УДК 517.983

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ РАЗЛОЖИМОСТИ НЕВЫРОЖДЕННЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ВНУТРЕННИМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Д.Л. Тышкевич

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *dtyshk@crimea.edu*

Abstract

Collection of vectors in inner product space (IPS) we call *antineutral* if each vector of this collection is not neutral. Antineutral system $\mathcal{G} = \{g\}_{n\in\mathbb{N}}$ we call *step-nondegenerated* if $\mathrm{Lin}\{g_i|i \in \overline{1,n}\}$ ($\mathrm{Lin}\,X$ is linear hull of X) is nondegenerated for every $n \in \mathbb{N}$. In this article we proved that every nondegenerated algebraically separable lineal in IPS contains step-nondegenerated Hamel basis. In particular, this result implies existing of topological orthonormal basis in every nondegenerated separable IPS.

Введение

Хорошо известно, какую важную роль в функциональном анализе играют исследования различного типа базисов в линейных топологических пространствах. Что касается теории пространств с внутренним произведением (далее сокращенно ПВП), то здесь представляют интерес главным образом ортогональные и ортонормированные системы. Некоторые аспекты этого вопроса для случая J - ортонормированных систем в пространствах Крейна исследованы в монографии [1]. Там же приводятся и соответствующие ссылки. Отметим, что в последнее время появляются работы, посвященные вопросам, хотя прямо и не имеющим дела, но методически тесно связанным с проблемами построения различных систем в ПВП ([3] - [7]).

При ортогонализации конечной либо счетной линейно независимой системы векторов в евклидовом пространстве методом Гильберта-Шмидта основную роль для возможности образования новой, ортогональной системы векторов, строящейся путём составления особых линейных комбинаций векторов исходной системы, играет строгая положительность внутреннего произведения. Именно это свойство подобрать в соответствующих линейных комбинациях коэффициенты,строящиеся путем деления скалярных произведений векторов на скалярные квадраты.

Непосредственное перенесение этого метода ортогонализации на произвольные *счетные* системы векторов в произвольных ПВП невозможно, так как в ходе процесса ортогонализации можно столкнуться с нулевыми скалярными квадратами из-за наличия (ненулевых) нейтральных векторов при индефинитном внутреннем произведении (в случае конечной системы эту трудность можно легко обойти, непосредственно находя ортогональный базис конечномерной линейной оболочки исходной системы благодаря разложимости конечномерных ПВП в ортогональную сумму отрицательного, нейтрального и положительного подпространств). это определяет необходимость *постановки следующей проблемы.* Определить условия на счетную систему векторов, при которых возможно провести ее ортогонализацию методом Гильберта-Шмидта.

Насколько нам известно, *вопрос* о возможности ортогонализации произвольной совокупности векторов в индефинитном ПВП *является нерешенным.* Целью работы является изучение таких счетных систем векторов в ПВП, для которых осуществим последовательный корректный последовательный процесс ортогонализации. Оказывается, для систем определенного вида (так называемых *ступепчато невырожденных,* – см. определение 2) такое непосредственное перенесение метода ортогонализации возможно. Главный и нетривиальный результат данной работы состоит в том, что произвольную *счетную* линейно незаивмиую систему, линейная оболочка которой невырождена, можно привести к ступенчато невырожденной системе путём составления линейных комбинаций векторов исходной системы.

Со всеми необходимыми понятиями, которые используются, но не определяются в данной работе, можно ознакомится в [1], [2]. Через E, $r(\mathrm{A})$ и $tr(A)$ обозначены соответственно единичная матрица, ранг и след матрицы A. Под $\overline{a,b}$ $(a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \cup \infty, a \leqslant b)$ мы подразумеваем множество $\{a \in \mathbb{N} | a \leqslant n \leqslant b\}$. Через $\operatorname{Lin} X$ обозначается линейная оболочка множества X.

1. Ступенчато невырожденные системы.

Предварительно сформулируем ряд вспомогательных результатов.

Лемма 1. *Пусть G и C – комплексные самосопряженные матрицы размерностей n и k соответственно; матрица C обратима, B – матрица размерности $n \times k$. Рассмотрим самосопряженную матрицу $\widetilde{G}$ размерности $n \times k$, заданную блочно:*

$$\widetilde{G} = \begin{pmatrix} G & B \\ G^* & C \end{pmatrix}$$

Тогда

$$N(\widetilde{G}) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \big| y_1 \in N(G - BC^{-1}B^*), y_2 = -C^{-1}B^*y_1 \right\} \tag{1}$$

Из (1) *в частности следует*

$$N(\widetilde{G}) = \{0\} \Leftrightarrow N(G - BC^{-1}B^*) = \{0\} \tag{2}$$

($N(A)$ – нуль-множество матрицы $A = \{x \in \mathbb{C}^n | Ax = 0\}$).

Доказательство. Пусть $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in C^{n+k}$ (здесь мы естественным образом отождествляем пространства C^{n+k} и $C^n \times C^k$). Тогда очевидна цепочка

$\widetilde{G}y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Gy_1 + By_2 = 0 \\ B^*y_1 + Cy_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Gy_1 + By_2 = 0 \\ y_2 = -C^{-1}B^*y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (G - BC^{-1}B^*)y_1 = 0 \\ y_2 = -C^{-1}B^*y_1 \end{cases}$
откуда вытекает (1).

Лемма 2. *Пусть A – квадратная матрица, $r(A) = 1$. Матрица $E - A$ – тогда и только тогда, когда $tr(A) \neq 1$*

Доказательство. Это утверждение следует из известного свойства для квадратных матриц A ранга 1:

$$\sigma(A) = \{0, tr(A)\}.$$

Лемма 3. *Пусть A – квадратная матрица, B – матрица-столбец соответствующей размерности. Тогда $tr(ABB^*) = B^*AB$.*

Доказательство. $tr(ABB^*) = \sum_{i,j\in\overline{1,n}} a_{i,j}b_j\overline{b_i} = \sum_{i,j\in\overline{1,n}} \overline{b_i}a_{i,j}b_j = B^*AB$, где $A = \|a_{i,j}\|_{i,j\in\overline{1,n}}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Лемма 4. *Пусть G – обратимая самосопряженная матрица, B – матрица-столбец соответствующей размерности и c – ненулевое вещественное число (т.е. квадратная матрица размерности 1). Тогда матрица $\widetilde{G}$ из леммы* **??** *обратима если только если $B^*G^{-1}B \neq c$.*

Доказательство. Матрица $G - c^{-1}BB^*$ обратима тогда и только тогда, когда обратима матрица $E - c^{-1}G^{-1}BB^*$ (в силу обратимости G). Так как $r(E - c^{-1}G^{-1}BB^*) = 1$, то последнее, как следует из лемм **??**, **??** может иметь в том и только в том случае, когда $c^{-1}B^*G^{-1}B = tr(E - c^{-1}G^{-1}BB^*) \neq 1$.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{L}$ – невырожденный линеал, $x[\perp]\mathfrak{L}$, $x \neq 0$(а следовательно $x \notin \mathfrak{L}$ и $[x,x] \neq 0$). Тогда линеал $\mathfrak{L} + x$ – невырожден.*

Доказательство. Пусть $y[\perp](\mathfrak{L} + x)$б $y = l + \lambda x$, $l \in \mathfrak{L}$. Тогда $0 = [y,x] = [l,x] + \lambda[x,x] = \lambda[x,x]$. Так как $[x,x] \neq 0$, то $\lambda = 0$. Далее, для любого $l' \in \mathfrak{L}$ $0 = [y,l'] = [l,l']$. Так как $\mathfrak{L}$ – невырожден, то $l = 0$. Таким образом, $y = 0$.

Определение 1. Произвольную совокупность векторов ПВП назовем *антинейтральной*, если ни один из векторов заданной совокупности не является нейтральным.

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – линейно независимая антинейтральная система векторов, линеал $\mathfrak{L} = \operatorname{Lin}\mathcal{G}$ – невырожден и для некоторого $n \in \mathbb{N}$ невырожден линеал $\mathfrak{L}_n = \operatorname{Lin}\{g_i | i \in \overline{1,n}\}$. Пусть m – некоторое фиксированное число из $\mathbb{N}$. Тогда для любой совокупности чисел $\mathcal{N} = \{n_k | k \in \overline{1,m}\}$, $\mathcal{N} \subseteq \overline{m+2,\infty}$, $|\mathcal{N}| = m$ и для* *любого* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{C}_m \backslash \mathcal{F}$, *где* $\mathcal{F}$ *либо пусто, либо является объединением некоторого конечного числа связных комплексных многообразий размерности, не превышающей* $m-1$ *(*$\mathcal{F}$ *зависит от* $\mathcal{N}$*) существует такая система комплексных чисел* $\{\beta_k\}_{k\in\overline{1,n}}$ *(зависящая от* α*), что система* $\mathcal{G}' = \{g_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$*, где*

$$g_i' = \begin{cases} g_i, & i \in \mathbb{N}\backslash\{n+1\} \\ g_{n+1} + \sum_{k=1}^m \alpha_k g_{n_k} + \sum_{k=1}^n \beta_k g_k, & i = n+1 \end{cases}$$

является линейно независимой антинейтральной и линеал

$$\mathfrak{L}_n' = \mathrm{Lin}\{g_i' | i \in \overline{1, n+1}\} \text{ – невырожден.}$$

Доказательство. Пусть G – матрица Грама системы $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. По условию G – обратима. Пусть $G^{-1} = \|\gamma_{is}\|_{i,s\in\overline{1,n}}$. Введем следующие обозначения

$$Q_k(h) = \sum_{s=1}^n = \gamma_{ks}[h, g_s],$$

$$B(h) = \begin{pmatrix} [h,g_1] \\ \vdots \\ [h,g_n] \end{pmatrix}$$

(очевидно $h \to Q_k(h)$ и $h \to B(h)$ $(h \in \mathfrak{L})$ являются линейными отображениями на $\mathfrak{L}$). Нетрудно убедиться в том, что справедливо равенство

$$B^*(h_1)G^{-1}B(h_2) = \sum_{k=1}^n [g_k, h_1][h_2, Q_k(h_2)]. \tag{3}$$

Положим

$$g(\alpha) = g_{n+1} + \sum_{k+1}^m \alpha_k g_{n_k},$$

$$Q_k^\alpha = Q_k(g(\alpha)) \;\; (\alpha \in \mathbb{C}^m). \tag{4}$$

Рассмотрим следующие квадратичные формы:

$$\tau_j(\alpha) = [g(\alpha) + g_j, g(\alpha) + g_j] \; (j \in \overline{1,n})$$

$$\tau_{n+1}(\alpha) = [g(\alpha) - \sum_{i=1}^n [g(\alpha), Q_k^\alpha] g_i, g(\alpha) - \sum_{i=1}^n [g(\alpha), Q_k^\alpha] g_i] \tag{5}$$

В силу антинейтральности системы $\mathcal{G}$ (см. обозначения (4)) квадратичные формы τ_i $(i \in \overline{1, n+1})$ не являются нулевыми (так как, по меньшей мере, $[g_{n+1}, g_{n+1}] \neq 0$), поэтому каждое из множеств

$$\mathcal{F}_i = \{\alpha \in \mathbb{C}^m | \tau_i(\alpha) = 0\} \quad (i \in \overline{1, n+1})$$

либо пусто, либо является объединением некоторого конечного числа связных комплексных многообразий в $\mathbb{C}^m$ размерности, не превышающей $m-1$, а, следовательно, является таковым и множество

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i\in\overline{1,n+1}} \mathcal{F}_i. \tag{6}$$

Зафиксируем некоторое произвольное

$$\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{F}. \tag{7}$$

Вектор $g(\alpha)-\sum_{i=1}^n [g(\alpha), Q_k^\alpha]g_i$ – ненулевой в силу линейной независимости $\mathcal{G}$ (см. (4)). Поэтому, в силу невырожденности $\mathfrak{L}$ множество

$$\mathcal{J} = \{i \in \mathbb{N} | [g(\alpha) - \sum_{s=1}^n [g(\alpha), Q_s^\alpha]g_s, g_i] \neq 0\} \tag{8}$$

непусто. Пусть

$$j = \min \mathcal{J}. \tag{9}$$

Возможны два варианта:

(a) $j \in \overline{1,n}$. Из (3), (8) и (9) следует, что

$$B^*(g_j)G^{-1}B(g(\alpha)) \neq [g(\alpha), g_j].$$

Последнее дает возможность заключить, что квадратичная форма θ_1:

$$\theta_1(\beta) = B^*(g(\alpha)+\beta g_j)G^{-1}B(g(\alpha)+\beta g_j) - \theta_2(\beta),$$

где $\theta_2(\beta) = [g(\alpha)+\beta g_j, g(\alpha)+\beta g_j]$ $(\beta \in \mathbb{C})$ не является нулевой в силу антинейтральности $\mathcal{G}$ $([g_j, g_j] \neq 0)$. Поэтому существует такое β, что

$$\begin{array}{c} \theta_1(\beta) \neq 0, \\ \theta_2(\beta) \neq 0. \end{array} \tag{10}$$

Положим

$$g_i' = \begin{cases} g_i, & i \in \mathbb{N}\backslash\{n+1\} \\ g(\alpha)+\beta g_j, & i = n+1. \end{cases}$$

Матрицу Грама $\widetilde{G}$ системы $\mathcal{G} = \{g_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ можно записать в виде

$$\widetilde{G} = \begin{pmatrix} G & B \\ B^* & c \end{pmatrix}$$

где $B = B(g_{n+1}')$, $c = [g_{n+1}', g_{n+1}'] \neq 0$ (см. (10)). При этом, в силу выбора β в (10) $B^*G^{-1}B \neq c$, откуда по лемме 4 заключаем, сто матрица $\widetilde{G}$ – обратима, и, значит, линеал $\mathrm{Lin}\{g_i' | i \in \overline{1,n}\}$ – невырожден. Для этого случая

$$\beta_k = \begin{cases} \beta, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \qquad (k \in \overline{1,n}).$$

(b) $j > n$. Положим

$$g_i' = \begin{cases} g_i, & i \in \mathbb{N} \backslash \{n+1\} \\ g(\alpha) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k g_j, & i = n+1, \end{cases}$$

где $\beta_k = -[g(\alpha), Q_k^{\alpha}]$. В силу (7) -(9)

$$g_{n+1}'[\perp]\mathfrak{L}_n, \qquad g_{n+1}' \notin \mathfrak{L}_n \qquad [g_{n+1}', g_{n+1}'] \neq 0,$$

откуда из леммы 5 следует, что линеал $\mathfrak{L}_{N+1} = \mathfrak{L}_n + g_{n+1}'$ – невырожден.

Определение 2. Линейно независимую систему $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ назовем *ступенчато невырожденной,* если для любого $n \in \mathbb{N}$ линеал $\mathrm{Lin}\{g_i | i \in \overline{1,n}\}$ – невырожден.

Легко видеть, что если система $\mathcal{G}$ – ступенчато невырожденная, то $\mathrm{Lin}\,\mathcal{G}$ – невырожденный линеал; нетрудно понять, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В качестве простого контрпримера можно рассмотреть произвольный невырожденный линеал (со счетным базисом Гамеля), содержащий конечномерный вырожденный линеал; дополнив базис последнего до (нового) базиса исходного линеала, получим систему, не являющейся ступенчато невырожденной.

Лемма 7. *Пусть $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – линейно независимая антинейтральная система, и линеал $\mathfrak{L} = \mathrm{Lin}\,\mathcal{G}$ – невырожден. Существует такая антинейтральная ступенчато невырожденная система $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, что*

$$\mathfrak{L} = \mathrm{Lin}\,\mathcal{E} + g_1. \tag{11}$$

Доказательство. Определим индуктивно последовательность систем $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{G}_n = \{g_{ni}\}_{i \in \mathbb{N}}$. Положим

$$g_{1i} \begin{cases} g_2, & i = 1; \\ g_1, & i = 2; \\ g_i, & i \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2\} \end{cases}$$

(отметим, что линеал $\mathrm{Lin}\{g_{11}\}$- невырожден). Пусть система $\mathcal{G}_n$ уже определена; определим $\mathcal{G}_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Это определение будет зависеть от четности числа $n+1$.

(a) $n+1$ – *четное.* Положим $\mathcal{N}_{n+1} = \{n+2, n+3\}$; по лемме 6, примененной к системе $\mathcal{G}_n$ для любого $\alpha = (\alpha_{n+1,1}, \alpha_{n+1,2}) \in \mathbb{C}^2 \backslash \mathcal{F}_{n+1}$, где $\mathcal{F}_{n+1}$ – соответствующее многообразие, найдутся такие числа $\beta_{n+1,k}$ ($k \in \overline{1,n}$), что система $\mathcal{G}' = \{g_i'\}_{i \in \mathbb{N}}$,

$$g_i' = \begin{cases} g_{ni}, & i \in \mathbb{N} \backslash \{n+1\} \\ g_{n,n+1} + \alpha_{n+1,1} g_{n,n+2} + \alpha_{n+1,2} g_{n,n+3} + \sum_{k=1}^{n} \beta_{n+1,k} g_{n,k}, & i = n+1 \end{cases} \tag{12}$$

– является линейно независимой и антинейтральной, причем линеал $\mathfrak{L}_{n+1}' = \mathrm{Lin}\{g_i' | i \in \overline{1, n+1}\}$ – невырожден.

(b) $n+1$ – *нечетное*; положим $\mathcal{N}_{n+1} = \{n+2\}$ и выберем такое $\alpha_{n+1,1} \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{F}_{n+1}$, что

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \\ 1 & \alpha_{n+1,1} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{13}$$

(очевидно, это всегда можно сделать в силу строения $\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}$). Применяя лемму 6 к системе $\mathcal{G}_n$, получим соответствующую систему $\{\mathcal{G}'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$:

$$g'_i = \begin{cases} g_{ni}, & i \in \mathbb{N}\backslash\{n+1\} \\ g_{n,n+1} + \alpha_{n+1,1} g_{n,n+2} + \sum_{k=1}^{n} \beta_{n+1,k} g_{n,k}, & i = n+1 \end{cases} \tag{14}$$

с соответствующими числами $\beta_{n+1,1}, \ldots, \beta_{n+1,n}$.

Для обоих случаев (a) и (b) положим

$$g_{n+1,i} = g'_i \qquad (i \in \mathbb{N}).$$

Определим теперь систему $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, полагая $e_i = g_{ii}$ $(i \in \mathbb{N})$. Из соотношения $g_{n+1,i} = g_{n,i}$ $(i \in \mathbb{N}\backslash\{n+1\})$, которое следует и з построения совокупности $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ по правилам определенным выше (см. (12), (14)) будем иметь:

$$\begin{cases} e_1, & g_{11} \\ e_{2m}, & g_{1,2m} + \alpha_{2m,1} g_{1,2m+1} + \alpha_{2m,2} g_{1,2m+2} + \sum_{k=1}^{2m-1} \beta_{2m,k} e_k \quad (m \in \mathbb{N}) \\ e_{2m+1}, & g_{1,2m+1} + \alpha_{2m+1,1} g_{1,2m+2} + \sum_{k=1}^{2m} \beta_{2m+1,k} e_k. \end{cases} \tag{15}$$

Покажем, что из (15) следует (11). Действительно,

$$\mathrm{Lin}\,\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Lin}\,\mathcal{G}_1 = \mathrm{Lin}\,\mathcal{G} = \mathfrak{L}$$

и включение в (11) справа налево обосновано. Чтобы доказать обратное включение, заметим, что из (15) в силу (13) следует, что

$$\{g_{1,2m+1}, g_{1,2m+2}\} \subseteq \mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_{2m+1}, g_{1,2m}\},$$

откуда по индукции легко заключить, что

$$g_n = g_{1,n} \in \mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_n, g_{12}\} = \mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_n, g_1\} \quad (n \in \overline{3, \infty})$$

$(g_2 = g_{11} = e_1)$, что и показывает справедливость включения в (11) слева направо. И, наконец,

$$\mathrm{Lin}\{e_i | i \in \overline{1,n}\} = \mathrm{Lin}\{g_{ii} | i \in \overline{1,n}\} = \mathrm{Lin}\{g_{ni} | i \in \overline{1,n}\}$$

– и последний в цепочке линеал невырожден в силу построения совокупности систем $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (см. (12), (14)).

Лемма 8. *Пусть $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – линейно независимая система, причём линеал $Lin\mathcal{G}$ не является нейтральным. Существует линейно независимая антинейтральная сиетела $\mathcal{H} = \{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такая, что*

$$Lin\mathcal{G} = Lin\mathcal{H} \tag{16}$$

(т.е. у любого линеала со счётной алгебраической размерностью, не являющегося нейтральным, существует антинейтральный базис Гамеля)

Доказательство. Для системы $\mathcal{G}$ возможны два случая:

(а) Существует вектор g_r из $\mathcal{G}$, не являющийся нейтральным. Определим

$$h_n = \begin{cases} g_r, & n = r \\ g_n + \alpha_n g_r, & n \in \mathbb{N} \setminus \{r\}, \end{cases}$$

где число α_n мы выберем из следующих соображений:

$$[h_n\,,\,h_n] = [g_n\,,\,g_n] + 2Re\,\alpha_n[g_r\,,\,g_n] + |\alpha_n|^2[g_r\,,\,g_r],$$

и для α_n с достаточно большим модулем

$$|\alpha_n|^2 > \frac{1}{|[g_n\,,\,g_r]|}|[g_n\,,\,g_n] + 2Re\,\alpha_n[g_r\,,\,g_n]|. \tag{17}$$

Поэтому для α_n, удовлетворяющих (17) $[h_n\,,\,h_n] \neq 0$. Линейная независимость системы $\mathcal{H} = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ вытекает из соотношения:

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k h_k = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\alpha_k\right)g_r + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k g_k, & n \in \overline{1, r-1} \\ \sum_{k\in\overline{1,n}\setminus\{r\}}\lambda_k g_k + \left(\lambda_r + \sum_{k\in\overline{1,n}\setminus\{r\}}\lambda_k\alpha_k\right)g_r, & n \in \overline{r,\infty}\,, \end{cases}$$

а равенство (16) из соотношения:

$$g_n = \begin{cases} h_r, & n = r \\ h_n - \alpha_n h_r, & n \in \mathbb{N} \setminus \{r\}, \end{cases}$$

(б) Все вектора системы $\mathcal{G}$ – нейтральны. Рассмотрим множество

$$\mathcal{M} = \{k \in \mathbb{N} |\ Lin\{g_i|\ i \in \overline{1,k}\}\ \{\textit{не является нейтральным}\}.$$

Так как $Lin\mathcal{G}$ – не является нейтральным, то $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Пусть

$$m = \min\,\mathcal{M} \tag{18}$$

(так как g_1 – нейтральный вектор, то $m \geqslant 2$). Из (18) следует существование такого $r \in \overline{1,m}$, что

$$[\,g_m\,,\,g_r\,] \neq 0 \tag{19}$$

(в противном случае линеал $Lin\{g_i|\ i \in \overline{1,m}\}$ был бы нейтральным, что противоречит выбору m в (18)). Так как вектор g_m – нейтрален, то

$$r < m. \tag{20}$$

Определим

$$h_n = \begin{cases} g_m + \beta g_r, & n = m \\ g_n + \alpha_n h_m, & n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}, \end{cases}$$

где числа β и α_n выберем из следующих соображений:

$$[h_m\,,\,h_m] = [g_m\,,\,g_m] + 2Re\beta[g_r\,,\,g_m] + [g_r\,,\,g_r] = 2Re\beta[g_r\,,\,g_m] \neq 0$$

при соответствующем β (см. (19)),

$$[h_n\,,\,h_n]=[g_n\,,\,g_n]+2Re\alpha_n[h_m\,,\,g_n]+|\alpha_n|^2[h_m\,,\,h_m]\;=\;2Re\alpha_n[h_m\,,\,g_n]+|\alpha_n|^2[h_m\,,\,h_m]$$

$(n\neq m)$, где аналогично (17) α_n выбираем таким, чтобы $[h_n\,,\,h_n]\neq 0$. Линейная независимость системы $\mathcal{H}=\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и равенство (16) следуют из тривиально проверяемых соотношений (см. (20)):

$$g_n=\begin{cases}h_n-\alpha_n h_m, & n\in\mathbb{N}\setminus\{m\}\\ (1+\beta\alpha_r)h_m-\beta h_r, & n=m\,,\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k h_k=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k g_k+(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\alpha_k)g_m+(\beta\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\alpha_k)g_r, & n\in\overline{1,r-1}\\ \sum_{k\in\overline{1,n}\setminus\{r\}}\lambda_k g_k+(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\alpha_k)g_m+(\lambda_r+\beta\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\alpha_k)g_r, & n\in\overline{r,m-1}\\ \sum_{k\in\overline{1,n}\setminus\{r,m\}}\lambda_k g_k+\big(\lambda_r+\beta\big(\lambda_m+\sum_{k\in\overline{1,n}\setminus\{m\}}\lambda_k\alpha_k\big)\big)g_r+ & \\ +(\lambda_m+\sum_{k\in\overline{1,n}\setminus\{m\}}\lambda_k\alpha_k\big)g_m, & n\in\overline{m,\infty}.\end{cases}$$

□

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{L}$ – невырожденный линеал со счётной алгебраический размерностью. В $\mathfrak{L}$ существует такой антинейтральный базис Гамеля $\mathcal{G}=\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, что*

$$g_1[\perp]Lin\{g_i|\,i\in\overline{2,\infty}\}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}=\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – антннейтральный базис Гамеля в $\mathfrak{L}$, существующий по лемме 8. Определим систему $\mathcal{H}'=\{h'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$:

$$h'_i=\begin{cases}h_1, & i=1\\ h_i+\alpha_i h_1, & i\in\overline{2,\infty},\end{cases}$$

где $\alpha_i=-\dfrac{[h_i,h_1]}{[h_1,h_1]}$.

Очевидно

$$h'_1[\perp]Lin\{h'_i|\,i\in\overline{2,\infty}\} \tag{21}$$

Линеал $\mathfrak{L}'=Lin\{h'_i\,|\,i\in\overline{2,\infty}\}$ не может быть нейтральным; в противном случае в силу (21) $\mathfrak{L}'$ состоял бы из изотропных векторов линеала $\mathfrak{L}$, – что противоречит невырожденности $\mathfrak{L}$. Следовательно, по лемме 8 в $\mathfrak{L}'$ существует антинейтральный базис Гамеля $\mathcal{H}''=\{h''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Положим

$$g_n=\begin{cases}h'_1, & n=1\\ h''_{n-1}, & n\in\overline{2,\infty}.\end{cases}$$

Очевидно, $\mathcal{G}=\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть искомый базис. □

Лемма 10. *Пусть* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *– некоторые линеалы а ПВП* $\mathfrak{X}$, *причем выполняются соотношения*

$$x \bar{\in} \mathfrak{M}, \quad [x, x] \neq 0, \quad x[\perp]\mathfrak{M}, \tag{22}$$

$$\mathfrak{M} \dot{+} x = \mathfrak{N} \dot{+} x. \tag{23}$$

Тогда либо $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \dot{+} x$, *либо* $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$.

Доказательство. (а) Допустим, $x \in \mathfrak{N}$. Тогда, очевидно,$\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \dot{+} x$.

(б) $x \bar{\in} \mathfrak{N}$; в этом случае, как легко видеть, (23) влечёт существование биективной комплексной функции u и биективного линейного отображения $M : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ таких, что

$$\alpha x + m = u(\alpha)x + Mm \quad (\alpha \in \mathbb{C},\, m \in \mathfrak{M}). \tag{24}$$

При этом в силу (22)

$$\alpha[x\,,\,x] = [\alpha x + m\,,\,x] = [u(\alpha)x + Mm\,,\,x] = u(\alpha)[x\,,\,x] + [Mm\,,\,x],$$

откуда

$$[Mm\,,\,x] = (\alpha - u(\alpha))[x\,,\,x] \quad (\alpha \in \mathbb{C},\, m \in \mathfrak{M}). \tag{25}$$

Полагая в (25) $m = 0$, получим $u(\alpha) = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{C})$, откуда из (24) $Mm = m$ $(m \in \mathfrak{M})$, т.е. $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$.

□

Теорема 1. *У произвольного невырожденного линеала* $\mathfrak{L}$ *со счётной алгебраической размерностью существует антинейтральный ступенчато невырожденный базис Гамеля.*

Доказательство. По лемме 9 в $\mathfrak{L}$ существует такой антинейтральный базис Гамеля $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, что

$$g_1[\perp]\mathfrak{M}, \text{ где } \mathfrak{M} = Lin\{g_i |\, i \in \overline{2, \infty}\}.$$

По лемме 7 существует такая антмнейтральная ступенчато невырожденная система $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, что

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{N} \dot{+} g_1, \text{ где } \mathfrak{N} = Lin\mathcal{E},$$

таким образом, получим соотношения:

$$g_1 \bar{\in} \mathfrak{M}, \quad [g_1\,,\,g_1] \neq 0, \quad g_1[\perp]\mathfrak{M} \text{ и}$$

$$\mathfrak{M} \dot{+} g_1 = \mathfrak{N} \dot{+} g_1.$$

Применим к последним сотношемиям лемму 10. Если $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \dot{+} g_1 = \mathfrak{L}$, то $\mathcal{E}$ есть искомый базис Гамеля. Если $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$, то положим

$$h_n = \begin{cases} g_1, & n = 1 \\ e_{n-1}, & n \in \overline{2, \infty}. \end{cases}$$

Система $\mathcal{H} = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – антинейтральна и по лемме **??** каждый линеал $Lin\{h_i | \, i \in \overline{1,n} = Lin\{e_i | \, i \in \overline{2,n-1}\} + g_1$ – невырожден, поэтому система $\mathcal{H}$ – ступенчато невырождена, причём $Lin\mathcal{H} = \mathfrak{N} + g_1 = \mathfrak{L}$. □

2. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ БАЗИСЫ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗЛОЖИМОСТЬ ПРОСТРАНСТВ

Определение 3. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторое ПВП. Антинейтральную систему векторов $\mathcal{G} = \{g_\alpha\}_{\alpha\in A}$, пространства $\mathfrak{X}$ назовём *ортогональной*, если

$$[g_\alpha \, , \, g_\beta] = 0 \quad (\alpha \, , \, \beta \in A; \; \alpha \neq \beta),$$

и *ортонормированной*, если она ортогональна и

$$[g_\alpha \, , \, g_\alpha] \in \{-1 \, , \, 1\}.$$

Замечание 1. Нетрудно видеть, что произвольная ортогональная система $\mathcal{G}$ – линейно независима. Действительно, если $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_{\alpha_i} = 0 \; (\alpha_i \in A)$ и некоторое $\lambda_j \neq 0 \; (j \in \overline{1,n})$, то соответствующий вектор g_{α_i} является нейтральным, что противоречит определению системы $\mathcal{G}$ как антинейтральной.

Замечание 2. Очевидно, произвольную ортогональную систему можно превратить в оргонормирونанную, разделив вектора на их скалярные квадраты, т.е. если система $\mathcal{G} = \{g_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – ортогональна, то система $\mathcal{G}' = \{g'_\alpha\}_{\alpha\in A}$, где $g'_\alpha = \dfrac{1}{[g_\alpha \, , \, g_\alpha]} g_\alpha$ – является ортонормированной, при этом

$$Lin\mathcal{G} = Lin\mathcal{G}'.$$

В силу этих известных простых соображений удобно иметь дело с ортонормированными системами (как и в случае гильбертовых пространств).

Определение 4. Линеал $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{X}$ будем называть *каноническим*, если $\mathfrak{L}$ является линейной оболочкой некоторой ортонормиронанной системы (т.е. у $\mathfrak{L}$ существует ортнормиронанный базис Гамеля).

Теорема 2. *Любой невырожденный линеал $\mathfrak{L}$ со счётной алгебраической размерностью является каноническим.*

Доказательство. По теореме 1 в $\mathfrak{L}$ существует антинейтральный ступенчато невырожденный базис Гамеля $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Систему $\mathcal{G}$ мы ортогонализируем методом, аналогичным методу Гильберта-Шмидта для унитарных (и евклидовых) пространств, т.е. положим $h_1 = g_1$ определим по индукции

$$h_n = g_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{ni} h_i \; (n \in \overline{2,\infty} \, , \, i \in \overline{1,n-1}), \tag{26}$$

где $\alpha_{ni} = -\frac{[g_n\,,\,h_i]}{[h_i\,,\,h_i]}$. Числа α_{ni}, определены корректно. Действительно, допустим противное, что для некоторого $n \in \overline{2,\infty}$

$$[h_n\,,\,h_n] = 0 \tag{27}$$

(n с таким свойством выберем наименьшим). Очевидно, в силу определения (26) система $\{h_i\}_{\in\overline{1,n}}$ – ортогональна, причём

$$Lin\{g_i| \in \overline{1,n}\} = Lin\{h_i| \in \overline{1,n}\}. \tag{28}$$

Из (27) в силу (28) следовало бы, что h_n – ненулевой изотропный вектор линеала $Lin\{g_i| \in \overline{1,n}\}$ – что противоречит ступенчатой невырождености системы $\mathcal{G}$.

Ортонормиронанную систему $\mathcal{H}'$ получим из ортогональной системы $\mathcal{H} = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, нормируя вектора согласно замечанию 2. □

Определение 5. Пространство $\mathfrak{X}$ назовём *топологически разложимым*, если у $\mathfrak{X}$ существует ортонормиронанный топологический базис (*топологическим базисом* мы здесь называем систему векторов, полную относительно заданной топологии).

Теорема 2 в терминах определения 5 влечёт следующее

Следствие 1. *Всякое сепарабильное ПВП, в котором существует невырожденный всюду плотный линеал - топологически разложимо.*

В силу того, что любой плотный линеал в невырожденном ПВП - невырожден (см.[2]), то из следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Всякое невырожденное сепарабельное ПВП топологически разложимо.*

Заключение

Основными результатами данной статьи являются теорема 1 и следствия 1, 2. *Представляется перспективным* исследование топологической ралложимости ПВП, топологическая ралмерность которых более чем счётна.

Список литературы

1. *Азизов Т.Я., Йохвидов И.С.,* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука. – 1986. – 352 с.
2. *Bognar J.* Indefinite inner product spaces. – Berlin.: Springer. – 1974.
3. *Banakh T. and Plichko A.,* Zeros of continuous quadratic functionals on nonseparable Banach space// Preprint. – 2003.
4. *Aron R.M., Boyd C., Ryan R.A. and Zalduendo I.,* Zeros of polynomials on Banach spaces: The real story, Positivity // (to appear).
5. *Aron R.M., Gonzalo R. and Zagorodnyuk A.,* Zeros of real polynomials // Linear and Multilinear Algebra. – 2000. – 48,P.107-115.
6. *Aron R.M. and Hajek P.,* Homogeneous odd degree polynomials in several variables// Preprint.
7. *Aron R.M. and Rueda M.P.,* A problem concerning zero-subspaces of homogeneous polynomials // Linear Topol. Spaces, Complex Anal. – 1997. – 3, P. 20-23.