = (I - \mu T\gamma)u^0 - T\varphi(0), \tag{25}$$

для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega)$, где искомой является функция $v(t)$ со значениями в H^1, а заданными — функции $f(t)$ со значениями в H^1 и $\varphi(t)$ со значениями в $L_2(\Gamma)$.

Преобразуем задачу (24), (25) к эквивалентной форме, введя замену искомой функции по закону

$$v(t) = A^{1/2}\eta(t), \tag{26}$$

где $\eta(t)$ – функция со значениями в гильбертовом пространстве H. Тогда, действуя слева ограниченным оператором $A^{1/2} : H^1 \to H$, приходим к задаче Коши

$$\frac{d\eta}{dt} + (I - \mu B)A\eta = (I - \mu B)A^{1/2}f(t) - Q^*\frac{d\varphi}{dt}, \tag{27}$$

$$B := Q^*Q, \quad \eta(0) = (I - \mu B)A^{1/2}u^0 - Q^*\varphi(0), \tag{28}$$

для функции $\eta(t)$. Здесь Q и Q^* – компактные операторы, введенные ранее в (19). Спектр B совпадает со спектром оператора F и потому B – компактный неотрицательный оператор, действующий в H.

Определение 3. Назовем функцию $\eta(t)$ со значениями в H сильным решением Задачи Коши (27), (28) на отрезке $[0,\tau]$, если $\eta(t) \in \mathcal{D}(A)$ при любом $t \in [0,\tau]$, $A\eta(t) \in C([0,\tau];H)$, $\eta(t) \in C^1([0,\tau];H)$ и выполнено уравнение (27), а также начальное условие (28).

Аналогичным образом введем определение сильного решения $v(t)$ со значениями в H^1 на отрезке $[0,\tau]$ для задачи (24), (25).

Теорема 1. *Если выполнено условие* (21)*, а также условия*

$$\begin{gathered} f(t) \in C^{\alpha}([0,\tau];\mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1(\Omega)), \quad \alpha > 0, \\ \varphi(t) \in C^{1+\alpha}([0,\tau];(H^{1/2}(\Gamma))^*), \\ (I-\mu B)A^{1/2}u^0 - Q^*\varphi(0) \in \mathcal{D}(A) \subset H = L_2(\Omega), \end{gathered} \tag{29}$$

то задача Коши (27), (28) *имеет единственное сильное решение* $\eta(t)$ *на отрезке* $[0,\tau]$*, а задача* (24), (25) *также имеет единственное сильное решение* $v(t)$ *на отрезке* $[0,\tau]$ *(в смысле введенных определений).*

Доказательство. Так как оператор B в (24) компактен, а оператор A – неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, то оператор $-(I-\mu B)A$ является генератором аналитической полугруппы $\mathcal{U}(t)$. Далее, из первого условия (29) следует, что

$$(I-\mu B)A^{1/2}f(t) \in C^{\alpha}([0,\tau];H),$$

а из второго условия (29) и того факта, что оператор $Q^* : (H^{1/2}(\Gamma))^* \to H$ является ограниченным, следует, что

$$Q^*\frac{d\varphi}{dt} \in C^{\alpha}([0,\tau];H).$$

Поэтому правая часть в (27) является элементом из этого пространства:

$$(I-\mu B)A^{1/2}f(t) - Q^*\frac{d\varphi}{dt} \in C^{\alpha}([0,\tau];H), \quad \alpha > 0. \tag{30}$$

Далее, если при $t = 0$ начальные элементы u^0 и $\varphi(0)$ согласованы таким образом, что выполнено последнее условие (29), то $\eta(0) \in \mathcal{D}(A)$ (см. (28)). Поэтому по известной теореме о сильной разрешимости задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с операторным коэффициентом, являющимся генератором аналитической полугруппы (см. например, [5]. А также [6], приходим к выводу, что задача Коши (27), (28) имеет единственное сильное решение $\eta(t)$ на отрезке $[0,\tau]$ со значениями в H.

Доказательство второго утверждения теоремы при условиях (29) совершенно такое же, но оно проводится в пространстве $H_A = H^1$.

Будем теперь считать, что выполнены условия (29) и потому каждая из задач (27), (28) и (24), (25) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,\tau]$. Вернемся от задачи (24), (25) к исходной задаче (1), (2) и определим, в каком смысле выполняются уравнение и граничное условие исходной задачи.

Так как $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1$, то решение $v(t)$ задачи (24), (25) обладает свойством

$$v(t) \in C([0,\tau];\mathcal{D}(A^{3/2}))\bigcap C^1([0,\tau];\mathcal{D}(A^{1/2})). \tag{31}$$

При этом все слагаемые в уравнении (24) являются непрерывными функциями t со значениями в $\mathcal{D}(A^{1/2})$. Отсюда следует, что имеет место уравнение (23), которое можно переписать в виде

$$(I+\mu T\gamma(I-\mu T\gamma)^{-1})\frac{dv}{dt} + Av = f(t) - (I-\mu T\gamma)^{-1}T\frac{d\varphi}{dt}, \tag{32}$$

где снова все слагаемые – элементы из $C([0,\tau];\mathcal{D}(A^{1/2}))$.

Введем в (32) функцию $w(t)$, полагая

$$\frac{dw}{dt} = \mu T\gamma(I-\mu T\gamma)^{-1}\frac{dv}{dt} + (I-\mu T\gamma)^{-1}T\frac{d\varphi}{dt}, \quad w(0) = \mu T\gamma u^0 + T\varphi(0).$$

Тогда очевидно, что $w(t)$ выражается формулой (22), и, кроме того,

$$w(t) \in C^1([0,\tau];\mathcal{D}(A^{1/2})). \tag{33}$$

Из (22) следует, что справедливо соотношение (18), где снова все слагаемые – элементы из $C^1([0,\tau];\mathcal{D}(A^{1/2}))$.

Введем теперь функцию $u(t)$ согласно первой формуле (14). Тогда из (18) получаем, что справедлива формула (15), где все слагаемые – элементы из $C^1([0,\tau];\mathcal{D}(A^{1/2}))$. После проведенных замен уравнение (32) принимает вид второго уравнения (14). Таким образом, установлено, что для сильного решения задачи (24), (25) справедливы уравнения (14), (15), где каждое слагаемое принадлежит пространству $C^1([0,\tau];\mathcal{D}(A^{1/2}))$.

Определение 4. Будем говорить, что задача (1), (2) имеет сильное решение $u(t)$ на отрезке $[0,\tau]$ со значениями в H^1, если выполнены следующие условия:

а) функция $u(t)$ представляется в виде суммы $u(t) = v(t) + w(t)$, где $v(t)$ обладает свойствами (31), $w(t)$ – свойством (33) и для этих функций при любом $t \in [0,\tau]$ справедливы соотношения (14), где слагаемые являются элементами из $C^1([0,\tau];\mathcal{D}(A^{1/2})) = H^1$ (для первого уравнения (14) и уравнения (15)) и из $C([0,\tau];\mathcal{D}(A^{1/2}))$ (для второго уравнения (14));

б) выполнено начальное условие (15).

Итогом рассмотрения задачи (1), (2) является следующее утверждение.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (21), (29), *то задача* (1), (2) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,\tau]$ *со значениями в* $H^1(\Omega)$. *Для этого решения* *выполнено уравнение* (1)*, где все слагаемые являются элементами из* $C([0,\tau];H^1)$*, а также граничное условие* (2) *где все слагаемые – элементы из* $C^1([0,\tau];(H^{1/2}(\Gamma))^*)$.

Доказательство. Утверждение первой части теоремы уже проведено выше. Заметим только, что для выполнения последнего условия (29) необходимо, чтобы $u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2}, \varphi(0) \in (H^{1/2}(\Gamma))^*$.

Далее, в силу определений обобщенных решений задач (4), (5) (см. также (10), (11) из соотношений (14), (15) имеем тождества

$$(\eta, v)_{1,\Omega} = \langle \eta, f - \frac{du}{dt}\rangle_\Omega, \quad u = v + w, \quad (\eta, w)_{1,\Omega} = \langle \gamma\eta, \mu\gamma u + \varphi\rangle_0, \quad \forall \eta \in H^1. \tag{34}$$

Складывая левые и правые части и учитывая второе равенство (34), получим

$$\left(\eta, \frac{du}{dt}\right)_\Omega + (\eta, u)_{1,\Omega} = (\eta, f)_\Omega + \langle \gamma\eta, \mu\gamma u + \varphi\rangle_0, \tag{35}$$

где с учетом доказанных свойств элементов из (14), (15) функционалы заменены скалярными произведениями.

Заметим теперь, что при любом $t \in [0,\tau]$ функция $w(t)$ принадлежит подпространству

$$U = \{w \in H_A : w = T\psi, \quad \forall \psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^*\} \subset H^1, \tag{36}$$

и потому для ее элементов $\Delta w = w \in H^1$. Тогда с учетом свойства (31) получаем, что $\Delta u = \Delta w + \Delta v \in H^1$, поэтому для элементов η из H^1 и u имеет место формула Грина

$$(\eta, u - \Delta u)_\Omega = (\eta, u)_{1,\Omega} - \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\right\rangle_0, \quad \forall \eta \in H^1, \tag{37}$$

где снова вместо функционала стоит скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Из (35), (37) следует, что

$$\left(\eta, \frac{du}{dt} + u - \Delta u - f\right)_\Omega + \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} - (\mu\gamma u + \varphi)\right\rangle_0 = 0, \tag{38}$$

откуда в силу произвольности $\eta \in H^1$ следует уравнение (1) со значениями элементов из H^1 и граничное условие (2) со значениями элементов из $(H^{1/2}(\Gamma))^*$.

Заметим еще, что в силу доказанных свойств функции $u(t)$ все слагаемые в (1) являются непрерывными функциями t, а в граничном условии (2) – непрерывно дифференцируемыми.

Заключение

В работе исследована начально-краевая задача математической физики с первой производной по времени в уравнении и комплексным параметром в граничном условии. Сформулирована и доказана теорема о существовании и единственности сильного решения.

Автор благодарит Н.Д. Копачевского за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

1. Агранович М.С., Менникен Р. Спектральные задачи для уравнения Гельмгольса со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности. // Математич. сборник. – 1999. – Т. 190, № 1. – с. 29-68.
2. Agranovich M.S., Katsenelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voilovich N.N. Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory – Berlin: WILEY-VCH Verlag. – 1999. 377 p. ISDN 3-527-40092-3
3. Горбачук В.И. Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений // Функциональные и численные методы математической физики. Институт математики и механинки: Сб.науч.тр./ Редкол.: И.В. Скрыпник и др. – Киев: Наукова думка, – 1988. - с. 60-63
4. Старков П.А. Операторный подход к задачам сопряжения // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. – 2002. – Т. 15(54), № 1. – с. 58-63
5. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – Москва: Наука, 1967. – 464 с.
6. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. – Киев: Выща шк., 1989. – 347 с.
7. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кап. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – Москва: Наука, – 1989. – 416 с.