УДК 514.12

О СТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА ОРБИТ ОТРАЖЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, ПОРОЖДЕННОЙ ОТРАЖЕНИЯМИ

А. И. Криворучко

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Крым, Украина, 95007

Abstract

Let G be an infinite reflection group acting on a non-cylindrical algebraic surface. It is shown, that the set of all reflections belonging to group G has the partition consisting of element-wise commuting «standard» subsets, each of which is the union no more than two G-orbits of reflections. The linear classification of all «standard» sets of reflections is given and the basis invariants of groups generated by these sets are calculated.

Введение

В связи с развитием теории инвариантов бесконечных групп отражений возникла необходимость *постановки следующей проблемы*:

Найти базисные инварианты бесконечной группы G, которая порождена отражениями и действует на лежащей в вещественном конечномерном аффинном пространстве нецилиндрической алгебраической гиперповерхности F.

При ее решении можно считать, что G — центроаффинная группа, содержащая все отражения, сохраняющие поверхность F.

В работе [1] были получены первые результаты, связанные с геометрическими аспектами этой проблемы. Затем она была решена в следующих случаях (см., например, [2]–[5]):

1) замыкание каждой G-орбиты принадлежащего группе G отражения является квадратичным множеством отражений [6] с нулевой особой плоскостью (отсюда следует, что, в обозначениях работы [2], группа G имеет тип G^c_μ);
2) каждая G-орбита принадлежащего группе G отражения является тетраэдральным множеством отражений [5] (и тогда, в обозначениях работы [2], группа G имеет тип G^t_μ).

Анализ последних достижений и публикаций [6]–[10], посвященных этой проблеме, позволяет сделать вывод, что наиболее трудным для ее решения является случай, когда замыкания G-орбит принадлежащих группе G отражений являются квадратичными множествами отражений с ненулевыми особыми плоскостями, т. е. когда, в обозначениях работы [2], группа G имеет тип G^s_μ. Пусть группа G такого типа содержит q попарно непересекающихся квадратичных множеств с ненулевыми особыми плоскостями. В работе [3] задача вычисления базисных инвариантов этой группы решена полностью, если $q \leqslant 2$, и, при выполнении некоторых дополнительных ограничений, если $q = 3$. В [6], а затем в [7]–[10] задача решена полностью для $q = 3$, но лишь частично — для $q > 3$.

При этом в [6] и [8]–[10] использовался подход, основанный на предварительном изучении строения множества G-орбит отражений. Можно ожидать, что этот же подход, а также полученная И. М. Гельфандом и В. А. Пономаревым [11] линейная классификация четверок плоскостей позволит получить решение задачи и для $q = 4$. Однако, пока *для $q = 4$ задача вычисления базисных инвариантов группы G остается нерешенной.* Ее решению посвящена настоящая статья.

Целью работы является: на основе изучения строения множества G-орбит отражений и вычисления базисных инвариантов подгрупп, порожденных этими орбитами, показать, что поставленная проблема для произвольной группы G сводится к вычислению базисных инвариантов специальных ее подгрупп типа G^s_μ.

1. Основные результаты

Пусть V — n-мерное вещественное векторное пространство; V^* — пространство, сопряженное (двойственное) к V; $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел.

Если L — линейное пространство и $X \subseteq L$, то $\langle X \rangle$ — линейная оболочка множества X в пространстве L.

Под отражениями в пространстве V будем понимать отражения относительно гиперплоскостей; (P, d) обозначает отражение в V относительно гиперплоскости P в направлении d.

Пусть φ — заданная на V квадратичная форма, A — плоскость в V, не лежащая в асимптотическом конусе C квадратичной формы φ, и $\dim A > 1$. Тогда $[A, \varphi]$ обозначает множество всех отражений (P, d), для которых $d \in A$ и P сопряжена d относительно φ.

Каждой тройке $I := (k, k^+, s)$ целых неотрицательных чисел, удовлетворяющих условиям $2k^+ \geqslant k \geqslant k^+ > 0$, $k + s > 1$, $k + 2s \leqslant n$, сопоставим в пространстве V базис

$$(a_i, b_j, c_l : 1 \leqslant i \leqslant k; 1 \leqslant j \leqslant s; 1 \leqslant l \leqslant n - k - s) \tag{1}$$

с (образующими сопряженный базис) координатными функциями

$$x_i := a_i^*, \quad y_j := b_j^*, \quad z_l := c_l^*, \tag{2}$$

и пусть

$$\Phi_I := \sum_{i \leqslant k^+} x_i^2 - \sum_{j > k^+} x_j^2 + 2 \sum_{l \leqslant s} y_l z_l,$$

$$A_I := \langle a_i : i \geqslant 1 \rangle, \quad M_I := [A_I, \Phi_I], \quad M_I^+ := \{(P, d) \in M_I : \Phi_I(d) > 0\};$$

если $k = k^+ = n$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, то

$$A_{i,j} := \langle a_i, a_j \rangle, \quad M_{i,j} := [A_{i,j}, x_i x_j], \quad T_i := (\ker x_i, a_i),$$

$$\mathcal{T}[m] := \bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant m} M_{i,j}, \quad \overline{\mathcal{T}}[m] := \mathcal{T}[m] \cup \{T_1, \ldots, T_m\}.$$

Под действием на группе $GL(V)$ всех линейных преобразований пространства V любой ее подгруппы понимается действие сопряжениями.

Если $M \subseteq GL(V)$, то G_M — группа, порожденная множеством M; при этом G_I — группа, порожденная множеством M_I.

Предложение 1. Пусть $M = [A, \varphi]$, $(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ — базис в пространстве $\{\xi \in V^* : \xi(A) = 0\}$. Тогда $\varphi, \xi_1, \ldots, \xi_p$ — образующие над $\mathbb{R}$ кольца полиномиальных инвариантов и поля рациональных инвариантов группы G_M.

Предложение 2. Для каждого $m > 1$ формы $x_1 \cdots x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ — образующие над $\mathbb{R}$ кольца полиномиальных инвариантов и поля рациональных инвариантов группы $G_{\mathcal{T}[m]}$, а формы $(x_1 \cdots x_m)^2, x_{m+1}, \ldots, x_n$ — образующие над $\mathbb{R}$ кольца полиномиальных инвариантов и поля рациональных инвариантов группы $G_{\overline{\mathcal{T}}[m]}$.

Множество всех отражений, принадлежащих некоторой конечной подгруппе линейной группы $GL(V)$, а также множества отражений, линейно эквивалентные какому-либо из множеств M_I, $\mathcal{T}[m]$, $\overline{\mathcal{T}}[m]$, будем называть стандартными множествами отражений.

Из предложений 1 и 2 следует, что если M — бесконечное стандартное множества отражений, то оно является множеством всех отражений группы G_M. При этом G_I действует транзитивно на каждом из двух множеств M_I^+ и $M_I \setminus M_I^+$, а группа $G_{\widetilde{\mathcal{T}}[m]}$ действует транзитивно на каждом из двух множеств $\mathcal{T}[m]$ и $\overline{\mathcal{T}}[m] \setminus \mathcal{T}[m]$; если $m > 2$, то $G_{\mathcal{T}[m]}$ действует транзитивно на $\mathcal{T}[m]$.

Теорема. *Пусть G — бесконечная группа, которая порождена отражениями в пространстве V и удовлетворяет следующим условиям:*

(А) *Группа имеет невырожденное кольцо полиномиальных инвариантов; это значит, что ни при каком выборе линейных координат $y_1, y_2, \ldots, y_n$ пространства V кольцо полиномиальных инвариантов группы не содержится в $\mathbb{R}[y_2, \ldots, y_n]$.*

(Б) *Группа содержит каждое отражение, сохраняющее все ее полиномиальные инварианты.*

Тогда семейство всех принадлежащих группе G отражений единственным образом представимо в виде объединения попарно непересекающихся и поэлементно коммутирующих между собой стандартных множеств отражений.

Доказательство этих утверждений непосредственно следует из результатов, полученных в п. 2–5.

2. Квадратичные множества отражений

Зафиксируем множество $M := [A, \varphi]$. Такое множество будем называть квадратичным множеством отражений, определяемым плоскостью A и квадратичной формой φ. Положим

$$A_M = \langle\{d \in V : \exists (P, d) \in M\}\rangle, \quad C_M = A_M \setminus \{d \in V : \exists (P, d) \in M\},$$

$$D_M = \bigcap\{P : \exists (P, d) \in M\}, \quad B_M = A_M \cap D_M.$$

Тогда $A = A_M$, $C \cap A = C_M$, т. е. плоскость A и асимптотический конус $C \cap A$ квадратичной формы $\varphi|_A$ однозначно определяются множеством M.

Пусть $\widetilde{\varphi}$ обозначает линейное отображение, сопоставляющее каждому вектору v пространства V линейную форму, сопряженную v относительно φ.

Множеству M сопоставим линейное отображение $\mu = \widetilde{\varphi}|_A$, которое будем называть характеристическим отображение множества M.

Для любых a и a', принадлежащих A, $\mu(a)(a') = \mu(a')(a)$, т. е. μ является симметричным отображением.

Очевидно, что если $\dim(\ker \mu) > 0$, то G_M содержит сдвиги.

Лемма 1. *Отображение μ определено множеством M однозначно с точностью до умножения на гомотетию пространства A.*

Доказательство. Область определения A отображения μ совпадает с A_M. Кроме того, $(P, d) \in M$ тогда и только тогда, когда $d \in A \setminus C$ и $P = \ker \mu(d)$. Это однозначно определяет проективизацию $\mathbb{P}(\mu)$ отображения μ на непустом открытом подмножестве проективного пространства $\mathbb{P}(A)$. □

Лемма 2. *Пусть $\mu' : A \to V^*$ — линейное симметричное отображение, и $\mu'(a)(a) \neq 0$ хотя бы для одного вектора $a \in A$. Тогда множество M' всех отражений (P, d), для которых $d \in A$, а $P = \ker \mu'(d)$, является квадратичным множеством отражений с характеристическим отображением μ'.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mu} : V \to V^*$ — какое-либо линейное симметричное продолжение отображения μ, φ' — квадратичная форма, определяемая равенством $\varphi'(x) = \widetilde{\mu}(x)(x)$. Тогда A не содержится в асимптотическом конусе формы φ' и $M' = [A, \varphi']$. □

Лемма 3. $M = [A, \varphi_0]$ *тогда и только тогда, когда найдется вещественное λ, для которого A ортогональна V относительно квадратичной формы $\varphi - \lambda\varphi_0$.*

Доказательство. Если μ_0 — характеристическое отображение множества $[A, \varphi_0]$ и $M = [A, \varphi_0]$, то $\mu = \lambda\mu_0$ для некоторого вещественного λ. Но для каждого вектора a, принадлежащего A, линейная форма, $(\varphi - \lambda\varphi_0)$-сопряженная этому вектору, совпадает с $(\mu - \lambda\mu_0)(a)$ и поэтому является нулевой формой. □

Если Y содержится в пространстве V, а Z содержится в V^*, то

$$Y^{\perp} := \{v \in V : Y \subseteq \ker \widetilde{\varphi}(v)\},$$

$$Y^o := \{\xi \in V^* : Y \subseteq \ker \xi\}, \quad Z^o := \bigcap \{\ker \xi : \xi \in Z\}.$$

Положим $B = B_M$, $D = D_M$.

Лемма 4. *Справедливы следующие равенства:*

(а) $D = (\mu(A))^o = A^{\perp}$.

(б) $\mu(B) = (A + D)^o$.

Доказательство. Пусть Q — плоскость в V. Тогда

$$v \in (\widetilde{\varphi}(Q))^o \Longleftrightarrow (\forall a \in Q)\ (\widetilde{\varphi}(a)(v) = 0) \Longleftrightarrow v \in Q^{\perp} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\forall a \in Q)\ (\widetilde{\varphi}(v)(a) = 0) \Longleftrightarrow \widetilde{\varphi}(v) \in Q^o \Longleftrightarrow v \in (\widetilde{\varphi})^{-1}(Q^o),$$

т. е.

$$Q^{\perp} = (\widetilde{\varphi}(Q))^o = (\widetilde{\varphi})^{-1}(Q^o). \tag{3}$$

Докажем равенство (а). По определению, $D = (\widetilde{\varphi}(A \setminus C))^o$. Но

$$(\widetilde{\varphi}(A \setminus C))^o = (\langle \widetilde{\varphi}(A \setminus C) \rangle)^o = (\widetilde{\varphi}(\langle A \setminus C \rangle))^o = (\widetilde{\varphi}(A))^o = (\mu(A))^o.$$

При этом, в силу (3), $(\mu(A))^o = A^{\perp}$.

Докажем теперь (б). В силу (а), $\mu(B) = \mu(A \cap A^{\perp})$ и $(A + D)^o = A^o \cap \mu(A)$. Но, учитывая (3), получаем:

$$\xi \in A^o \cap \mu(A) \Longleftrightarrow (\exists a)\ (a \in A\ \&\ \xi = \mu(a)\ \&\ \mu(a) \in A^0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\exists a)\ (a \in A\ \&\ \xi = \mu(a)\ \&\ a \in \mu^{-1}(A^o)) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\exists a)\ (a \in A\ \&\ \xi = \mu(a)\ \&\ a \in A^{\perp}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\exists a)\ (a \in A \cap A^{\perp}\ \&\ \xi = \mu(a)) \Longleftrightarrow \xi \in \mu(A \cap A^{\perp}).$$

□

Лемма 5. *Пусть* $(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ *— базис в пространстве* A^0. *Тогда* $\varphi, \xi_1, \ldots, \xi_p$ *— образующие над* $\mathbb{R}$ *кольца полиномиальных инвариантов и поля рациональных инвариантов группы* G_M.

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$\tau_1 = \dim A - \dim B, \quad \tau_2 = \dim B - \dim(\ker \mu), \quad \tau_3 = \dim B - \dim(\ker \mu),$$

$$\tau_4 = \dim D - \dim B, \quad \tau_5 = \dim(\ker \mu).$$

Зафиксируем в $A + D$ базис $(e_{i,j} : i \neq 3; j \in \{1, \ldots, \tau_i\})$, удовлетворяющий следующий условиям:

$(e_{5,j} : j \leqslant \tau_5)$ — базис $\ker \mu$, $(e_{i,j} : i \in \{2, 5\}; j \leqslant \tau_i)$ — базис B,

$(e_{i,j} : i \in \{1; 2; 5\}; j \leqslant \tau_i)$ — φ-ортогональный базис A,

$(e_{i,j} : i > 1; j \leqslant \tau_i)$ — базис D.

Из равенства $\operatorname{rank}\varphi|_A = \tau_1$ следует, что $\varepsilon_i := \mu(e_{1,i})(e_{1,i}) \neq 0$ для всех i. Положим

$$x_{1,i} = \varepsilon_i^{-1}\mu(e_{1,i}), \quad x_{3,j} = \mu(e_{2,j}) \quad (i \leqslant \tau_1, j \leqslant \tau_2). \tag{4}$$

Тогда из φ-ортогональности семейства $(e_{i,j} : i \in \{1;2;5\}, j \leqslant \tau_i)$, (4) и равенства (б) леммы 4 следует, что индексированное семейство

$$E := (e_{i,j} : i \neq 3; j \leqslant \tau_i)$$

линейно независимых векторов и индексированное семейство

$$X := (x_{i,j} : i \in \{1;3\}; j \leqslant \tau_i)$$

линейно независимых форм сопряжены, т.е.

$$x_{i,j}(e_{p,q}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (i,\ j) = (p,\ q), \\ 0, & \text{если } (i,\ j) \neq (p,\ q), \end{cases}$$

для любых $x_{i,j} \in X$ и $e_{p,q} \in E$.

Значит, E и X содержатся в сопряженных базисах, один из которых образован векторами $e_{i,j}$, а другой — линейными формами $x_{i,j}$ для всех $i \in \{1,\ldots,5\}$ и $j \in \{1,\ldots,\tau_i\}$.

Положим $\Phi = \sum_i \varepsilon_i\, x_{1,i}^2 + 2\,\sum_j x_{2,j}\, x_{3,j}$. Тогда $M = [A,\Phi]$, и, по лемме 3, найдутся вещественные $\gamma_{i,j}$ и ненулевое вещественное λ, для которых $\Phi - \lambda\varphi = \sum_{i,j}\gamma_{i,j}\,\xi_i\,\xi_j$.

Кроме того, $p = \tau_3 + \tau_4$, и $(x_{i,j} : i \in \{3;4\}, j \leqslant \tau_i)$ — базис A^o. Отсюда

$$\mathbb{R}[\varphi,\, \xi_1,\ldots,\xi_p] = \mathbb{R}[\Phi,\, x_{i,j} : i \in \{3;4\}, j \leqslant \tau_i],$$

$$\mathbb{R}(\varphi,\, \xi_1,\ldots,\xi_p) = \mathbb{R}(\Phi,\, x_{i,j} : i \in \{3;4\}, j \leqslant \tau_i).$$

Но в [2] и [3] доказано, что Φ, $x_{i,j}\,(i \in \{3;4\}, j \leqslant \tau_i)$ — образующие над $\mathbb{R}$ кольца полиномиальных инвариантов и поля рациональных инвариантов группы G_M. $\square$

Из леммы 5 следует, что M — множество всех отражений, принадлежащих группе G_M. При этом G_M действует на множествах $M^+ := \{(P,d) \in M : \mu(d)(d) > 0\}$ и $M\ M^+$. В самом деле, если $(P,d) \in M$, $a \in A$ и $v \in V$, то

$$(P,d)(v) = v - \frac{2\,\mu(d)(v)}{\mu(d)(d)}\,d,$$

а отсюда $\mu(a)(v) = \mu((P,d)(a))((P,d)(v))$. В частности, $\operatorname{sgn}(\mu(a)(a))$ не изменяется под действием G_M.

Нетрудно проверить, что G_M действует на M^+ и на M/M^+ транзитивно.

Кроме того, из доказательства леммы 5 следует, что G_M не содержит сдвигов тогда и только тогда, когда M линейно эквивалентно некоторому стандартному множеству M_I.

Лемма 6. *Замыкание группы G, удовлетворяющей условиям теоремы, содержит квадратичное множество отражений.*

Доказательство. Если группа G удовлетворяет условиями теоремы, то она содержит недискретное множество отражений [4]. Остальное следует из [5]. $\square$

Замечание. Утверждение леммы 6 может быть выведено из теоремы, доказанной в [1] и использованной затем [2-5] для вычисления инвариантов различных классов бесконечных групп отражений. Однако и содержащееся в [1] доказательство этой теоремы, и различные последующие его модификации неявно используют компактность множества всех отражений, принадлежащих G, относительно евклидовой топологии.

3. Тетраэдральные множества отражений

Пусть $(a_1, \ldots, a_n)$ — базис в V, сопоставленный тройке $I = (n, n, 0)$; соответствующие этому базису координатные функции $x_1, \ldots x_n$, а также множества $A_{i,j}$, $M_{i,j}$, $\mathcal{T}[m]$, $\overline{T}[m]$, $G_{\mathcal{T}[m]}$ и $G_{\widetilde{\mathcal{T}}[m]}$ и отражения T_i — те же, что и в п.1.

Множество отражений в пространстве V, линейно эквивалентное некоторому $\mathcal{T}[m]$(или $\overline{\mathcal{T}}[m]$) будем называть тетраэдральным (соответственно, расширенным тетраэдральным) множеством отражений.

Для любого $m \geqslant 2$ замыкание (и в евклидовой топологии, и в топологии Зарисского) всех d, отражения в направлении которых принадлежат $\mathcal{T}[m]$, является объединением 2-плоскостей $A_{i,j}$, а также множества $M_{i,j}$ и прямые (a_i) однозначно определяются множеством $\mathcal{T}[m]$.

Лемма 7. $\mathcal{T}[m]$ *является множеством всех отражений, сохраняющих формы* $x_1 \cdots x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$.

Доказательство. Для $m = 2$ лемма уже доказана (см. лемму 5). Пусть лемма доказана для всех $m < k$, отражение (P, d) сохраняет формы $\varphi_k := x_1 \cdots x_k$ и $x_{k+1}, \ldots, x_n$, L_i — i-тая производная по d формы φ_k, ξ — линейная форма, для которой $\ker \xi = P$. Тогда $d = \sum_i \alpha_i a_i$ и L_i делится на ξ для всех нечетных i. При этом

$$L_k = k! \prod_{i \leqslant k} \alpha_i, \quad L_{k-1} = (k-1)! \sum_{j \leqslant k} x_j \prod_{\substack{i \neq j \\ 1 \leqslant i \leqslant k}} \alpha_i, \quad L_1 = \sum_{i \leqslant k} \alpha_i \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leqslant j \leqslant k}} x_j.$$

Поэтому если k нечетно, то L_k делится на ξ, а это значит, что хотя бы одно $\alpha_i = 0$. Если же k четно, то на ξ делятся L_{k-1} и L_1. Отсюда следует, что если $k > 2$, то хотя бы одно $\alpha_i = 0$. В самом деле, допустим, что $\alpha_i \neq 0$ для всех i. Тогда $L_{k-1} \neq 0$, $L_{k-1} \parallel \xi$ и поэтому $L_1 = L_{k-1}\Psi$ для некоторого многочлена Ψ степени $k-2$. Но относительно каждой из переменных $x_1, \ldots, x_k$ степени многочленов L_1 и L_{k-1} равны 1. Поэтому $k - 2 = 0$.

Таким образом, если $k > 0$, то хотя бы один коэффициентов α_i равен 0. Можно считать, что $\alpha_k = 0$. Но в таком случае (P, d) сохраняет формы $x_1 \cdots x_{k-1}$ и $x_k, \ldots, x_n$, и, по индуктивному предположению, (P, d) принадлежит множество $\mathcal{T}[k-1]$. $\square$

Лемма 8. *$G_{\mathcal{T}[2]}$ орбита любого отражения, принадлежащего множеству $M_{2,3}$, содержит $M_{1,3} \cup M_{2,3}$.*

Доказательство. Пусть $R_1 \in M_{2,3}$, $R_2 \in M_{1,3}$. С использованием координатных представлений отражений, принадлежащих $\mathcal{T}[3]$, прямым вычислением показывается, что найдется $R_3 \in M_{1,2}$ такое, что $R_2 = R_3\, R_1\, R_3$. □

Отсюда, в частности, следует, что если $m > 2$, то $G_{\mathcal{T}[m]}$ действует на множестве $\mathcal{T}[m]$ транзитивно.

Лемма 9. *Пусть $h := f(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ — рациональный инвариант группы $G_{\mathcal{T}[m]}$. Тогда $h := f(x_1 \cdots x_m, 1, \ldots, 1, x_{m+1}, \ldots, x_n)$*

Доказательство. Из инвариантности h относительно содержащейся в $G_{\mathcal{T}[2]}$ однопараметрической группы гиперболических поворотов следует, что для любой точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет условию $x_2 > 0$, имеем: $h := f(x_1 x_2, 1, x_3, \ldots, x_n)$ (см. [12], с.67, 3^o.1.2). Остальное очевидно. □

Из леммы 9 следует, что $\mathcal{T}[m]$ — множество всех отражений, принадлежащих группе $G_{\mathcal{T}[m]}$.

Лемма 10. *$\overline{\mathcal{T}}[m]$ — множество всех отражений, сохраняющих формы*

$$(x_1 \cdots x_m)^2, \quad x_{m+1}, \ldots, x_n. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть отражение (P, d) сохраняет формы (5), но форма $g := x_1 \cdots x_m$ не является инвариантом отражения (P, d). Тогда $d = \sum_{i \leqslant m} \alpha_i a_i$ и при этом $g = \xi\psi$, где ξ — линейная форма, ядро которой совпадает с гиперплоскостью P, а ψ — многочлен, сохраняющийся отражением (P, d). Можно считать, что $\xi = x_1$. Тогда $\psi = x_2 \cdots x_m$, $\alpha_1 \neq 0$ и

$$\psi \cdot (P, d) = \left(x_2 - \frac{2\alpha_2}{\alpha_1}\, x_1\right) \cdots \left(x_k - \frac{2\alpha_m}{\alpha_1}\, x_1\right) = x_2 \cdots x_m.$$

Отсюда $\alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$, т.е. $(P, d) = T_1$. □

Лемма 11. *$G_{\mathcal{T}[m]}$ транзитивно действует на множестве $\{T_1, \ldots, T_m\}$, а $G_{\overline{\mathcal{T}}[m]}$ транзитивно действует на множестве $\mathcal{T}[m]$.*

Лемма 12. *Формы* (5) *— образующие над $\mathbb{R}$ кольца полиномиальных инвариантов и поля рациональных инвариантов группы $G_{\overline{\mathcal{T}}[m]}$.*

Доказательство. Пусть $h := f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — рациональный инвариант группы $G_{\overline{\mathcal{T}}[m]}$. Из инвариантности h относительно T_1 имеем: $h = f(-x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Отсюда $h \in \mathbb{R}\,[x_1^2, x_2, \ldots, x_n]$. Остается воспользоваться равенством, доказанным в лемме 9. □

Из леммы 12 следует, что $\overline{\mathcal{T}}[m]$ — множество всех отражений, принадлежащих группе $G_{\overline{\mathcal{T}}[m]}$

4. Пополнение квадратичных множеств отражений

Далее φ, A, M, B, C, D и μ те же, что и в п.2, а $T_0 := (P_0, d_0)$ — некоторое не принадлежащее M отражение в пространстве V.

Лемма 13. *Пусть $d_0 \notin A$. Тогда*

(а) *следующие условия попарно эквивалентны:*

(а1) *$M \cup \{T_0\}$ содержится в некотором квадратичном множестве отражений.*

(а2) $A \cap P_0 = A \cap \{d_0\}^{\perp}$.

(а3) *существует линейное симметричное отображение $\widetilde{\mu} : A \oplus \langle d_0 \rangle \to V^*$, для которого $\widetilde{\mu}|_A = \mu$ и $\ker\, \widetilde{\mu}(d_0) = P_0$.*

(б) *если (P_0, d_0) не коммутирует хотя бы с одним отражением, принадлежащим M, то существует не более одного отображения $\widetilde{\mu}$, удовлетворяющего условию (а3).*

Доказательство. Для любого $a \in A : \mu(a)(d_0)$. Тогда $\xi_0 \in A^*$,

$$\ker\, \xi_0 = \{a \in A : \mu(a)(d_0) = 0\} = A \cap \{v \in V : \widetilde{\varphi}(v)(d_0) = 0\} = A \cap \{d_0\}^{\perp}. \quad (6)$$

Пусть выполнено (а1). Тогда найдется квадратичная форма φ' такая, что $M \cup \{T_0\} \subseteq [A \oplus \langle d_0 \rangle, \varphi']$ и при этом $P_0 = \ker\, \mu'(d_0)$, где μ' — характеристическое отображение множества $[A \oplus \langle d_0 \rangle, \varphi']$

За счет выбора φ' можно считать, что $\mu'|_A = \mu$. Но тогда, в силу (6)

$$A \cap P_0 = A \cap \ker \mu'(d_0) = \{v \in A : \mu'(d_0)(v) = 0\} =$$
$$= \{v \in A : \mu'(v)(d_0) = 0\} = \{v \in A : \mu(v)(d_0) = 0\} = \ker\, \xi_0 = A \cap \{d_0\}^{\perp},$$

т.е. условие (а2) выполнено.

Допустим теперь, что выполнено условие (а2). Тогда из (6), что ξ_0 продолжается до линейной функции $\widetilde{\xi}_0 \in V^*$, ядро которой совпадает с P_0. Определим линейное продолжение $\widetilde{\mu} : A \oplus \langle d_0 \rangle \to V^*$ отображения μ, полагая $\widetilde{\mu}(d_0) = \widetilde{\xi}_0$. Тогда для каждого $a \in A$ имеем: $\widetilde{\mu}(a)(d_0) = \mu(a)(d_0) = \xi_0(a) = \widetilde{\xi}_0 = \widetilde{\mu}(d_0)(a)$. Отсюда и из симметричности μ следует симметричность $\widetilde{\mu}$.

Таким образом, (а3) доказано. Но очевидно, что (а3) влечет (а1).

Докажем (б). Пусть $\widetilde{\mu} : A \oplus \langle d_0 \rangle \to V^*$ — какое-нибудь линейное симметричное отображение, удовлетворяющее условию (а3). Положим $\widetilde{\mu}(d_0) = \widetilde{\xi}_0$. Тогда $\ker \widetilde{\xi}_0 = P_0$ и для каждого $a \in A$

$$\widetilde{\xi}_0(a) = \widetilde{\mu}(d_0)(a) = \widetilde{\mu}(a)(d_0) = \mu(a)(d_0) = \xi_0(a). \quad (7)$$

Значит, если $A \nsubseteq P_0$, то выбирая $a \in A \setminus P_0$, из (7) получаем, что $\widetilde{\xi}_0$ однозначно определяется условием (а3), а тогда этим условием однозначно определяется и $\widetilde{\mu}$.

Если же $A \subseteq P_0$, то из (а2) получаем, что $A \subseteq \{d_0\}^{\perp}$. Но тогда

$$d_0 \in \left(\{d_0\}^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq A^{\perp} = D,$$

и, значит, T_0 коммутирует с каждым отражением, принадлежащим M. $\square$

Лемма 14. *Пусть группа G', порожденная множеством $M \cup \{T_0\}$, не содержит сдвигов. Тогда*

$$(A \cap P_0) \setminus C = (A \cap \{d_0\}^{\perp}) \setminus C, \tag{8}$$

$$d_0 \in V \setminus ((B \cup (A \setminus C)) = (V \setminus A) \cup (C \setminus B), \tag{9}$$

$$d_0 \in D \Longleftrightarrow A \subseteq P_0. \tag{10}$$

Доказательство. Из отсутствия сдвигов в группе G' следует, что

$$(\forall d \in A \setminus C)\ (d \in P_0 \Longleftrightarrow d_0 \in \ker \mu(d)). \tag{11}$$

Но $d_0 \in \ker \mu(d)$ тогда и только тогда, когда $d \in \{d_0\}^{\perp}$. Следовательно,

$$(A \setminus C) \cap P_0 = (A \setminus C) \cap \{d_0\}^{\perp}$$

и (8) доказано.

Докажем (10). Из (11) получаем, что если $A \subseteq P_0$, то $d_0 \in D$, а если $d_0 \in D$, то $A \setminus C \subseteq P_0$, но тогда и $A \subseteq P_0$.

Из (10) следует, что $d_0 \notin B$, т.к. иначе $d_0 \in A$ и $A \subseteq P_0$, т.е. $d_0 \in P_0$, что невозможно. Кроме того, $d_0 \notin A \setminus C$, т.к. иначе либо $(P_0, d_0) \in M$, либо $P_0 \neq \ker \mu(d_0)$ и тогда G' содержит сдвиги. Значит справедливо (9). $\square$

Лемма 15. *Пусть Q — плоскость, лежащая в A, но не содержащаяся в C, $e_1 \in A \setminus (Q \cup C)$, $Q \not\subseteq \ker \mu(e_1)$, $\dim \mu(Q) > 1$. Тогда всякий инвариант (рациональный или полиномиальный) группы G', порожденной множеством $[Q, \varphi] \cup \{(\ker\ \mu(e_1),\ e_1)\}$, является инвариантом группы G_M.*

Доказательство. По условию, $\Pi_1 := \ker\ \mu(e_1)$ — гиперплоскость, не содержащая Q, и $e_1 \notin \Pi_1$. Поэтому $\mu(e_1)(e_1) \neq 0$. Найдется вектор $e_2 \in Q \setminus \Pi_1$, для которого $\mu(e_2)(e_2) \neq 0$, т.к. иначе $Q \subseteq C$. При этом можно считать, что $e_1 - e_2 \in \Pi_1$, т.к. $\langle e_1,\ e_2 \rangle$ пересекает Π_1 по прямой, не лежащей в Q.

По условию, $\dim \mu(Q) > 1$. Поэтому в $\Pi_1 \cap Q$ существует базис $(e_3, \ldots, e_k)$, для которого $\mu(e_3) \nparallel \mu(e_2)$. В свою очередь, векторы $e_1 - e_2, e_3, \ldots, e_k$ можно дополнить до базиса в Π_1 векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$.

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — базис в V^*, двойственный к базису $e_1, \ldots, e_n$ пространства V, h — рациональный инвариант группы G'. Тогда h — инвариант группы, порожденной множеством $[Q, \varphi], x_1 \in Q^o$, и, по лемме 5,

$$h = \left(\sum_{i=0}^{r} Y_i x_1^i \right) \left(\sum_{i=0}^{r} Z_i x_1^i \right)^{-1} \tag{12}$$

для некоторого целого неотрицательного r и функций Y_i, Z_i, принадлежащих полю $\mathbb{R}[\varphi,\ x_{k+1}, \ldots, x_n]$, причем хотя бы одно $Z_i \neq 0$, а если h — полиномиальный инвариант группы G', то $Z_0 = 1$ и $Z_i = 0$ для всех $i > 0$.

Из инвариантности h относительно отражения (Π_1, e_1) и из (12) имеем:

$$h = \left(\sum_{i=0}^{r} Y_i(-x_1 - 2\,x_2)^i \right) \left(\sum_{i=0}^{r} Z_i(-x_1 - 2\,x_2)^i \right)^{-1} \tag{13}$$

Из (13), учитывая инвариантность Y_i, Z_i и h относительно отражения $(\ker \mu(e_2 + t\,e_3), e_2 + t\,e_3)$, определенного для всех вещественных значений параметра t, удовлетворяющих условию $\sigma(t) := \mu(e_2 + t\,e_3)(e_2 + t\,e_3) \neq 0$, получаем

$$h = \left(\sum_{i=0}^{r} Y_i w^i \right) \left(\sum_{i=0}^{r} Z_i w^i \right)^{-1}, \tag{14}$$

где $w = -x_1 - 2\,x_2 + 4\,(\sigma(t))^{-1}\,(\mu(e_3)t + \mu(e_2)) \in \mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n, t)$. Отсюда следует, что w'_t — ненулевой элемент поля $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n, t)$.

Значит, элемент w поля $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n, t)$ трансцендентен над $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда из (14) следует, что для каждого Z_i отличного от 0, $h = Y_i Z_i^{-1}$. Но все Y_i и Z_i являются инвариантами группы, порожденной множеством M. $\square$

Лемма 16. *Пусть $M \cup \{T_0\}$ не содержится ни в каком квадратичном множестве отражений, G' — группа, порожденная множеством $M \cup \{T_0\}$, и замыкание этой группы в $GL(V)$ относительно евклидовой топологии не содержит сдвигов. Тогда группа G' линейно эквивалентна или $G_{\overline{\mathcal{T}}[2]}$, или $G_{\mathcal{T}[3]}$.*

Доказательство. Из условия леммы следует, что $d_0 \notin D$, $A \nsubseteq P_0$. В самом деле, если справедливо хотя бы одно из соотношений $d_0 \in D$, $A \subseteq P_0$, то по лемме 14 выполнены оба этих соотношения. Но тогда из леммы 13 следует, что $M \cup \{(P_0, d_0)\}$ содержится в квадратичном множестве отражений.

Если $d_0 \in A$, то $d_0 \in C$ (т.к. иначе либо $T_0 \in M$, либо G' содержит сдвиги); но тогда $d_0 \in \{d_0\}^\perp$ и поэтому, полагая $Q_0 = A \cap \{d_0\}^\perp$, имеем

$$Q_0 \neq A \cap P_0. \tag{15}$$

Если же $d_0 \notin A$, то по лемме 13 опять имеем (15).

С другой стороны, из отсутствия сдвигов в G' и из леммы 14 следует (8).

Из (15) и (8) вытекает, что асимптотический конус $C \cap A$ квадратичной формы $\varphi|_A$ распадается на две различные гиперплоскости $A \cap P_0$ и Q_0. Действительно, из $d_0 \notin D$ и $A \nsubseteq P_0$, следует, что $A \cap P_0$ и Q_0 — гиперплоскости в A. Если $Q_0 \nsubseteq C$, то $\langle (A \cap P_0) \backslash C \rangle = \langle Q_0 \backslash C \rangle = Q_0 \neq 0$. Но тогда $A \cap P_0 \nsubseteq C$, а поэтому $\langle (A \cap P_0) \backslash C \rangle = A \cap P_0$, что противоречит (15). Следовательно, $Q_0 \subseteq C$. Аналогичным образом доказывается, что $A \cap P_0 \subseteq C$.

Следовательно, с точностью до линейной эквивалентности, можно считать, что $M = M_I$ для тройки $I = (2, 1, s)$. Пусть (1), (2) и Φ_I — базис, координатные функции и квадратичная форма, сопоставленные этой тройке. Тогда

$$d_0 = \alpha_1^o a_1 + \alpha_2^o a_2 + \sum_{i,j} (\beta_i^o b_i + \gamma_j^o c_j),$$

$$P_0 = \ker\left(A_1^o x_1 + A_2^o x_2 + 2\sum_{i,j}\left(B_i^o y_i + C_j^o z_j\right)\right),$$

а плоскость $A \cap P_0$ и в базисе $\mathcal{B} := (a_1, a_2, b_1, \ldots, b_s)$ пространства A задается уравнением $A_1^o x_1 + A_2^o x_2 + \sum_{i\leqslant s} B_i^o y_i = 0$. Q_0 в этом же базисе задается уравнением $\alpha_1^o x_1 - \alpha_2^o x_2 + \sum\limits_{i\leqslant s} \gamma_i^o y_i = 0$, т.к.

$$\mu\left(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \sum_{i\leqslant s} \beta_i b_i\right)(d_0) = \left(\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + \sum_{i\leqslant s} \beta_i z_i\right)(d_0) = \alpha_1^o \alpha_1 - \alpha_2^2 \alpha_2 + \sum_{i\leqslant s} \gamma_i^o \beta_i.$$

Но $A \cap C$ распадается на плоскости, которые в базисе $\mathcal{B}$ задаются уравнениями $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$. Поэтому можно считать, что $A \cap P_0$ задается уравнением $x_1 + x_2 = 0$, а Q_0 задается уравнением $x_1 + x_2 = 0$. Отсюда

$$A_1^o = A_2^o = \alpha_1^o = \alpha_2^o = 1, \quad B_1^o = \ldots = B_s^o = \gamma_1^o = \ldots \gamma_s^o = 0,$$

$$d_0 = a_1 + a_2 + \sum_{i>0} \beta_i^o b_i + \sum_{j>s} \gamma_j^o c_j, \quad P_0 = \ker(x_1 + x_2 + 2\sigma),$$

где $\sigma = \sum_{j>0} C_j^o z_j$.

Допустим, что $s > 0$. Положим $T_i^{(t)} = (\ker\ \mu(a_i + tb_1), a_i + tb_1)$. Тогда

$$T_2^{(-t)} T_1^{(t)} T_0 T_1^{(t)} T_2^{(-t)} = (\ker(x_1 + x_2 + 4tz_1 - 2\sigma), 2(a_1 + a_2) - d_0).$$

Следовательно, G' содержит сдвиги.

Таким образом, $s = 0$. Положим

$$\widetilde{a}_1 = a_1 + a_2, \quad \widetilde{a}_2 = a_1 - a_2, \quad \widetilde{x}_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \widetilde{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2).$$

Тогда $(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, c_1, \ldots, c_{n-2})$ — базис пространства V с координатными функциями $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, z_1, \ldots, z_{n-2}$. При этом алгебра Ли замыкания $\overline{G'}$ группы G' в $GL(V)$ относительно евклидовой топологии группы $GL(V)$ содержит производящий оператор $\Gamma_0 := \{\widetilde{x}_1' = \widetilde{x}_1,\ \widetilde{x}_2 = -\widetilde{x}_2,\ z_j' = 0$ для всех $j > 0\}$ лежащей в $G_{\mathcal{T}[2]}$ однопараметрической группы гиперболических поворотов, а также операторы $\Gamma_1 := T_0 \Gamma_0 T_0,\ \Gamma_2 := [\Gamma_1, \Gamma_0], \Gamma_3 := [\Gamma_2, \Gamma_0], \Gamma_1 - \Gamma_0, \Gamma_2 + \Gamma_3$.

Если $d_0 \in A$, то $\Gamma_1 - \Gamma_0 = \{\widetilde{x}_1' = 2\sigma, \widetilde{x}_2' = 0, z_j' = 0$ для всех $j \geqslant 1\}$. Отсюда $\sigma = 0$, т.к. иначе $\Gamma_1 - \Gamma_0$ — производящий оператор однопараметрической группы сдвигов, принадлежащих $\overline{G'}$. Но если $\sigma = 0$, то $P_0 = \ker\ \widetilde{x}_1$ и, значит, с точностью до линейной эквивалентности, $M \cup \{T_0\} = \mathcal{T}[2] \cup \{\mathcal{T}_1\}$, а отсюда, по лемме 11, $G' = \overline{\mathcal{T}}[2]$.

Если же $d_0 \notin A$, то $\Gamma_2 + \Gamma_3 =$

$$\left\{ \widetilde{x}_1' = 0, \widetilde{x}_2' = 0, z_l' = 4\gamma_l^o \left(1 - \sum_j C_j^o \gamma_j^o\right) \left(1 + \sum_j C_j^o \gamma_j^o\right)^{-2} \widetilde{x}_1 \text{ для всех } l > 0 \right\}.$$

Отсюда

$$\sum_j C_j^o \gamma_j^o = 1, \tag{16}$$

т.к. иначе $\Gamma_2 + \Gamma_3$ — производящий оператор однопараметрической группы сдвигов, принадлежащих $\overline{G'}$.

Полагая $\widetilde{a}_3 = \sum\limits_j \gamma_j c_j, \widetilde{x}_3 = \sigma$, как и при доказательстве леммы 5, из (16) получаем, что $(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \widetilde{a}_3)$ и $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)$ содержатся в сопряженных базисах пространств V и V^* соответственно. Относительно этих базисов $d_0 = \widetilde{a}_1 + \widetilde{x}_3,\ P_0 = \ker(\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_3)$. Отсюда следует, что для соответствующего T, принадлежащего $M_{1,3}$, множество $M \cup \{T_0\}$ линейно эквивалентно подмножеству $M_{1,2} \cup \{T\}$ множества $\mathcal{T}[3]$. Но тогда, по лемме 8, группа G' линейно эквивалентна группе $G_{\mathcal{T}[3]}$. □

5. Пополнение тетраэдральных множеств отражений

Для доказательства теоремы остается проверить следующее утверждение.

Лемма 17. *Пусть для некоторого $k > 1$ множество N совпадает с $\overline{\mathcal{T}}[k]$ или с $\mathcal{T}[k+1], T_0 := (P_0, d_0)$ — отражение, которое не принадлежит N и не коммутирует хотя бы с одним отражением, принадлежащим N, G' — группа, порожденная множеством $N \cup \{T_0\}$. Если замыкание группы G' в $GL(V)$ относительно евклидовой топологии не содержит сдвигов, то G' линейно эквивалентна $G_{\overline{\mathcal{T}}[k+1]}$ или $G_{\mathcal{T}[k+2]}$.*

Доказательство. Далее базис $(a_i : i \geqslant 1)$ с координатными функциями x_i множества $M_{i,j}, A_{i,j}$ и отражения T_i — те же, что и в п.1.

Пусть замыкание $\overline{G'}$ группы G' относительно евклидовой топологии не содержит сдвигов, $\overline{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы $\overline{G'}$, N совпадает с $\mathcal{T}[m]$ для некоторого $m > 2$ или с $\overline{\mathcal{T}}[m]$ для некоторого $m > 1$,

$$d_0 = \sum_{i \geq 1} \alpha_i^o a_i, \quad \xi_0 = \sum_{i \geqslant 1} A_i^o x_i, \quad P_0 = \ker\ \xi_0, \quad S_0 := 1 - \sum_{j > m} A_j^o \alpha_j^o.$$

По условию $\xi_0(d_0) \neq 0$. Положим $\sigma_0 = (\xi_0(d_0))^{-1}$.

Найдутся $i \leqslant m$ и $j \leqslant m$, для которых $\alpha_i^o \neq 0$ и $A_j^o \neq 0$ (иначе либо T_0 коммутирует со всеми отражениями, принадлежащими N, либо G' содержит сдвиги).

По лемме 14, если $i < j \leqslant m$ и выполняется хотя бы одно из неравенств $\alpha_i^o \alpha_j^o \neq 0$, $A_i^o A_j^o \neq 0$, то справедливы оба эти неравенства, и в этом случае $A_i^o \alpha_i^o = A_j^o \alpha_j^o$.

Рассмотрим следующие случаи.

1) $m = 2, N = \overline{\mathcal{T}}[2]$. Для каждого вещественного $t \neq 0$ множество N содержит отражение $R_t := (\ker(tx_1 + x_2), a_1 + ta_2)$, а алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ содержит операторы

$$\Gamma_0 := \{x_1' = x_1,\ x_2' = -x_2,\ x_j' = 0 : j \geqslant 3\},$$

$$\Gamma_1 := T_0\Gamma_0T_0,\ \Gamma_2 := [\Gamma_1, \Gamma_0],\ \Gamma_3 := [\Gamma_2, \Gamma_0],\ \Gamma_4 := T_2\Gamma_3T_2 \text{ и } \Gamma_5 := \Gamma_2 + \Gamma_4.$$

Если $d_0 \in A_{1,2}$ то любо $T_0 \in N$, либо G' содержит сдвиги. Следовательно, найдется $j > 2$, для которого $\alpha_j^o \neq 0$.

1.1 $\alpha_1^o \neq 0, \alpha_2^o \neq 0$.

Используя принадлежащие $\mathcal{T}[2]$ отражения, можно считать, что $\alpha_1^o = \alpha_2^o = 1$. Но тогда, по лемме 14, $A_1^o = A_2^o = 1$, и

$$\Gamma_5 = \{x_1' = 0, x_2' = 0, x_j' = -4\sigma_0\alpha_j^o(x_1 + x_2) : j \geqslant 3\}.$$

Отсюда следует, что Γ_5 — производящий оператор лежащей в $\overline{G'}$ однопараметрической группы сдвигов.

1.2 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, A_1^o = 0, A_2^o = 1$.

Тогда $\Gamma_5 = \{x_1' = 0, x_2' = 0, x_j' = -4\sigma_0\alpha_j^o x_2 : j \geqslant 3\}$, и опять Γ_5 — производящий оператор лежащей в $\overline{G'}$ однопараметрической группы сдвигов.

1.3 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, A_1^o = 1, A_2^o = 0$.

Теперь $\Gamma_5 = \{x_1' = 0, x_2' = 0, x_j' = 4\sigma_0^2 S_0\alpha_j^o x_1 : j \geqslant 3\}$. Учитывая, что $d_0 \notin A_{1,2}$, получаем равенство $S_0 = 0$, т.к. иначе Γ_5 — производящий оператор лежащей в $\overline{G'}$ однопараметрической группы сдвигов.

2) $m > 2,\ N = \mathcal{T}[m]$.

Для каждого вещественного $t \neq 0$ множество N содержит отражение $R_{1,t} := (\ker(tx_1 + x_3), a_1 + ta_3)$, а алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ содержит операторы

$$\Gamma_0 := \{x_1' = x_1, x_2' = -x_2, x_i' = 0 : i \geqslant 3\}, \quad \Gamma_1 := T_0\Gamma_0T_0, \Gamma_2 := [\Gamma_1, \Gamma_0],$$

$$\Gamma_0' := \{x_1' = x_1,\ x_3' = -x_3,\ x_i' = 0 : i \notin \{1; 3\}\},$$

$\Gamma_2' := [\Gamma_1, \Gamma_0'],\ \Gamma_3' := [\Gamma_2', \Gamma_0],\ \Gamma_4' := \Gamma_2' + \Gamma_3',\ \Gamma_5' := [\Gamma_4', \Gamma_0']$ и $\Gamma_4' + \Gamma_5'$.

2.1 $\alpha_1^o \neq 0, \alpha_2^o \neq 0$.

Можно считать, что $\alpha_1^o = \alpha_2^o = 1$. Но тогда, по лемме 14, $A_1^o = A_2^o = 1$, и

$$\Gamma_4' + \Gamma_5' = \{x_1' = 0,\ x_2' = 0,\ x_3' = -24\sigma_0\alpha_3^o x_1,\ x_i' = -8\sigma_0\alpha_i^o x_1 : i \geqslant 4\}$$

— производящий оператор лежащей в $\overline{G'}$ однопараметрической группы сдвигов (т.к. в противном случае все α_i^o для $i > 2$ равны 0, а отсюда либо $T_0 \in M_{1,2}$, либо G' содержит сдвиги).

2.2 $\alpha_1^o = 1, \alpha_2^o = \ldots = \alpha_m^o = 0,\ A_2^o = 1, A_1^o = 0, A_3^o = \ldots = A_m^o = 0$.

В этом случае $\xi_0(d_0) = \sum\limits_{j>m} \alpha_j^o A_j^o$ и, следовательно, найдется $j > m$, для которого $\alpha_j^o \neq 0$. Но

$$R_{1,t}(d_0) = -ta_3 + \sum_{j>m} \alpha_j^o a_j, \quad R_{1,t}(P_0) = P_0.$$

Значит, направление вектора $R_{1,t}(d_0)$ изменяется с изменением t, а плоскость $R_{1,t}(P_0)$ не изменяется, и G' содержит сдвиги.

2.3 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0, A_1^o = 1, A_2^o = \ldots = A_m^o = 0$.
Теперь $\Gamma_4' = \{x_i' = 0,\ x_j' = 4\sigma_0^2 S_0 \alpha_j^o x_1 : i \leqslant m, j > m\}$. Отсюда следует, что либо $S_0 = 0$, либо $T_0 = T_1$. В самом деле, допустим, что $S_0 \neq 0$. Тогда $\alpha_j^o = 0$ для всех $j > m$, т.к. иначе Γ_4' — производящий оператор лежащей в $\overline{G'}$ однопараметрической группы сдвигов. Но если $\alpha_j^o = 0$ для всех $j > m$, то $\Gamma_2' = \{x_1' = -2\sum\limits_{l>m} A_l^o x_l,\ x_i' = 0 : i \geqslant 2\}$, а это значит, что и $A_j^o = 0$ для всех $j > m$, т.к. иначе Γ_2' — производящий оператор лежащей в $\overline{G'}$ однопараметрической группы сдвигов.

Таким образом, для любого N, удовлетворяющего условиям леммы, либо найдется $i \leqslant m$, для которого

$$d_0 = a_i + \sum_{j>m} \alpha_j^o a_j, \quad \xi_0 = x_i + \sum_{j>m} A_j^o x_j \tag{17}$$

и при этом $S_0 = 0$, либо $T_0 \in \{T_1, \ldots, T_m\}$.

Но если выполняются равенства (17), то, как и при доказательстве леммы 16, в котором используется равенство (16), делая замену координат, использующую равенство $S_0 = 0$, получаем, что G' линейно эквивалентна группе $G_{\mathcal{T}}[m+1]$. Если же $T_0 \in \{T_1, \ldots, T_m\}$, то $N = \mathcal{T}[m]$, а $G' = G_{\widetilde{\mathcal{T}}[m+1]}$. □

Заключение

Основные результаты работы:

Пусть G — бесконечная центроаффинная группа, порожденная всеми отражениями, сохраняющими некоторую нецилиндрическую алгебраическую гиперповерхность, лежащую в конечномерном вещественном аффинном пространстве.

1) *Найдены все возможные бесконечные G-орбиты отражений, принадлежащих группе G, а также вычислены базисные инварианты групп, порожденных этими орбитами.*
2) *Показано, что множество всех отражений, принадлежащих группе G, имеет каноническое разбиение, состоящее из поэлементно коммутирующих между собой стандартных множеств отражений.*

На основе этих результатов предполагается получить базисные инварианты группы G, для которой каноническое разбиение множества принадлежащий ей отражений содержит не более четырех квадратичных множеств отражений с ненулевыми особыми плоскостями.

Пока такие инварианты получены только в некоторых частных случаях.

Список литературы

1. *Игнатенко В.Ф.* Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 1976. — Вып. 7. — С. 34-39.
2. *Игнатенко В.Ф.* О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Проблемы геометрии. М., 1989. — т.21. — С. 155-208.
3. *Игнатенко В.Ф.* Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. II // Укр. геометр. сб. 1991. — Вып. 34. — С. 42-51.
4. *Игнатенко В.Ф.* Об одной бесконечной группе косых симметрий // Изв. вузов. Математика. 1994. — №3. — С. 32-34.
5. *Игнатенко В.Ф.* Диаметральная теория алгебраических поверхностей и геометрическая теория инвариантов групп, порожденных отражениями. III // Укр. математ. журн. — 1998. — Т.50, № 10. — С. 1324-1340.
6. *Криворучко А.И.* О кольцах инвариантов групп, порожденных тремя орбитами отражений // Симферополь, 1995. — 14 с. — Деп. в ГНТБ Украины, № 2075 — Ук95.
7. *Игнатенко В.Ф., Криворучко А.И.* О кольцах инвариантов специальных групп косых симметрий // Тр. математ. факультета. — Симферополь: Изд-во Симфероп. ун-та, 1977. — С. 57-61.
8. *Криворучко А.И.* О кольцах инвариантов специальных групп, порожденных отражениями // Динамические системы. — 1999. — Вып. 15. С. 170-177.
9. *Криворучко А.И.* О полиномиальных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями // Динамические системы. — 2000. — Вып. 16. С. 124-129.
10. *Криворучко А.И.* О двойном отношении четверки линейных оболочек орбит направлений симметрии бесконечной группы, порожденной отражениями // Ученые записки ТНУ. Сер. «математика». — 2001. — Т. 14, № 1. — С. 60-64.
11. *Гельфанд И.М., Пономарев В.А.* Четверки подпространств конечномерного векторного пространства // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 197, №4. — С. 762-765.
12. *Криворучко А.И.* Об инвариантах бесконечных групп, порожденных отражениями относительно прямых // Укр. геометр. сб. — 1990. — Вып. 33. С. 65-69.