УДК 517.432

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ В ТЕОРІЇ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ

Кужель О. В.

Таврійський національний університет ім. В. І. Вернадського,
факультет математики і інформатики,
пр-т Вернадського, 4, г. Симферопіль, Крим, Україна, 95007

Abstract

A brief survey of development and applications of the concept of characteristic function of different classes of linear operators is presented.

Ч. І. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ В ГИЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Вступ

У другій половині XX століття при вивченні несамосопряжених та неунітарних операторів, що діють в гільбертовому просторі, або в просторі з індефінітною метрикою, важливу роль відігравало поняття характеристичної функції лінійного оператора. Характеристична функція (х.ф.) – це математичний об'єкт (матриця або оператор), який ставиться у відповідність тому або іншому класу лінійних операторів і який характеризує спектральні властивості операторів із розглядуваного класу. Якщо при цьому характеристична функція виявляється більш простим об'єктом, ніж відповідний оператор, то такий шлях значно спрощує задачу дослідження розглядуваного оператора.

Характеристичні функції істотно використовуються: при побудові модельних операторів; при вивченні різних класів лінійних операторів методом просторів граничних значень; в теорії дилатацій; в теорії розсіяння; в теорії нестаціонарних імовірнісних процесів тощо. При цьому поняття х.ф. навіть у одного і того ж автора з часом змінювалось у відповідності з теоритичними та практичними запитами.

За останні п'ятдесят років як в журнальній, так і у монографічній літературі накопичилось багато фактів, пов'язаних з розвитком та застосуванням х.ф. Ця стаття містить короткий огляд основних напрямків розвитку та застосуванню теорії характеристичних функцій операторів, що діють в гільбертовому просторі.

1. Неунітарні (квазіунітарні) оператори

1. Вперше поняття х.ф. з'явилось в роботі М.С. Лівшиця [1] при дослідженні неунітарних розширень ізометричного оператора V з індексом дефекта (1.1). Останнє означає, що $H \Theta D_V$ і $H \Theta \Delta_V$ – одновимірні підпростори в H (H– гільбертів простір, у якому діє оператор V; D_V і Δ_V – відповідно область визначення та множина значень оператора V).

У згаданій роботі оператор T_a, що діє в H, називається *квазіунітарним розширенням* оператора V, якщо $V \subset T_a$ і $T_a g = a g'$, де a — деяке фіксоване комплексне число, яке називається коефіцієнтом стиску, g і g' – фіксовані орти відповідно із підпросторів $N_0 = H \Theta D_V$ і $N'_0 = H \Theta \Delta_V$.

Оператор

$$T_a\left(z\right) = \left(T_a - ZI\right)\left(I - \overline{Z}T_a\right)^{-1}$$

є квазіунітарним розширенням ізометричного оператора

$$V\left(z\right) = \left(V - ZI\right)\left(I - \overline{Z}V\right)^{-1}\left(|Z| \neq 1\right),$$

причому вектори g_z із $N_z = H\Theta D_{V(z)}$ і g'_z із $N'_z = H\Theta\Delta_{V(z)}$ означуються рівностями

$$g_z = \left(I - ZT_a^*\right)^{-1} g, \quad g'_z = \left(I - \overline{Z}T_a\right)^{-1} g'. \tag{1}$$

Характеристичною функцією квазіунітарного оператора T_a в (1) називається функція $w(z,a)$, що означується рівністю

$$T_a(z) g_z = w(z,a)\overline{g}_z,$$

де $\overline{g}_z = \left(I - \overline{Z}T_a\right)^{-1}\overline{g}$. При цьому $\overline{f} = Kf$, де K – «дзеркальний» оператор, що означується рівностями

(1) $K\left(af + \beta\varphi\right) = \overline{a}Kf + \overline{\beta}K\varphi$;

(2) $(Kf, Kf) = (f,f)$;

(3) $K^2 f = f$.

Встановлюється, що $w(z,a)$ є регулярним відображенням одиничного круга в себе, яке допускає зображення

$$w(z,a) = \frac{a + w(z,0)}{1 + \overline{a}w(z,0)}\left(w(z,0) = -Z\frac{(g_z,\overline{g})}{(g_z,g)}\right).$$

Крім того, в роботі [1] встановлюється критерій унітарної еквівалентності для простих частин розглядуваних операторів, а також в термінах х.ф. подано характеристику спектра квазіунітарних операторів.

2. У подальшому М.С. Лівшиць в роботі [2] узагальнив попередні результати на випадок квазіунітарних розширень ізометричних операторів з індексом дефекта (m,m) $\quad (m < \infty)$. У цьому випадку х.ф. означається як $m \times m$ – матриця

$$w(T,z) = B^{-1}(z)A(z),$$

де

$$B(z) = g(z) - zg'(z)\tau^*, \quad A(z) = g(z)\tau - zg'(z),$$

$$g(z) = \| \left(g_k(z), g_s\right) \|, \quad g'(z) = \| \left(g_k(z), g'_s\right) \|,$$

а $\{(g_k(z)\}$ – довільний фіксований базіс дефектного підпростору $N_z = H\Theta D_{V-zI}$; $\{g_k\}_{k=1}^m$ і $\{g'_k\}_{k=1}^m$ – ортонормовані базиси відповідно в підпросторах N_0 та N'_0. Що ж до матриці τ, то вона означується рівностями

$$T_{g_k} = \sum_{i=1}^{m} \tau_{ki} g'_i \ (k = \overline{1,m}) \tag{2}$$

3. Пізніше в роботі М.С. Лівшиця та В.П. Потапова [3] означена раніше х.ф. «нормується». В результаті автори приходять до поняття нормованої х.ф. за умови, що $\det(E - \tau^*\tau) \neq 0$, де τ – матриця, елементи якої означаються рівностями (2). При цьому нормована х.ф. $w_T(z)$ квазіунітарного оператора T означається рівністю

$$w_T(z) = u^*|E - \tau\tau^*|^{\frac{1}{2}}(I - w(z)\tau^*)^{-1}(\tau - w(z))|E - \tau^*\tau|^{-\frac{1}{2}}v^*, \tag{3}$$

де u і v - деякі унітарні матриці, $w(z) = -zg^{-1}(z)g'(z)$ – х.ф. ізометричного оператора $V(V \subset T)$, а матриці $g(z)$ та $g'(z)$ мають той же смисл, що і в п.2.

В [3] автори з'ясовують умови, за яких задана матриця-функція є характеристичною для деякого квазіунітарного оператора T (обернена задача); встановлюють критерій унітарної еквівалентності простих частин квазіунітарних операторів в термінах х.ф.; формулюють теорему множення у випадку, коли $T = \begin{pmatrix} T_1 & T \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$, де T_1 і T_2 – квазіунітарні розширення ізометричних операторів з однаковими індексами дефекта.

4. Ю.Л. Шмул'ян в роботі [4], відштовхуючись від роботи М.С. Лівшиця і В.П. Потапова [3], запропонував поняття нормованої х.ф. $w(T, z)$ неунітарного розширення T ізометричного оператора V, дефектні числа якого можуть бути як нескінченими, так і різними.

   За означенням Ю.Л. Шмул'яна для будь-якого f із $N_0 = H\Theta D_T$

$$w(T, z)f = Tf - ZJ'|I - TT^*|^{\frac{1}{2}} (I - ZT^*)^{-1} |I - T^*T|^{\frac{1}{2}} f, \tag{4}$$

   де $J' = sign(I - TT^*)$. У цій же роботі при певних умовах формулюється теорема множення та розглядаються деякі загальні властивості х.ф.

   У подальшому В.Т. Поляцький [5], скориставшись означенням х.ф. у вигляді (4), а також результатами роботи М.С. Лівшиця [6], у якій, зокрема, йдеться про побудову модельних операторів певних класів несамоспряжених операторів, побудував «трикутні моделі» для широкого класу неунітарних операторів.

5. В роботах [7, 8] Б. Секефальві-Надь і Ч. Фояш прийшли до поняття х.ф. стискуючого оператора T зовсім іншим шляхом — досліджуючи унітарні дилатації оператора T. А саме, якщо T — стискуючий оператор, то можемо розглянути оператори $D_T = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}, D_{T^*} = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$, а також підпростори

$N_T = \overline{D_T H}, N_{T^*} = \overline{D_T H}$. Тоді х.ф. $\Theta_T(z)$оператора T означається рівністю

$$\Theta_T(z) = \left[-T + ZD_{T^*}(I - ZT^*)^{-1}D_T\right]|_{N_T}. \tag{5}$$

Порівнюючі рівності (4) і (5) бачимо, що у випадку стискуючих операторів х.ф. $\Theta_T(z)$ лише знаком відрізняється від х.ф. Ю.Л. Шмул'яна.

Більш детально про властивості та застосування х.ф. $\Theta_T(z)$ див. [9].

6. В роботі О.В. Кужеля [10] х.ф. неунітарного оператора T означається дещо інакше. А саме розглядається обмежений оборотний оператор T, для якого $\dim(I - T^*T)H = r$ $(r < \infty)$. Сукупність $\{g_k\}_{k=1}^{s}$ називається α-базисом оператора T, якщо оператор $I - T^*T$ допускає зображення $I - T^*T = \sum\limits_{k,i=1}^{s} (\cdot, g_k)\, J_{ki} g_i$, де $J = \|J_{ki}\|$ — ермітова матриця. При деяких додаткових умовах α-базис х.ф. $W(\lambda)$ оператора T означається рівністю $W(z)W(0) = E - \|\left((I - ZT^*)^{-1} g_k, g_i\right)\|J$, де $W(0)$ — ермітово невід'ємна матриця. Таке означення х.ф. дало можливість обгрунтувати теорему множення у більш загальному вигляді, ніж це зроблено в роботі М.С. Лівшиця і В.П. Потапова [3].
7. За аналогією з (4); (5) О.В. Кужель в роботі [11] означив $\Theta_T(z)$ довільного обмеженого неунітарного оператора T рівністю

$$\Theta_T(z) = TJ_T - ZQ_{T^*}(I - ZT^*)^{-1}Q_T, \tag{6}$$

де

$$Q_T = |I - T^*T|^{\frac{1}{2}}, J_T = sign(I - T^*T).$$

Означена у такий спосіб х.ф. задовольняє, зокрема, умовам:

$$\Theta_T^*(z) = \Theta_{T^*}(\overline{z}), \Theta_T(\overline{z})J_T\Theta_T^*\left(\frac{1}{z}\right) = J_{T^*},$$

$$\Theta_T^*(0)J_{T^*}\Theta_T(z) = J_T - Q_{T^*}(I - ZT^*)^{-1}Q_T, \tag{7}$$

$$\Theta_T(z)J_T\Theta_T^*(0) = J_{T^*} - Q_{T^*}(I - ZT^*)^{-1}Q_T. \tag{8}$$

Х.ф. $\Theta_T(z)$, що означається рівністю (6), використовувалась при дослідженні різних властивостей операторів в роботах О.В. Кужеля [12] (теорема про факторізацію х.ф.); Ч. Девіса і Ч. Фояша [13] (побудова та дослідження J-унітарної дилатації, а також при обгрунтованні теореми Л.А. Сахновича [14] про подібність — при певних умовах — оператора T унітарному оператору); Д. Кларка [15] (побудова абстрактної моделі для обмеженого оператора T, який не є стискуючим оператором); В. Мак-Енніса [16, 17, 18] (побудова моделей та J-унітарних дилатацій); М.Г. Макарова [19] (задача про стійкість істотного спектра неунітарних операторів) та ін.

8. У випадку обмеженого і оборотного у вузькому розумінні ($0 \in \rho(T)$) оператора T В.М. Бродський, І.Ц. Гохберг та М.Г. Крейн в роботі [20] означили х.ф. $\Theta_j(z)$ вузла $j = (H, \varepsilon, T, R, J)$ рівністю

$$\Theta_j(z) = J(K^*)^{-1}(J - R^*(I - ZT^*)^{-1}R), \tag{9}$$

де J — самоспряжений і унітарний оператор, що діє в просторі $\varepsilon; R \in \beta[\varepsilon, H]$ і задовольняє умову $I - T^*T = RJR^*$; K — обмежений оборотний оператор, що діє в просторі ε і є розв'язком операторного рівняння $J - R^*R = K^*JK$ (розв'язність якого може бути обгрунтована різними методами).

Після деяких перетворень автори записують х.ф. (9) у вигляд:

$$\Theta_j^*(0)J\Theta_j(z) = J - R^*(I - ZT^*)^{-1}R),$$

що нагадує рівності (7) та (8).

В.М. Бродський в [21], спираючись на означення х.ф. у вигляді (9) встановив, що добутку операторних вузлів відповідає добуток відповідних х.ф. (теорема множення).

В роботах В.Н. Полякова [22, 23, 24] методом А.В. Штрауса (див. п.3.3) досліджувались обмежені неунітарні оператори.

На закінчення зазначимо, що х.ф. неунітарних операторів істотно застосовувались не тільки при дослідженні різних класів операторів, а також і в теорії розсіяння, теорії пргнозування та ін. (див., наприклад, [25] - [30]).

2. Обмежені несамоспряжені оператори

Х.ф. обмеженого несамоспряженого оператора з цілком неперервною уявною компонентою ImA означена в роботі М.С. Лівшиця [6] рівністю

$$W(\lambda) = I + i\ sign\left[\frac{A - A^*}{i}\right]\sqrt{\left|\frac{A - A^*}{i}\right|}(A^* - \lambda I)^{-1}\sqrt{\left|\frac{A - A^*}{i}\right|}.$$

У цій же роботі досліджено властивості х.ф., обгрунтовано теорему множення та побудовано трикутну модель.

Л.А. Сахнович в роботах [14, 31, 32], скориставшись результатами М.С. Лівшиця, отримав умови подібності для широкого класу несамоспряжених операторів, а також розглянув питання про зведення несамоспряжених операторів до «діагонального виду».

М.С. Бродський [33, 34] запропонував більш загальне означення х.ф. обмеженого оператора A у вигляді:

$$W(\lambda) = I - 2iK^*(A - \lambda I)^{-1}KJ, \tag{10}$$

де J – самосопряжений і унітарний оператор, що діє у деякому допоміжному («зовнішньому») просторі ε; K – обмежений оператор, що діє із ε в H (H – гільбертів простір, у якому діє оператор A) і задовольняє умову: $\frac{A-A^*}{2i} = KJK^*$. Таке означення х.ф. дозволило при менших обмеженнях і значно простіше обгрунтувати теорему множення, а також розглянути ряд загальних питань теорії несамоспряжених операторів (трикутне зображення вольтеррових операторів, критерій одноклітинності вольтеррових та дисипативних операторів тощо).

В роботах А.Г. Руткаса [35] та І.І. Карпенко [36] означення х.ф. у вигляді (10) перенесено на випадок необмежених операторів з $D_A = D_{A^*}$. При цьому в роботі І.І. Карпенко на розглядуваний клас операторів перенесено і ряд результатів М.С. Бродського.

3. Необмежені несамоспряжені оператори

1. Вперше х.ф. необмеженого оператора B означена в роботі М.С. Лівшиця [1] за умови, що B - насоспряжене розширення симетричного (цільно заданого) оператора A з індексом дефекта (1.1). За такої умови, як показано у розглядуваній роботі [1], довільний елемент u і D_B при фіксованому $\lambda(\lambda \neq \overline{\lambda})$ однозначно може бути зображений у вигляді: $u = \varphi_\lambda + u_\lambda + w_B(\lambda)K_{u_\lambda}$, де K – дзеркальний оператор, про який йшла мова раніше. Функція $w_B(\lambda)$ і називається х.ф. оператора B. В роботі розглядаються властивості означеної у такий спосіб х.ф. Зокрема показано, що вона пов'язана з х.ф. $w_T(z)$ відповідного квазіунітарного оператора $T = (B+iI)(B-iJ)^{-1}$ рівністю $w_B(\lambda) = e^{ia}W_T\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)$, де α – деяка дійсна стала.
2. В роботах О.В. Кужеля [37, 38] х.ф. означена для квазіермитових розширень ермітового (не обов'язково щільно заданого) оператора H з скінченими і рівними дефектними числами (K^r - оператори). Якщо оператор $A - K^r$ – оператор і $-i \in \rho(A)$, то самоспряжений оператор $B = iR_{-i} - iR^*_{-i} - 2R^*_{-i}R_{-i}$ допускає зображення у вигляді: $B = \sum\limits_{k,i=1}^{s} (\cdot, g_k)J_{ki}g_i$; $J = \|J_{ki}\|$; $J^* = J^{-1} = J$. Тоді х.ф. $W_A(\lambda)$ оператора означається рівністю
$$W_A(\lambda)W_A(i) = I + i(\lambda+i)\|(A^* - iI)(A^* - \lambda I)^{-1}g_k, g_m\|J, \tag{11}$$
де $W_A(i)$ – ермітово невід'ємна матриця.

   У вказаних роботах розглянуто загальні властивості таких х.ф., побудовано трикутну модель K^r – операторів та досліджено спектр таких операторів.

   Обгрунтування відповідних результатів (і, зокрема, теореми множення х.ф.) наведено в монографії О.В. Кужеля [39].
3. У той самий час А.В. Штраус [40, 41] у такий спосіб вводить поняття х.ф. довільного замкненого щільно заданого оператора A з непорожньою множиною регулярних точок $\rho(A)$. У фактор-просторі $L_A = D_A/G_A$, де
$$G_A = \{x \in D_A | (Ax, y) = (x, Ay) \quad (\forall y \in D_A)\},$$

означується індефінітний скалярний добуток

$$[\tilde{x}, \tilde{y}] = \frac{1}{i}\left[(Ax, y) - (x, Ay)\right] \quad (\{\tilde{x}, \tilde{y}\} \subset L_A),$$

де $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$. Потім рівністю $[\Gamma x, \Gamma y] = \frac{1}{i}[(Ax, y) - (x, Ay)]$ означується *граничний* оператор Γ, який є відображенням лінеалу D_A на деякий лінійний простір L, ізоморфний простору L_A.

Так само, рівністю

$$[\Gamma'\varphi, \Gamma'\psi] = \frac{1}{i}[(\varphi, A^*\psi) - (A^*\varphi, \psi)] \tag{12}$$

означується оператор Γ'. Потім, за допомогою оператора $S_\lambda = (A^* - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)$ рівністю $X(\lambda)\Gamma x = \Gamma' S_\lambda x \quad (x \in D_A)$ означується х.ф. $X(\lambda)$ оператора A.

У загальних роботах А.В. Штрауса в термінах х.ф. обґрунтовується критерій унітарної еквівалентності простих частин несамоспряжених операторів; формулюється та обґрунтовується теорема множення х.ф.; встановлюється зв'язок з х.ф. М.С. Лівшиця (у випадку обмежених операторів) та ін.

4. В роботі Е.Р. Цекановського та Ю.Л. Шмул'яна [42] наведено означення (що належить першому автору) х.ф. в термінах оснащених гільбертових просторів (детальніше про такі простори див., наприклад, роботу [43]). Згадане означення зовні не відрізняється від означення х.ф. у вигляді рівності (10).
5. В роботах А.Г. Руткаса [44] – [46] вводиться та досліджується х.ф. операторної в'язки $\lambda A + B$, яка потім використовується при дослідженні радіофізичних систем. Така х.ф. означується рівністю

$$w(\lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1}L,$$

де A, B – задані оператори, а K,M,N і L – певні допоміжні оператори.
6. До Хонг Тан [47], спираючись на результат робіт О.В. Кужеля [38, 48], запропонував поняття х.ф. $\chi(\lambda)$ у випадку необмеженого замкненого щільно заданого оператора A у такий спосіб:

$$\chi^*(i)J'\chi(\lambda) = J + i(\lambda + i)Q^*(A^* - iI)(A^* - iI)^{-1}Q,$$

де оператори Q, J і J' і задовольняють умовам

$$B = QJQ^*, (B = iR_{-i} - iR^*_{-i} - 2R^*_{-i}R_{-i}), \tag{13}$$

$$J\tau^{-1} = CJ'C^*(\tau = I - 2Q^*QJ). \tag{14}$$

У цій же роботі встановлюється зв'язок між означеннями х.ф. А.В. Штрауса та О.В. Кужеля [40, 41].
7. Г.М. Губреєв [49], за аналогією з попереднім, означив х.ф. $W(\lambda)$ замкненого щільно заданого оператора A рівністю

$$W(\lambda)JW^*(-i) = J - i(\lambda - i)Q^*(A + iI)(A - \lambda I)^{-1}Q,$$

де оператори Q і J означуються рівностями (13) та (14). У цій роботі також обгрунтовується теорема множення і, крім того, розв'язується обернена задача (побудова операторного вузла по заданій оператор-функції).

Ермітові оператори

1. Перші означення х.ф. ермітових та ізометричних операторів належать М.С. Лівшицю [1, 2]. Так, у випадку ізометричного оператора V з індексом дефекта (m, m) $(m < \infty)$ характеристичною функцією цього оператора називається матриця-функції $w_V(z) = B^{-1}(z)A(z)$, де матриці $B(z)$ та $A(z)$ означуються так само, як і в п. 1.2 — за умови, що $\tau = 0$.

   Х.ф. ермітового оператора означується рівністю $W_A(\lambda) = \theta w_A(\frac{\lambda - i}{\lambda + i})$, де $V = (A - iI)(A + iI)^{-1}$, а $\mid \theta \mid = 1$.

   У згаданих роботах встановлюється критерій унітарної еквівалентності простих ермітових (ізометричних) операторів - у вигляді унітрної еквівалентності відповідних характеристичних функцій; а також теорема множення х.ф. у випадку деяких спеціальних зчеплень ізометричних операторів.

   Із конкретних результатів відзначимо такий (який у подальшому був поштовхом до побудови модельних операторів).

   Теорема. *(М.С. Лівшиць [1]). Для того, щоб простий ермітовий оператор A з індексом дефекта (1.1) був унітарно еквівалентним оператору диференціювання D, який діє в просторі $L_2(0, a)$ і означується умовами*

   $$(Df)_x = \frac{1}{i} f'(x) \ (f(0) = f(a) = 0),$$

   необхідно і достатньо, щоб серед квазіермітових розширень оператора A було розширення без спектра.

2. У подальшому теорія х.ф. ермітових операторів мала істотний розвиток в роботах А.В. Штрауса [50]- [54].

   У завершеному вигляді поняття х.ф. $C(\lambda)$ ермітового оператора A вводиться в роботі А.В. Штрауса у такий спосіб.

   При фіксованому λ $(Im\lambda > 0)$ А.В. Штраус розглядує розширення A_λ ермітового оператора A, яке означується на лінеалі $D_{A_\lambda} = D_A \dotplus N_{\overline{\lambda}}$ рівністю $A_\lambda = (x_0 + x_{\overline{\lambda}}) = Ax_0 + \lambda x_{\overline{\lambda}}$, де $N_{\overline{\lambda}}$ — дефективний підпростір оператора A.

   Тоді х.ф. C_λ оператора A означується рівністю

   $$C_\lambda = (A_\lambda - \lambda_0 I)(A_\lambda - \overline{\lambda} I)^{-1}|_{N_{\lambda_0}},$$

   де λ_0 — деяке фіксоване число із верхньої півплощини.

   Зазначимо, що оператор A_λ дисипативний, тобто $Im(A_\lambda x, x) \geqslant 0$ $(\forall x \in D_{A_\lambda})$. Тому число $\mu = \overline{\lambda} \notin \sigma_p(A_\lambda)$. Але тоді для цього оператора має місце аналог формул фон Неймана (див. О.В. Кужель, Л.І. Руденко [55, 56], а також О.В. Кужель [57]). Користуючись згаданими формулами, отримуємо, що довільний елемент $h = x_0 + x_{\overline{\lambda}}$ із D_{A_λ} може бути зображений у вигляді $h = h_0 + h_\mu + \Phi_\lambda h_\mu$ $(h_0 \in D_A, h_\mu \in N_\mu)$, де $\Phi : N_\mu \to N_{\overline{\mu}}$ — деякий лінійний оператор. При цьому $A_\lambda h = Ah_0 + \overline{\mu} h_\mu + \mu \Phi_\lambda h_\mu$.

Виявляється, що х.ф. $C(\lambda)$ оператора A лише знаком відрізняється від оператора Φ_λ:

$$C(\lambda) = -\Phi_\lambda. \tag{15}$$

А.Н. Кочубей [58], спираючись на результати А.В. Штрауса, запропонував дещо більш загальне означення х.ф. симетричного (щільно заданого) оператора A. При цьому істотно використовувалось поняття простору граничних значень (ПГЗ), яке виникло та досліджувалось в роботах М.А. Талюша [59], А.Н. Кочубея [60]-[62], В.М. Брука [63]-[65].

Х.ф. А.В. Штрауса (або її узагальнення) використовувались в роботах А.Н. Кочубея [58, 66], В.О. Деркача та М.М. Маламуда [67], В.А. Деркача, М.М. Маламуда та Е.Р. Цекановського [68] при дослідженні різних класів розширень симетричних (щільно заданих) операторів. В роботах С.О. Кужеля [69, 70] та М.М. Маламуда [71] результати роботи А.Н. Кочубея [58] (х.ф., опис спектра розширень та ін.) різними методами узагальнювались на випадок нещільно заданих ермітових операторів та їх не самоспряжених розширень.

А.Н. Кочубей [66] застосував х.ф. $C(\lambda)$ при узагальненні результатів Р.С. Філліпса [72] про u-інваріантні розширення (за Фрідріхсом) u-інваріантного напівобмеженого оператора на випадок u-інваріантних самоспряжених розширень довільного u-інваріантного симетричного оператора. Р.С. Філліпс побудував також приклад u-інваріантного симетричного оператора з індексом дефекта (1.1), для якого не існує u-інваріантних самоспряжених розширень. У випадку таких операторів, як показав А.Н. Кочубей, х.ф. $C_\lambda \equiv 0$ при $Im\lambda > 0$. Якщо ж скористатись рівністю (15), то можна показати, що у розглядуваному випадку точковий спектр оператора A_λ заповнює усю верхню півплощину.

Згадане твердження та ряд інших результатів було отримано в роботі О.В. Кужеля [73] (див. також О.В. Кужель та С.О. Кужель [74]).

3. На закінчення зазначимо, що в роботах А.В. Штрауса [41, 50, 51, 54, 75, 76] встановлено зв'язок між теорією х.ф. максимальних дисипативних операторів та теорією узагальнених резольвент ермітових операторів.

Література

1. Лившиц М.С. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве // Мат. сб. - 1946. - 19. - С.239-260.
2. Лившиц М.С. Изометрические операторы с равными дефектными числами, квазиунитарные операторы // Мат. сб. - 1950. - 26. - С.247-264.

3. Лившиц М.С., Потапов В.П. Теорема умножения характеристических матриц-функций // Докл. АН СССР. - 1950. - 72, №4. - С.625-628.
4. Шмульян Ю.Л. Операторы с вырожденной характеристической функцией // Докл. АН СССР. - 1953. - 93, №6. - С.986-988.
5. Поляцкий В.Т. О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов // Докл. АН СССР. - 1957. - 113, №4. - С.756-759.
6. Лившиц М.С. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов // Мат. сб. - 1954. - 34. - С.144-199.
7. Szökefalvy-Nagy B., Foias C. Models fonctionelles des contractions de I'espace de Hilbert. La fonction caracteristique // Comptes Rend. - 1963. - 256. - P.3236-3239.
8. Szökefalvy-Nagy B., Foias C. Propriétés des fonction caractéristiques, modéles tranqulares et une classification des contractions // Ibid. - 258. - P.3413-3415.
9. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. - М.: Мир. 1970. - 431 с.
10. Кужель А.В. Теорема умножения характеристических матриц-функций неунитарных операторов // Науч. докл. высш. шк. Сер. физ.-мат. наук. - 1959. - №3. - С.33-41.
11. Кужель О.В. Характеристична оператор-функцiя довiльного обмеженого оператора // Допов. АН УРСР. Сер. А. - 1968. - №3. - С.233-236.
12. Кужель А.В. Обобщение теоремы Надя-Фояша о факторизации характеристической оператор-функции // Acta Scr. Math. - 1969. - 30. - С.225-234.
13. Devis Ch., Foias C. Operators with bounded characteristic function and their J-unitary dilation // Acta Sci. Math. - 1971. - 32. - С.127-139.
14. Сахнович Л.А. Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром // Тр. Моск. Мат. о-ва. - 1968. - 19. - С.221-270.
15. Clark D. On models for noncontractions // Acta Sci. Math. - 1974. - 36, №1 - С.5-6.
16. McEnnis B. Perely contractive functions and characteristic functions of noncontractions // Acta Sci. Math. - 1979. - 41, №1-2. - С.161-172.
17. McEnnis B. Characteristic functions and dilatations of noncontractions // J. Oerator Theory. - 1980. - 3. - С.71-87.
18. McEnnis B. Models for operator with bounded characteristic functions // Acta Sci. Math. - 1981. - 43, №1-2. - С.71-90.
19. Макаров Н.Г. Устойчивость существенного спектра операторов, близких к унитарному // Функцион. анализ и его прил. - 1982. - 16, №3 - С.72-73.
20. Бродский В.М., Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Определение и основные свойства характеристических функций J-узла // Функцион. анализ и его прил. - 1970. - 4, №1 - С.88-90.
21. Бродский В.М. Теоремы умножения и деления характеристических функций обратного оператора // Acta Sci. Math. - 1971. - 32 - С.165-175.
22. Поляков В.Н. К теории характеристических функций линейных операторов // Изв. вузов. Математика. - 1967. - 63, №8 - С.53-59.
23. Поляков В.Н. Об одной задаче теории характеристических функций линейных операторов // Мат. заметки. - 1971. - 9, №2 - С.171-180.
24. Поляков В.Н. Теорема умножения характеристических функций линейных операторов // Изв. вузов. Математика. - 1973. - 132, №5 - С.73-76.
25. Адамянв В.М., Аров Д.З. Об одном классе операторов рассеяния и характеристических оператор-функций сжатий // Докл. АН СССР. - 1965. - 160, №1 - С.9-12.

26. Адамянв В.М., Аров Д.З. Об операторах рассеяния и полугруппах сжатий в гильбертовых пространствах // Докл. АН СССР. - 1965. - 165, №1 - С.9-12.
27. Адамянв В.М., Аров Д.З. Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов // Мат. исследования. - Кишинев. - 1966. - 1, вып. 2. - С.3-64.
28. Адамянв В.М., Аров Д.З. Общее решение задачи линейного прогнозирования стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применения. - 1968. - 13, №3 - С.419-431.
29. Кужель А.В., Третьяков Д.В. Об одном обобщении схемы Лакса-Филипса в теории рассеяния // Докл. АН СССР. Сер. А. - 1982. - №2. - С.19-21.
30. Кужель А.В., Третьяков Д.В. Обобщенная схемы Лакса-Филипса в теории рассеяния // Динам. системы.: Респ. межведомств. науч. сб. - 1983. - Вып. 2. - С.115-121.
31. Сахнович Л.А. Приведение несамосопряженных операторов с непрерывным спектром к диагональному виду // Мат. сб. - 1957. - 44, - №4 - С.509-548.
32. Сахнович Л.А. Приведение одного несамосопряженных оператора с непрерывным спектром к диагональному виду // Успехи мат. наук. - 1958. - 13, - №4 - С.193-196.
33. Бродский М.С. Характеристические матрицы-функции линейных операторов // Мат. сб. - 1956. - 39, №2 - С.179-200.
34. Бродский М.С. Треугольные и жордановы представления операторов. - М.: Наука, 1969. - 287 с.
35. Руткас А.Г. О характеристических функциях неограниченных операторов // Теория функций, функцион. анализ и их прил. - 1970. - вып. 12. - С.20-35.
36. Карпенко И.И. Характеристические оператор-функции $K_\perp$ операторов // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1983. - №9. - С.3-5.
37. Кужель А.В. О произведении неограниченных несамосопряженных операторов к треугольному виду // Докл. АН СССР. - 1958. - 119, №5. - С.868-871.
38. Кужель А.В. Спектральный анализ неограниченных несамосопряженных операторов // Докл. АН СССР. - 1959. - 125, №1. - С.36-37.
39. Kuzhel A. Characteristic Function and Madels of Nonself-Adjoint Operators. - Kluwer: Dordrecht, the Netherlands, 1996. - 273 p.
40. Штраус А.В. О характеристических функциях линейных операторов // Докл. АН СССР. - 1959. - 126, №3. - С.514-516.
41. Штраус А.В. Характеристические функции линейных операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1960. - 24, №1. - С.43-47.
42. Цекановский Э.Р., Шмульян Ю.Л. Теория бирасширений операторов в оснащенных гильбертовых пространствах. Неограниченные операторные узлы и характеристические функции // Успехи мат. наук. - 1977. - 32, №5. - С.69-124.
43. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ.- Киев: Вища шк. - 1990. - 600 с.
44. Руткас А.Г. К теории характеристических функции линейных операторов // Докл. АН СССР. - 1976. - 229, №3. - С.546-549.
45. Руткас А.Г. Характеристическая функция и модель линейного пучка операторов // Теория функций, функцион. анализ и их прил. - 1986. - Вып. 45. - С.98-111.
46. Руткас А.Г. Операторно-дифференциальные уравнения в радиофизике, не неразрешонные относительно производной: Дис. ...д-ра. физ.-мат. наук. - Харьков. 1988. - 268 с.
47. Руткас А.Г. Характеристическая функция и модель линейного пучка операторов // Теория функций, функцион. анализ и их прил. - 1986. - Вып. 45. - С.98-111.

48. Кужель А.В. Спектральный анализ неограниченных несамосопряженных операторов в пространстве с индифинитной метрикой // Докл. АН СССР. - 1968. - 178, №1. - С.31-34.
49. Губреев Г.М. Определение и основные свойства характеристических функций W-узла // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1978. - №1. - С.3-6.
50. Штраус А.В. К теории эрмитовых операторов // Докл. АН СССР. - 1949. - 67, №4. - С.211-214.
51. Штраус А.В. К теории обобщенных резольвент симметрического оператора // Докл. АН СССР. - 1951. - 78, №2. - С.217-220.
52. Штраус А.В. О самосопряженных операторах в ортогональной сумме гильбертовых пространств // Докл. АН СССР. - 1962. - 144, №3. - С.512-515.
53. Штраус А.В. О расширениях и характеристической функции симмерического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1968. - 32, №1. - С.186-207.
54. Штраус А.В. Расширения и обобщенные резольвенты неплотно заданного оператора // Докл. АН СССР. - 1970. - 34, №1. - С.175-202.
55. Кужель А.В., Руденко Л.И.Правильные расширения эрмитовых и изометрических операторов // Укр. мат. журн. - 1981. - 33, №6. - С.810-814.
56. Кужель А.В., Руденко Л.И.Описание правильных расширений эрмитовых операторов // Функцион. анализ и его прил. - 1982. - 16, №1. - С.74-75.
57. Кужель А.В. Расширений эрмитовых операторов. - Киев: Вища школа, 1989. - 56 с.
58. Кочубей А.Н. О характеристических функциях симметрических операторов и их расширений // Изв. Арм СССР. - 1980. - 15, №3. - С.219-232.
59. Талюш М.О. Типова структура дисипативних операторів // Допов. АН УССР. Сер. А. - 1973. - №11. - С.993-996.
60. Кочубей А.Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. - 1975. - 17, №1. - С.41-48.
61. Кочубей А.Н. О спектре самосопряженных расширений симметрического оператора // Мат. заметки. - 1976. - 19, №3. - С.429-434.
62. Кочубей А.Н. О расширениях неплотно заданного симметрического оператора // Сиб. мат. журн. - 1977. - 18, №2. - С.314-320.
63. Брук В.М. Об одном классе краевых задач со спекральным параметром в граничном условии // Мат. сб. - 1976. - 100, №2. - С.210-216.
64. Брук В.М. О расширениях симметрических отношений // Мат. заметки. - 1977. - 22, №6. - С.825-834.
65. Брук В.М. О зависящих от параметра расширениях симметрического оператора // Функциональный анализ. - Ульяновск: Ульянов. пед. ин-т, 1978. - Вып. 10. - С.32-40.
66. Кочубей А.Н. О симметрических оператора, коммутирующих с семейством унитарных операторов // Функцион. анализ и его прил. - 1979. - 13, №4. - С.77-78.
67. Деркач В.А., Маламуд М.М. Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией. - Донецк. 1985. - 85 с. - (Препринт АН УССР. ДонФТИ; 85.9(104)).
68. Деркач В.А., Маламуд М.М., Цекановский Э.Р. Спектральные расширения положительного оператора и характеристическая функция // Укр. мат. журн. - 1989. - 41, №2. - С.151-158.
69. Кужель С.А.Пространства граничных значений и характеристические функции эрмитовых операторов. - Киев, 1989. - 7 с. - Деп. в УкрНИИНТИ, №1710-Ук.89.
70. Кужель С.А. О пространствах граничных значений и правильных расширений эрмитовых операторов // Укр. мат. журн. - 1990. - 42, №6. - С.854-857.
71. Маламуд М.М. Об одном подходе теории расширенийнеплотно заданного эрмитового оператора // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1990. - №3. - С.20-26.

72. Филлипс Р.С. Расширения дуальных подпространств, инвариантных относительно алгебры // Математика. Сб. переводов. - 1964. - 8, №6. - С.81-108.
73. Кужель О.В. Регулярні u-інваріантні розширення ермітових операторів // Матем. студії. - 1997, Т.7, №2. - С.193-200.
74. Kuzhel A.V., Kuzhel S.A. Regular Extensions of Hermitian Operators. - «VSP», Utrecht, Netherlends, 1998. - 237 p.
75. Штраус А.В. Об одном классе регулярных оператор-функций // Докл. АН СССР. - 1950. - 70, №4. - С.577-580.
76. Штраус А.В. Об обобщенных резольвентах симметрического оператора // Докл. АН СССР. - 1950. - 71, №2. - С.241-244.