УДК 532.5:517.98

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. Б. Иванов, Н. Д. Копачевский

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Украина, 95007
E-MAIL: *ivanov@tnu.crimea.ua, kopachevsky@tnu.crimea.ua*

Abstract

The initial boundary value problem on small movements of a thin layer of anideal fluid in a partially filled container (a basin, a sea) is investigated. The theorem on strong solvability of this problem is proved.

Постановка проблемы в общем виде

Применение методов функционального анализа для решения классических задач механики сплошных сред позволяет исследовать вопросы существования и единственности обобщенных решений таких задач в функциональных пространствах негладких функций.

Следует отметить, что в гидродинамике естественным образом появляются области с негладкими границами, в которых классические гладкие решения могут не существовать, в то время как соответствующая задача, сформулированная в надлежаще выбранных функциональных пространствах, остается корректной. Корректные постановки задач представляют теоретическую и практическую ценность, так как позволяют, например, применять численные алгоритмы для их приближенного решения.

Анализ предшествующих исследований. Начально-краевая задача для линеаризованных уравнений Эйлера о движении идеальной жидкости в частично заполненном сосуде методами функционального анализа исследовалась в работах [1]–[2].

Для тонкого вращающегося слоя жидкости, движения которого описываются известными дифференциальными уравнениями теории мелкой воды [3], непосредственное применение результатов работ [1]–[2] представляется затруднительным из-за вырождения основного дифференциального оператора задачи.

Целью работы является исследование методами функционального анализа начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений теории мелкой воды, исследование вопроса об однозначной разрешимости этой задачи в естественных функциональных пространствах.

1. Физическая постановка задачи

Будем считать, что тонкий слой идеальной жидкости заполняет некоторый ограниченный водоем (бассейн, море) и в не возмущенном состоянии равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $f/2$, где f — параметр Кориолиса.

Если вращение системы достаточно мало, то в состоянии относительного равновесия свободную поверхность жидкости Γ можно считать горизонтальной. Область Ω, занятая жидкостью, представляет собой тонкий слой с переменной глубиной, характерный размер которой много меньше, чем диаметр поверхности Γ.

Для исследования малых движений жидкости, близких к равномерному вращению, используют линеаризованные уравнения Эйлера, описывающие движение в равномерно вращающейся системе координат.

Для тонкого слоя жидкости используют теорию мелкой воды, или теорию узких полос, или метод пограничного слоя. При этом вертикальную координату «растягивают» таким образом, чтобы новая координата была сравнима по порядку величины с горизонтальными координатами. В итоге возникает взамен трехмерной двумерная задача о нахождении горизонтальных компонент поля скорости и функции отклонения свободной поверхности, причем эти функции заданы на горизонтальной равновесной поверхности Γ (см., например, [3], стр. 192, 198).

2. Математическая постановка задачи

Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t, x_1, x_2)$ искомое поле скоростей в приближении мелкой воды, $\eta = \eta(t, x_1, x_2)$ — поле вертикальных отклонений свободной поверхности жидкости от исходного горизонтального состояния, через $\rho > 0$ и $g > 0$ — плотность жидкости и ускорение силы тяжести, $x = (x_1, x_2) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Через $h = h(x_1, x_2)$ обозначим глубину жидкости в невозмущенном состоянии (после упомянутого выше растяжения вертикальной координаты), а через $\vec{e}_3$ — орт вертикальной оси.

Тогда полная формулировка исследуемой начально-краевой задачи принимает вид (см. [3], с.192):

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \rho f(\vec{u}\times\vec{e}_3) + \rho g\nabla\eta = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \operatorname{div}(h\vec{u}) = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2}$$

$$u_n := \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \qquad \int\limits_{\Gamma}\eta\, d\Gamma = 0, \tag{3}$$

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \eta(0,x) = \eta^0(x), \quad x\in\Gamma. \tag{4}$$

Здесь $\nabla = \sum_{k=1}^{2} \vec{e}_k \partial/\partial x_k$ — двумерный градиент, а $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Gamma$. В (4) предполагается также, что $h = h(x_1, x_2)$ — непрерывно дифференцируема на Γ и выполнено условие

$$h(x_1, x_2) \geqslant h_0 > 0.$$

Тогда условие $u_n = 0$ (на $\partial\Gamma$) порождено условием непротекания через боковые стенки бассейна. Далее, условие $\int_\Gamma \eta \, d\Gamma$ есть следствие сохранения объема жидкости при малых колебаниях.

3. Закон сохранения полной энергии

Будем считать, что задача (4) имеет классическое решение, то есть такие функции $\vec{u}(t,x)$, $\eta(t,x)$, которые имеют непрерывные производные, входящие в уравнения (4), причем для этих функций выполнены все соотношения (4). Тогда для указанного решения выполнен закон сохранения полной энергии гидросистемы; этот закон имеет вид

$$\frac{1}{2}\rho \int\limits_\Gamma h|\vec{u}|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} g\rho \int\limits_\Gamma |\eta|^2 d\Gamma = \mathrm{const} = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int\limits_\Gamma h|\vec{u}^0|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} g\rho \int\limits_\Gamma |\eta^0|^2 d\Gamma. \tag{6}$$

Для доказательства тождества (6) умножим первое уравнение (4) скалярно на $h\vec{u}$, второе на $\rho g \eta$ и проинтегрируем полученные соотношении по Γ. После сложения левых и правых частей будем иметь

$$\rho \int\limits_\Gamma h \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \vec{u} \; d\Gamma - \rho f \int\limits_\Gamma h(\vec{u} \times \vec{e}_3) \cdot \vec{u} \; d\Gamma + \rho g \int\limits_\Gamma \nabla\eta \cdot (h\vec{u}) \; d\Gamma + \tag{7}$$

$$+\rho g \int\limits_\Gamma \frac{\partial \eta}{\partial t} \eta \; d\Gamma + \rho g \int\limits_\Gamma \mathrm{div}(h\vec{u})\eta \; d\Gamma = 0. \tag{8}$$

Здесь второе слагаемое обращается в нуль, третье и пятое дают выражение

$$\rho g \int\limits_\Gamma \mathrm{div}(h\vec{u}\eta) \; d\Gamma = \rho g \int\limits_{\partial\Gamma} h u_n \eta \; ds,$$

и в силу краевого условия на $\partial\Gamma$ оно равно нулю. Окончательно (8) приобретает вид

$$\frac{1}{2}\rho \frac{d}{dt} \int\limits_\Gamma h|\vec{u}|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} g\rho \frac{d}{dt} \int\limits_\Gamma |\eta|^2 d\Gamma = 0, \tag{9}$$

откуда и следует закон сохранения (6). Отметим, что в этом соотношении первое слагаемое слева равно кинетической энергии системы (в приближении мелкой воды, так как элемент объема $d\Omega = h(x)\ d\Gamma$), а второе слагаемое — потенциальной энергии. Таким образом, (6) показывает, что полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия гидросистемы сохраняется в процессе её движения.

4. Вспомогательные сведения

Начально-краевая задача (4) будет далее исследоваться методами функционального анализа, в частности, методами теории дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.

Предварительно придадим уравнениям (4) более симметричный вид, введя новые искомые функции согласно соотношениям

$$\rho^{1/2}h^{1/2}\vec{u} =: \vec{v}, \quad g^{1/2}\rho^{1/2}\eta =: \zeta. \tag{10}$$

Тогда взамен (4) получим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - f(\vec{v}\times\vec{e}_3) + g^{1/2}h^{1/2}\nabla\zeta = \vec{0} \quad (\text{на } \Gamma), \tag{11}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + g^{1/2}\,\mathrm{div}(h^{1/2}\vec{v}) = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{12}$$

$$v_n := \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \qquad \int\limits_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \tag{13}$$

$$\vec{v}(0,x) = \vec{v}^0(x) := \rho^{1/2}h^{1/2}(x)\vec{u}^0(x), \quad \zeta(0,x) = \zeta^0(x) := g^{1/2}\rho^{1/2}\eta^0(x), \tag{14}$$

которая, как будет видно из дальнейшего, более удобна для исследования. В векторно-матричной форме она принимает вид

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \zeta\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}(\vec{v}\times\vec{e}_3)\\ 0\end{pmatrix} + g^{1/2}\begin{pmatrix}0 & h^{1/2}\nabla\\ \mathrm{div}(h^{1/2}\ldots) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{0}\\ 0\end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$(\vec{v}(0,x);\zeta(0,x))^t = \left(\rho^{1/2}h^{1/2}(x)\vec{u}^0(x); g^{1/2}\rho^{1/2}\eta^0(x)\right)^t, \tag{16}$$

где символом $(\vec{a},b)^t$ обозначен переход от вектор-строки $(\vec{a},b)$ к вектор-столбцу, то есть транспонирование.

Такой вид начально-краевой задачи наводит на мысль использовать для её исследования теорию линейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и теорию линейных неограниченных операторов. Отметим, что для случая жидкости, вращающейся в произвольном сосуде, такая программа была реализована в главе 5 монографии [1].

Введем необходимые для дальнейшего функциональные (гильбертовы) пространства. Обозначим через $L_2(\Gamma)$ гильбертово пространство комплекснозначных скалярных функций $\{\zeta(x)\}$ с нормой

$$\|\zeta\|_0^2 := \int\limits_\Gamma |\zeta|^2 d\Gamma \tag{17}$$

и соответствующим скалярным произведением. Считая, что при фиксированном t функция отклонения свободной поверхности $\zeta(t,x) \in L_2(\Gamma)$, и учитывая условие сохранения объёма при колебаниях

$$\int_\Gamma \zeta d\Gamma = (\zeta, 1)_0 = 0, \tag{18}$$

приходим к выводу, что

$$\zeta(t,x) \in H := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}, \tag{19}$$

где 1_Γ — единичная функция, заданная на Γ.

Относительно функции $\vec{v}(t,x)$ будем считать, что при фиксированном t она принадлежит гильбертову пространству $\vec{L}_2(\Gamma)$ комплекснозначных вектор-функций с нормой

$$\|\vec{v}\|^2 := \int_\Gamma |\vec{v}|^2 d\Gamma. \tag{20}$$

Как известно (см., например, [1], стр. 103), пространство $\vec{L}_2(\Gamma)$ допускает ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma), \tag{21}$$

$$\vec{J}_0(\Gamma) := \big\{\vec{\omega} \in \vec{L}_2(\Gamma) : \operatorname{div}\vec{\omega} = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad \omega_n = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma)\big\}, \tag{22}$$

$$\vec{G}(\Gamma) := \Big\{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Gamma) : \vec{u} = \nabla\varphi, \quad \int_\Gamma \varphi d\Gamma = 0\Big\}, \tag{23}$$

где операции $\operatorname{div}\vec{\omega}$ и $\omega_n = \vec{\omega}\cdot\vec{n}$ для элементов из $\vec{L}_2(\Gamma)$ понимаются в смысле обобщенных функций (распределений), см. [1], стр. 101–102. Это разложение ниже будет использовано при переходе от задачи (14) к абстрактному дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве.

5. Метод ортогонального проектирования

Опираясь на ортогональное разложение (21), представим решение $\vec{v}(t,x)$ задачи (14) в виде

$$\vec{v} = \vec{\omega} + \nabla\varphi, \quad \vec{\omega} \in \vec{J}_0(\Gamma), \quad \nabla\varphi \in \vec{G}(\Gamma), \tag{24}$$

и подставим это выражение в первое уравнение (14). Далее, обозначим через P_0 и P_G ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Gamma)$ и $\vec{G}(\Gamma)$ соответственно. В силу (21) имеем $P_0 + P_G = I$, где I — единичный оператор в $\vec{L}_2(\Gamma)$. Применяя к обеим частям первого уравнения (14) проекторы P_0 и P_G соответственно, будем взамен (14) иметь следующую начально-краевую задачу

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} - fP_0(\vec{\omega}\times\vec{e}_3) - fP_0(\nabla\varphi\times\vec{e}_3) + g^{1/2}P_0\left(h^{1/2}\nabla\zeta\right) = \vec{0}, \tag{25}$$

$$\frac{d\nabla\varphi}{dt} - fP_G(\vec{\omega}\times\vec{e}_3) - fP_G(\nabla\varphi\times\vec{e}_3) + g^{1/2}P_G\left(h^{1/2}\nabla\zeta\right) = \vec{0}, \tag{26}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} + g^{1/2}\nabla h^{1/2}\cdot\vec{\omega} + g^{1/2}\,\mathrm{div}\left(h^{1/2}\nabla\varphi\right) = 0, \tag{27}$$

$$\vec{\omega}(0,x) = P_0\vec{v}(0), \quad \nabla\varphi(0) = P_G\vec{v}(0), \quad \zeta(0) = \zeta^0. \tag{28}$$

Здесь $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$, $\nabla\varphi = \nabla\varphi(t)$, $\zeta(t)$ — искомые функции со значениями в гильбертовых пространствах $\vec{J}_0(\Gamma)$, $\vec{G}(\Gamma)$ и H соответственно; в связи с этим частные производные по t заменены на обыкновенные. Кроме того, в последнем уравнении (28) учтено, что $\mathrm{div}\,\vec{\omega} = 0$ и потому

$$\mathrm{div}\left(h^{1/2}\vec{\omega}\right) = h^{1/2}\,\mathrm{div}\,\vec{\omega} + \nabla h^{1/2}\cdot\vec{\omega} = \nabla h^{1/2}\cdot\vec{\omega}.$$

6. Переход к дифференциальному уравнению в ортогональной сумме гильбертовых пространств

Перепишем задачу (28) в векторно-матричной форме

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vec{\omega}\\ \nabla\varphi\\ \zeta\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} P_0((\ldots)\times\vec{e}_3) & P_0((\ldots)\times\vec{e}_3) & 0\\ P_G((\ldots)\times\vec{e}_3) & P_G((\ldots)\times\vec{e}_3) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\omega}\\ \nabla\varphi\\ \zeta\end{pmatrix} + g^{1/2}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} 0 & 0 & P_0\left(h^{1/2}\nabla(\ldots)\right)\\ 0 & 0 & P_G\left(h^{1/2}\nabla(\ldots)\right)\\ \nabla h^{1/2}\cdot(\ldots) & \mathrm{div}\left(h^{1/2}(\ldots)\right) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\omega}\\ \nabla\varphi\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\\ 0\end{pmatrix} \tag{29}$$

$$(\vec{\omega}(0);\nabla\varphi(0);\zeta(0))^t = (P_0\vec{v}(0);P_G\vec{v}(0);\zeta^0)^t, \tag{30}$$

и введем следующие обозначения

$$A_{11}\vec{\omega} := P_0(\vec{\omega}\times\vec{e}_3), \quad A_{21}\vec{\omega} := P_G(\vec{\omega}\times\vec{e}_3), \quad \forall\vec{\omega}\in\vec{J}_0(\Gamma); \tag{31}$$

$$A_{12}\nabla\varphi := P_0(\nabla\varphi\times\vec{e}_3), \quad A_{22}\nabla\varphi := P_G(\nabla\varphi\times\vec{e}_3), \quad \forall\nabla\varphi\in\vec{G}(\Gamma); \tag{32}$$

$$A_{31}\vec{\omega} := \nabla h^{1/2}\cdot\vec{\omega}, \quad \forall\vec{\omega}\in\vec{J}_0(\Gamma); \quad A_{32}\nabla\varphi := \mathrm{div}\left(h^{1/2}\nabla\varphi\right); \tag{33}$$

$$A_{13}\zeta := P_0\left(h^{1/2}\nabla\zeta\right); \quad A_{23}\zeta := P_G\left(h^{1/2}\nabla\zeta\right); \quad A_{33}\zeta := 0. \tag{34}$$

Отметим, что здесь операторы $A_{ij}(i,j=1,2)$, A_{31} и A_{33} определены на произвольных элементах соответствующих пространств, а операторы A_{32}, A_{13}, A_{23} — на тех элементах, для которых соответствующие выражения имеют смысл; например, A_{13} определён на тех элементах $\zeta\in H$, для которых $h^{1/2}\nabla\zeta\in\vec{L}_2(\Gamma)$. Позже области определения этих операторов будут уточнены.

С учетом обозначений (34) задача (29) переписывается в виде

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vec{\omega}\\ \nabla\varphi\\ \zeta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -fA_{11} & -fA_{12} & g^{1/2}A_{13}\\ -fA_{21} & -fA_{22} & g^{1/2}A_{23}\\ g^{1/2}A_{31} & g^{1/2}A_{32} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\omega}\\ \nabla\varphi\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\\ 0\end{pmatrix}, \tag{35}$$

который после введения операторных матриц

$$A := (A_{ij})_{i,j=1,2}^2 \quad \widehat{A}_{21} := (A_{31},A_{32}); \quad \widehat{A}_{12} := (A_{13};A_{23})^t; \tag{36}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -fA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + g^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & \widehat{A}_{12} \\ \widehat{A}_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

и искомого вектор-столбца

$$y(t) := (\vec{\omega}(t), \nabla\varphi(t), \zeta(t))^t, \tag{38}$$

разыскиваемого как функция переменной t со значениями в ортогональной сумме гильбертовых пространств

$$\mathcal{H} := \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma) \oplus H = \vec{L}_2(\Gamma) \oplus H, \tag{39}$$

приводит к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = 0, \quad y(0) = y^0 := (\vec{w}(0), \nabla\varphi(0), \zeta(0))^t. \tag{40}$$

7. Общие свойства операторных коэффициентов дифференциального уравнения

Опираясь на определения (34) и формулы (37), изучим свойства матричных элементов матрицы $\mathcal{A}$, а на основе этих свойств - и общие свойства матрицы $\mathcal{A}$.

Лемма 1. *Операторы $A_{ij}(i, j = 1, 2)$ являются ограниченными операторами, норма которых не превышает единицы. Построенный по ним оператор $A = (A_{ik})_{i,k=1,2}^2$ является ограниченным оператором, действующим в $\vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma) = \vec{L}_2(\Gamma)$ и обладающим свойствами*

$$\|A\| \leqslant 1, \quad A^* = -A. \tag{41}$$

Доказательство. Свойство ограниченности оператора A следует из ограниченности операторов A_{ik}, о чем упоминалось выше. Проверим сначала свойство кососимметричности (41). Имеем для произвольных $\vec{u_i} = (\vec{w_i}, \nabla\varphi_i)^t \in \vec{L_2}(\Gamma) = \vec{J_0}(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma), i = 1, 2:$

$$(A\vec{u_1}, \vec{u_2}) = (A_{11}\vec{w_1} + A_{12}\nabla\varphi_1, \vec{w_2}) + (A_{21}\vec{w_1} + A_{22}\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2) = \tag{42}$$

$$= (P_0((\vec{w_1} + \nabla\varphi_1) \times \vec{e_3}), \vec{w_2}) + (P_G((\vec{w_1} + \nabla\varphi_1) \times \vec{e_3}), \nabla\varphi_2) = \tag{43}$$

$$= ((\vec{w_1} + \nabla\varphi_1) \times \vec{e_3}, \vec{w_2}) + ((\vec{w_1} + \nabla\varphi_1) \times \vec{e_3}, \nabla\varphi_2) = \tag{44}$$

$$= ((\vec{w_1} + \nabla\varphi_1) \times \vec{e_3}, \vec{w_2} + \nabla\varphi_2) = (\vec{u_1} \times \vec{e_3}, \vec{u_2}) = \tag{45}$$

$$= \int_\Gamma (\vec{u_1} \times \vec{e_3}) \cdot \overline{\vec{u_2}}\, d\Gamma = -\int_\Gamma \vec{u_1}\overline{(\vec{u_2} \times \vec{e_3})}\, d\Gamma = -(\vec{u_1}, A\vec{u_2}), \tag{46}$$

откуда следует, что $A = -A^*$.

Полагая в (1.25) $\vec{u_1} = \vec{u_2} = \vec{u}$, получим

$$|(A\vec{u}, \vec{u})| = \left| \int_\Gamma \vec{u} \cdot \overline{(\vec{u} \times \vec{e_3})}\, d\Gamma \right| \leqslant \int_\Gamma |\vec{u}|^2 d\Gamma, \quad \forall \vec{u} \in \vec{L_2}(\Gamma). \tag{47}$$

Это соотношение, с учетом того, что спектр оператора A расположен на мнимой оси, приводит к неравенству (41) для $\|A\|$. Из (41) также следуют свойства

$$\|A_{ik}\| \leqslant 1 \quad (i,k=1,2), \quad A_{ii}^* = -A_{ii}(i,k=1,2), \quad A_{12}^* = -A_{21}. \quad \square \tag{48}$$

Уточняя область определения оператора A_{13}, действующего из $\mathcal{D}(A_{13}) \subset H$ в $\vec{J}_0(\Gamma)$, будем сначала считать, что этот оператор определен на множестве

$$\mathcal{D}(A_{13}) := \{\zeta \in H : \zeta(x) \in C^1(\overline{\Gamma})\}, \tag{49}$$

плотном в H.

Лемма 2. *Оператор $A_{31} : \vec{J}_0(\Gamma) \to H$ ограничен. Оператор A_{13}, заданный на области определения* (49)*, обладает свойством*

$$A_{13} \subset -A_{31}^*, \tag{50}$$

а после замыкания по непрерывности – свойствами

$$\overline{A_{13}} = -A_{31}^*, \quad \mathcal{D}(\vec{A_{13}}) = H. \tag{51}$$

Доказательство. Проверим сначала свойство ограниченности оператора A_{31} и получим оценку для его нормы. При любом $\vec{w} \in \vec{J}_0(\Gamma)$ имеем

$$\|A_{31}\vec{w}\|^2 = \int\limits_{\Gamma} |\nabla h^{1/2} \cdot \vec{w}|^2 d\Gamma \leqslant \int\limits_{\Gamma} |\nabla h^{1/2}|^2 |\vec{w}|^2 d\Gamma \leqslant \tag{52}$$

$$\leqslant \left(\max_{x\in\overline{\Gamma}} |\nabla h^{1/2}|^2 \right) \int\limits_{\Gamma} |\vec{w}|^2 d\Gamma =: c_{31}^2 \|\vec{w}\|^2. \tag{53}$$

При выводе этого неравенства было использовано свойство $h(x) \in C^1(\overline{\Gamma})$, о котором упоминалось в постановке задачи. Из (53) следует, что

$$\|A_{31}\| \leqslant c_{31} = \left(\max_{x\in\overline{\Gamma}} |\nabla h^{1/2}| \right). \tag{54}$$

Будем теперь считать, что $\zeta \in \mathcal{D}(A_{13}) \subset H, \vec{w} \in \vec{J}_0(\Gamma) \cap C^1(\overline{\Gamma})$. Тогда

$$(A_{13}\zeta, \vec{w}) = (P_0(h^{1/2}\nabla\zeta), \vec{w}) = (h^{1/2}\nabla\zeta, \vec{w}) = \tag{55}$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \nabla\zeta \cdot \overline{(h^{1/2}\vec{w})} d\Gamma = \int\limits_{\Gamma} \operatorname{div} \left[\zeta\overline{(h^{1/2}\vec{w})} \right] d\Gamma - \int\limits_{\Gamma} \zeta \overline{[\operatorname{div}(h^{1/2}\vec{w})]} d\Gamma = \tag{56}$$

$$= \int\limits_{\partial\Gamma} \zeta h^{1/2} \overline{w_n} ds - \int\limits_{\Gamma} \zeta \left[\nabla h^{1/2} \cdot \overline{\vec{w}} + h^{1/2} \overline{\operatorname{div} \vec{w}} \right] d\Gamma = \tag{57}$$

$$= -\int\limits_{\Gamma} \zeta \overline{(\nabla h^{1/2} \cdot \vec{w})} d\Gamma = -(\zeta, A_{31}\vec{w})_0. \tag{58}$$

Так как множество $\vec{J}_0(\Gamma) \cap C^1(\overline{\Gamma})$ плотно в $\vec{J}_0(\Gamma)$, то после замыкания по элементам $\vec{w}$ из (58) получаем свойство

$$(A_{13}\zeta, \vec{w}) = -(\zeta, A_{31}\vec{w}), \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(A_{13}) \subset H, \quad \forall \vec{w} \in \vec{J}_0(\Gamma). \tag{59}$$

Отсюда следует, что справедливо включение (50), то есть оператор A_{13}, заданный на области определения $\mathcal{D}(A_{13})$, имеет расширение, совпадающее с ограниченным оператором $(-A_{31}^*)$, заданным на всем пространстве H. Так как $\mathcal{D}(A_{13})$ плотна в H, то после замыкания с $\mathcal{D}(A_{13})$ на все H оператор $\overline{A_{13}} = -A_{31}^*$.$\square$

Далее будем считать, что A_{13} уже расширен на все H, и обозначать будем его так же. Тогда в силу (1.30), (1.32) будем иметь

$$\|A_{13}\| = \|A_{31}^*\| = \|A_{31}\| \leqslant c_{31}. \tag{60}$$

Перейдем теперь к рассмотрению свойств операторов A_{23} и A_{32}.

Лемма 3. *Оператор A_{23}, действующий по закону $A_{23}\zeta := P_G(h^{1/2}\nabla\zeta)$ и заданный на области определения*

$$\mathcal{D}(A_{23}) := H_\Gamma^1 := \left\{ \zeta \in H : \|\zeta\|_{1,0}^2 := \int_\Gamma |\nabla\zeta|^2 d\Gamma < \infty \right\}, \tag{61}$$

является замкнутым оператором. Оператор A_{32}, действующий по закону $A_{32}\nabla\varphi := \operatorname{div}(h^{1/2}\nabla\varphi)$ и заданный на области определения

$$\mathcal{D}(A_{32}) := \left\{ \nabla\varphi \in \vec{G}(\Gamma) : \nabla\varphi \in \vec{C}^1(\Gamma), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\partial\Gamma} = 0 \right\}, \tag{62}$$

обладает свойством

$$A_{32} \subset -A_{23}^*. \tag{63}$$

После расширения на множество

$$\mathcal{D}(\widetilde{A}_{32}) := \vec{G}(\Gamma) \bigcap \left\{ \nabla\varphi \in \vec{H}^1(\Gamma) : \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\partial\Gamma} = 0 \right\}, \tag{64}$$

соответствующий оператор $\widetilde{A}_{32}$ обладает свойствами

$$\widetilde{A}_{32} = \overline{A}_{32} = -A_{23}^*. \tag{65}$$

Доказательство. Очевидно, что $P_G(h^{1/2}\nabla\zeta) \in \vec{G}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда функция $h^{1/2}\nabla\zeta$ суммируется с квадратом на области Γ:

$$\int_\Gamma h|\nabla\zeta|^2 d\Gamma < \infty. \tag{66}$$

Так как $h(x)$ обладает свойствами

$$h(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad 0 < h_0 \leqslant h(x) \leqslant h_1 < \infty, \tag{67}$$

то условие (66) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\int_\Gamma |\nabla\zeta|^2 d\Gamma < \infty. \tag{68}$$

Вместе с условием $\int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0$ условие (68)показывает, что должно быть $\zeta \in H^1_\Gamma$ (см. (61)).

(Проведенное рассуждение означает, что (гильбертовы) функциональные пространства с нормами

$$\left(\int_\Gamma |\nabla\zeta|^2 d\Gamma + \left(\int_\Gamma \zeta d\Gamma\right)^2\right)^{1/2}, \quad \left(\int_\Gamma h|\nabla\zeta|^2 d\Gamma + \left(\int_\Gamma \zeta d\Gamma\right)^2\right)^{1/2}, \tag{69}$$

совпадает со стандартным пространством С.Л.Соболева $\widetilde{H}^1(\Gamma)$, имеющим норму

$$\|\zeta\|^2_{\widetilde{H}^1(\Gamma)} := \left(\int_\Gamma |\nabla\zeta|^2 + |\zeta|^2 d\Gamma\right)^{1/2}, \tag{70}$$

так как все указанные нормы эквивалентны. При этом H^1_Γ – подпространство коразмерности единица пространства $H^1(\Gamma)$ с нормой, определяемой первым выражением (69).)

Пусть теперь $\zeta \in \mathcal{D}(A_{23})$ (см. (61)), а $\nabla\varphi \in \mathcal{D}(A_{32})$ (см. (62)). Тогда

$$(A_{23}\zeta, \nabla\varphi) = (P_G(h^{1/2}\nabla\varphi), \nabla\varphi) = (h^{1/2}\nabla\zeta, \nabla\varphi) = \tag{71}$$

$$= \int_\Gamma \nabla\zeta \cdot \overline{(h^{1/2}\nabla\varphi)}\, d\Gamma = \int_\Gamma \operatorname{div}\left[\zeta\overline{(h^{1/2}\nabla\varphi)}\right] d\Gamma - \int_\Gamma \zeta\overline{[\operatorname{div}(h^{1/2}\nabla\varphi)]}\, d\Gamma = \tag{72}$$

$$= \int_{\partial\Gamma} \zeta h^{1/2}\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}\, ds - \int_\Gamma \zeta\overline{\operatorname{div}(h^{1/2}\nabla\varphi)}\, d\Gamma = -(\zeta, A_{32}\nabla\varphi)_0. \tag{73}$$

Отсюда следует, что имеет свойство (63). После замыкания, то есть после перехода от элементов $\nabla\varphi \in \mathcal{D}(A_{32})$ к элементам из $\mathcal{D}(\widetilde{A}_{32})$ (см. (64)), тождество (73) оказывается справедливым и для $\nabla\varphi \in \mathcal{D}(\widetilde{A}_{32})$. Поэтому справедливы соотношения (65). $\square$

Далее оператор A_{32} будем считать расширенным на множестве (64) и обозначать его (оператор) тем же символом.

Как сейчас будет установлено, операторы A_{23} и A_{32} могут быть выражены через операторы классических краевых задач для уравнения, близкого задаче Неймана доля уравнения Пуассона, а также через оператор ∇.

Лемма 4. *Оператор A_{32} допускает факторизацию*
$$A_{32} = -B\nabla^{-1}, \tag{74}$$
где $B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ – оператор краевой задачи
$$B\varphi := -\Delta_h\varphi := -\operatorname{div}(h^{1/2}\nabla\varphi) = \psi \in H, \tag{75}$$
$$\mathcal{D}(B) := \left\{\varphi \in H^2(\Gamma) : \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma)\right\}, \tag{76}$$
оператор ∇^{-1} – оператор, обратный оператору ∇, рассматриваемому как оператор, действующий из H^1_Γ в $\vec{G}(\Gamma)$.

Доказательство. Заметим сначала, что оператор $\nabla : H^1_\Gamma \to \vec{G}(\Gamma)$ является изометрическим оператором, имеющим нулевое ядро и область значений, совпадающей со всем пространством $\vec{G}(\Gamma)$. В самом деле,
$$\|\zeta\|^2_{H^1_\Gamma} := \int\limits_\Gamma |\nabla\zeta|^2 d\Gamma = \|\nabla\zeta\|^2_{\vec{G}(\Gamma)}, \quad \int\limits_\Gamma \zeta d\Gamma = 0. \tag{77}$$
При этом $\nabla\zeta = 0$ тогда и только тогда, когда $\zeta = 0$. Отсюда следует, что обратный оператор ∇^{-1} также существует и является изометрическим оператором из $\vec{G}(\Gamma)$ в H^1_Γ.

Перепишем задачу
$$A_{32}\nabla\varphi := \operatorname{div}(h^{1/2}\nabla\varphi) = -\psi \tag{78}$$
с произвольным $\psi \in H$ и $\nabla\varphi \in \mathcal{D}(A_{32})$ в виде задачи (75), (76). Здесь следует только отметить, что если $\nabla\varphi \in \vec{H}^1(\Gamma)$(см. (64)), то $\partial\varphi/\partial x_i \in H^1(\Gamma), i = 1, 2$, а тогда вторые частные производные принадлежат пространству $L_2(\Gamma)$, то есть $\varphi \in H^2(\Gamma)$. Из (75), (76) следует, что справедлива формула (74). В самом деле, из (78) и (75) получаем, что $A_{32}\nabla = -B$, и потому $A_{32} = -B\nabla^{-1}$. $\square$

Следствием доказанного утверждения является такой вывод.

Лемма 5. *Оператор A_{32} имеет ограниченный и притом компактный обратный оператор, действующий из H в $\vec{G}(\Gamma)$.*

Доказательство. Так как
$$0 < h_0^{1/2} \leqslant h^{1/2}(x) \leqslant h_1^{1/2} < \infty, \quad x \in \overline{\Gamma},$$
то краевая задача (75), (76) обладает теми же общими свойствами, что и классическая краевая задача Неймана для уравнения Пуассона, получаемая из (75) при $h(x) \equiv 1$. В частности, при любом $\psi \in H$ задача (75), (76) однозначно разрешима в пространстве H; при этом B – неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, действующий из $\mathcal{D}(B) \subset H$ в H. Он имеет дискретный положительный спектр с предельной точкой $+\infty$, а система его собственных элементов образует ортогональный базис в H. Обратый оператор B^{-1} является компактным

положительным оператором в H; кроме того, обратный оператор, рассматриваемый как оператор из H в $\mathcal{D}(B) \subset H^2(\Gamma) \cap H := H^2_\Gamma \subset H^2(\Gamma)$, является ограниченным оператором.

Опираясь на эти свойства и представление (74), приходим к выводу, что оператор A_{32} имеет обратный, так как обратимы ∇^{-1} и B. Далее, так как

$$A_{32}^{-1} = -\nabla \cdot B^{-1}, \tag{79}$$

то оператор A_{32}^{-1} ограниченно действует из H в $\mathcal{D}(A_{32}) \subset \vec{G}(\Gamma) \cap \vec{H}^1(\Gamma)$ (см. (64)). Значит, множество элементов, ограниченное в H, он переводит в множество, ограниченное в $\vec{G}(\Gamma) \cap \vec{H}^1(\Gamma)$; согласно теореме вложения С.Л.Соболева, последнее множество компактно в $\vec{G}(\Gamma)$, откуда следует, что A_{32}^{-1} – компактный оператор.□

Следствие 6. *Оператор A_{23} имеет ограниченный и притом компактный оператор, действующий из $\vec{G}(\Gamma)$ в H.*

Доказательсто этого факта следует из того, что $A_{23} = -A_{32}^*$ и из леммы 5:

$$A_{23}^{-1} = -(A_{32}^*)^{-1} = -(A_{32}^{-1})^* \in \mathfrak{S}_\infty \quad \square \tag{80}$$

Опираясь на доказанные свойства операторов A_{23} и A_{32}, введем в рассмотрение операторную матрицу

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & A_{23} \\ A_{32} & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0, \quad \mathcal{H}_0 := \vec{G}(\Gamma) \oplus H, \tag{81}$$

$$\mathcal{D}(A_0) := \mathcal{D}(A_{32}) \oplus \mathcal{D}(A_{23}) \subset \mathcal{H}_0. \tag{82}$$

Теорема 7. *Оператор A_0 является неограниченным кососамосопряженным оператором, то есть*

$$A_0^* = -A_0, \quad \mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A_0^*). \tag{83}$$

Он имеет нулевое ядро и дискретный спектр, расположенный на мнимой оси симметрично относительно $\mathbb{R}$.

При этом две его ветви собственных значений $\lambda_k^\pm = \lambda_k^\pm(A_0), k = 1, 2, \ldots,$ имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k^\pm = \pm ic(A_0)k^{1/2}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty), \quad c(A_0) = \left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_\Gamma h^{-1}(x)\, d\Gamma \right)^{-1/2}, \tag{84}$$

а отвечающие этим числам собственные элементы

$$y_k^\pm := (\nabla\varphi_k^\pm; \zeta_k^\pm)^t, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{85}$$

образуют ортогональный базис в $\mathcal{H}_0 := \vec{G}(\Gamma) \oplus H$.

Обратный оператор A_0^{-1} является компактным кососимметрическим оператором, действующим в $\mathcal{H}_0$.

Доказательство. Так как каждый из операторов A_{23} и A_{32} обратим, то оператор A_0 имеет нулевое ядро и поэтому также обратим. При этом обратный оператор

$$A_0^{-1} := \begin{pmatrix} 0 & A_{32}^{-1} \\ A_{23}^{-1} & 0 \end{pmatrix} = (A_0^{-1})^* \in \mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}_0). \tag{86}$$

и имеет нулевое ядро. Поэтому по теореме Гильберта-Шмидта, оператор A_0^{-1} имеет дискретный спектр, расположенный на мнимой оси, причем это (счетное) множество конечнократных собственных значений имеет единственную предельную точку нуль. Из этих свойств следует первое утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения для оператора A_0:

$$A_{23}\zeta = \lambda\nabla\varphi, \quad A_{32}\nabla\varphi = \lambda\zeta, \quad (\nabla\varphi;\zeta)^t \in \mathcal{D}(A_0). \tag{87}$$

Покажем, что задача (87) равносильна двум другим задачам на собственные значения для положительно определенного неограниченного самосопряженного оператора с компактным обратным.

Так как в задаче (87) $\lambda \neq 0$ и $\nabla\varphi \in \mathcal{D}(A_{32})$, то $A_{23}\zeta \in \mathcal{D}(A_{32})$, и из первого уравнения с учетом второго имеем

$$-A_{32}A_{23}\zeta = (-\lambda^2)\zeta, \quad \zeta \in \mathcal{D}(A_{32}A_{23}) \subset H,$$

которое может быть переписано в виде

$$Q_{23}\zeta := (A_{23})^* A_{23}\zeta = \mu\zeta, \quad \mu := -\lambda^2. \tag{88}$$

Поскольку в задаче (87) собственные значения λ расположены на мнимой оси и $\lambda \neq 0$, то в (88) $\mu > 0$. В самом деле, очевидно, что $Q_{23}^{-1} := A_{23}^{-1}(A_{23}^*)^{-1} \in S_\infty$, и $Q_{23}^{-1} > 0$. Отсюда следует, что Q_{23} — положительно определенный самосопряженный неограниченный оператор, имеющий компактный обратный оператор. Значит, точки дискретного спектра $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ оператора Q_{23}, являющиеся конечнократными положительными собственными значениями, суть последовательные минимумы вариационного отношения

$$\frac{\|A_{23}\zeta\|_0^2}{\|\zeta\|_0^2} = \frac{\int_\Gamma |P_G(h^{1/2}\nabla\zeta)|^2 \, d\Gamma}{\int_\Gamma |\zeta|^2 \, d\Gamma}, \quad \zeta \in \mathcal{D}(A_{23}) \subset H. \tag{89}$$

Можно проследить, возвращаясь от (88) к (87), что из (88) следует (87), то есть эти две задачи равносильны.

Второй вариант аналогичных рассуждений связан с исключением ζ из системы уравнений (87). Так как $\zeta \in \mathcal{D}(A_{23})$, то $A_{32}\nabla\varphi \in \mathcal{D}(A_{23})$, поэтому из второго уравнения с учетом первого имеем $(-A_{23})A_{32}\nabla\varphi = \mu\nabla\varphi$, то есть

$$Q_{32}\nabla\varphi := A_{32}^* A_{32}\nabla\varphi = \mu\nabla\varphi. \tag{90}$$

Повторяя вышеприведенные аргументы, как и для задачи (87), приходим к выводу, что Q_{32} — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, имеющий компактный обратный. Задача (87) равносильна задаче (90). Собственные значении $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора Q_{32} совпадают с собственными значениями оператора Q_{23}; Для Q_{32} они суть последовательные минимумы вариационного отношения

$$\frac{\|A_{32}\nabla\varphi\|^2}{\|\nabla\varphi\|^2} = \frac{\int_\Gamma |\operatorname{div}(h^{1/2}\nabla\varphi)|^2\, d\Gamma}{\int_\Gamma |\nabla\varphi|^2\, d\Gamma}, \quad \nabla\varphi \in \mathcal{D}(A_{32}). \tag{91}$$

Как следует из работ [4], [5], спектр вариационного отношения (91) имеет степенную асимптотику; в данном случае справедлива формула

$$\mu_k = ck[1+o(1)] \quad (k\to\infty), \quad c = \left(\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma h^{-1}(x)d\Gamma\right)^{-1}, \tag{92}$$

из которой в силу замены (88) получаем, что оператор A_0 имеет две ветви чисто мнимых симметрично расположенных собственных значений $\left\{\lambda_k^{\pm}(A_0)\right\}_{k=1}^{\infty}$ с асимптотическим поведением (84).

Заметим, наконец, что по теореме Гильберта-Шмидта (применительно к компактным в данном случае кососимметричным операторам) собственные элементы оператора A_0 образуют ортогональный базис в $\mathcal{H}_0$. □

Нижеследующее утверждение подводит итог рассмотрения свойств операторной матрицы $\mathcal{A}$ из (37).

Теорема 8. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ представима в виде*

$$\mathcal{A} = -i\mathcal{B}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{B}), \tag{93}$$

где $\mathcal{B}$ — неограниченный самосопряженный оператор, заданный на множестве

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \mathcal{D}(B_{32}) \oplus \mathcal{D}(B_{23}), \tag{94}$$

$$\mathcal{D}(B_{32}) = \mathcal{D}(A_{32}) = \vec{G}(\Gamma) \bigcap \left\{\nabla\varphi \in \vec{H}^1(\Gamma) : \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma\right\}, \tag{95}$$

$$\mathcal{D}(B_{23}) = \mathcal{D}(A_{23}) = H^1_\Gamma, \tag{96}$$

плотном в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma) \oplus H$.

Доказательство. Свойство косой симметрии для элементов матрицы $\mathcal{A}$ из (37) установлено выше в леммах 1–3 и теореме 7. Поэтому после замены (93) получаем, что оператор $\mathcal{B}$ с элементами

$$B_{kj} = iA_{kj}, \quad k,j = \overline{1,3}, \tag{97}$$

обладает свойством симметрии. При этом он определен на множестве (94) и равен сумме неограниченного самосопряженного оператора

$$\mathcal{B}_0 := g^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iA_{23} \\ 0 & -iA_{23}^* & 0 \end{pmatrix} = ig^{1/2}\,\mathrm{diag}(0; A_0), \tag{98}$$

свойства которого вытекают из теоремы 8, и ограниченного самосопряженного оператора

$$\mathcal{B}_1 := \begin{pmatrix} -fB_{11} & -fB_{12} & g^{1/2}B_{13} \\ -fB_{21} & -fB_{22} & 0 \\ g^{1/2}B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{99}$$

заданного на всем $\mathcal{H}$. Такая сумма неограниченного самосопряженного оператора $\mathcal{B}_0$ и ограниченного самосопряженного оператора $\mathcal{B}_1$, то есть оператор

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1, \tag{100}$$

как известно, является самосопряженным оператором; при этом

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{H}. \qquad \square \tag{101}$$

8. О разрешимости исходной начально-краевой задачи

Перепишем с учетом замены (66) задачу Коши (23) в виде

$$\frac{dy}{dt} = i\mathcal{B}y, \quad y(0) = y^0. \tag{102}$$

Замечание 9. Оператор $i\mathcal{B}$ является генератором $\mathcal{C}_0$-группы (см. [6], стр. 110–112) унитарных операторов

$$U(t) := \exp(it\mathcal{B}), \quad -\infty < t < \infty, \tag{103}$$

действующих в $\mathcal{H}$. $\square$

Определение 10. Сильным решением задачи (102) назовем такую функцию $y(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, для которой при любом $t \in \mathbb{R}$ выполнено свойство $y(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$, функции $\mathcal{B}y(t)$ и dy/dt непрерывны, справедливо уравнение и начальное условие (102). $\square$

Далее будет использован следующий известный факт (см. [6], стр. 110–112).

Теорема 11. *Пусть в абстрактном гильбертовом пространстве H рассматривается задача Коши*

$$\frac{du}{dt} = iAu, \quad u(0) = u^0, \tag{104}$$

где A — самосопряженный оператор. Тогда оператор iA является генератором $\mathcal{C}_0$-группы $U(t) = \exp(itA)$. Если $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, то задача (104) *имеет сильное решение*

$$u(t) = U(t)u^0. \tag{105}$$

Если $u^0 \in H$, то формула (105) определяет обобщенное решение и для него выполнено свойство $\|u(t)\| \equiv \|u^0\|$. $\square$

Итог рассмотрению начально-краевой задачи (4) подводит

Теорема 12. *Пусть в исходной задаче* (4) *начальные функции* $\vec{u}^0(x)$ *и* $\eta^0(x)$, $x \in \Gamma$, *удовлетворяют условиям*

$$\vec{v}^0(x) := \rho^{1/2} h^{1/2} \vec{u}^0(x) = \vec{\omega}^0(x) + \nabla\varphi^0, \quad \vec{\omega}^0(x) \in \vec{J}_0(\Gamma), \tag{106}$$

$$\nabla\varphi^0 \in \mathcal{D}(B_{32}) = \left\{ \nabla\varphi \in \vec{G}(\Gamma) : \varphi \in H_2^2(\Gamma), \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma \right\}, \tag{107}$$

$$\eta^0(x) \in H_\Gamma^1 = H^1(\Gamma) \cap H = \mathcal{D}(\mathcal{B}_{23}). \tag{108}$$

Тогда задача (4) *имеет единственное сильное решение* $\{\vec{u}(t); \eta(t)\}$ *при любом* $t \in \mathbb{R}$, *то есть такие функции* $\vec{u}(t)$ *со значениями в* $\vec{L}_2(\Gamma)$ *и* $\eta(t)$ *со значениями в* $H = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$, *для которых каждое слагаемое в первом уравнении* (4) *является непрерывной функцией* t *со значениями в* $\vec{L}_2(\Gamma)$, *каждое слагаемое во втором уравнении является непрерывной функцией* t *со значениями в* H, *выполнены эти уравнения при любом* $t \in \mathbb{R}$, *граничные условия на* $\partial\Gamma$ *(в смысле обобщенных функций) и начальные условия при* $t = 0$.

Если взамен (108) *выполнены условия*

$$\vec{u}^0(x) \in \vec{L}_2(\Gamma), \quad \eta^0(x) \in H, \tag{109}$$

то задача (4) *имеет единственное обобщенное решение, для которого полная энергия является непрерывной функцией* t *и справедлив закон сохранения энергии* (6).

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши (102) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ для искомой функции

$$y(t) := (\vec{\omega}(t); \nabla\varphi(t); \zeta(t))^t.$$

По замечанию 9 получаем, что семейство $\{U(t)\}$ из (103) является группой унитарных операторов в $\mathcal{H}$. Далее, если выполнены условия (108), то

$$y^0 = (\vec{\omega}^0; \nabla\varphi^0; \zeta^0)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{B}). \tag{110}$$

Тогда по теореме 11 задача (102) имеет единственное сильное решение $y(t)$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Для этого решения выполнено уравнение и начальное условие (40), то есть уравнения (35), (29), (28). Из (28), в частности, следует, что выполнены уравнения, краевое и начальные условия (14) , причем все слагаемые в уравнениях являются непрерывными функциями t со значениями в $\vec{L}_2(\Gamma)$ и H соответственно. С учетом замен (10) приходим к выводу, что $\{\vec{u}(t,x); \eta(t,x)\}^t$ — сильное решение задачи (4).

Для указанного сильного решения выполнен закон сохранения полной энергии. В самом деле, из (102) имеем

$$\frac{d}{dt}(y,y)_{\mathcal{H}} = \left(\frac{dy}{dt}, y\right)_{\mathcal{H}} + \left(y, \frac{dy}{dt}\right)_{\mathcal{H}} = \tag{111}$$

$$= i(\mathcal{B}y, y)_{\mathcal{H}} - i(\mathcal{B}y, y)_{\mathcal{H}} \equiv 0, \tag{112}$$

откуда следует, что

$$(y(t), y(t))_{\mathcal{H}} \equiv (y^0, y^0)_{\mathcal{H}}. \tag{113}$$

После возвращения к исходным переменным тождество (113) переходит в закон сохранения (21).

Пусть теперь выполнены условия (109). Тогда $y^0 \in \mathcal{H}$ и по теореме 11 задача Коши (109) имеет единственное обобщенное решение, для которого

$$(y(t), y(t))^{1/2}_{\mathcal{H}} = (U(t)y^0, U(t)y^0)^{1/2}_{\mathcal{H}} = (y^0, y^0)^{1/2}_{\mathcal{H}}. \tag{114}$$

Отсюда снова следует закон сохранения (6). $\square$

Следствие 13. *Если в задаче* (4) *выполнены начальные условия*

$$\vec{u}^0(x) \in \vec{C}^1(\overline{\Gamma}), \quad \eta^0(x) \in C^1(\overline{\Gamma}) \cap H, \tag{115}$$

то она имеет единственное сильное решение.

Доказательство. Так как $h(x) \in C^1(\overline{\Gamma})$, то $\vec{v}^0(x) = h^{1/2}(x)\vec{u}^0(x) \in \vec{C}^1(\overline{\Gamma})$. Тогда $\vec{\omega}^0(x) = P_0\vec{v}^0(x) \in \vec{J}_0(\Gamma)$. Далее, функция $\nabla\varphi^0 = \vec{v}^0(x) - \vec{\omega}^0(x)$ может быть найдена по решению задачи

$$\Delta\varphi^0 = \operatorname{div}(\nabla\varphi^0) = \operatorname{div}\vec{v}^0 \quad (\text{в } \Gamma), \quad \frac{\partial\varphi^0}{\partial n} = \vec{v}^0 \cdot \vec{n} \quad (\text{на } \partial\Gamma), \tag{116}$$

которая имеет единственное решение $\varphi^0(x) \in H^2_2(\Gamma) \cap H$ при $\operatorname{div}\vec{v}^0 \in C(\overline{\Gamma})$, $\vec{v}^0 \cdot \vec{n} \in C(\partial\Gamma)$, что и имеет место в рассматриваемом случае. Значит, $\nabla\varphi^0 \in \mathcal{D}(B_{32})$.

Так как $C^1(\overline{\Gamma}) \subset H^1_\Gamma$, то $\eta^0(x) \in \mathcal{D}(B_{23})$, а тогда для функций $\vec{u}^0(x)$ и $\eta^0(x)$ выполнены условия (108), и по теореме 12 задача (4) имеет единственное сильное решение. $\square$

Замечание 14. Фактически, при доказательстве следствия 13 установлено, что (в случае $\Gamma \in C^2$) $\vec{\omega}^0(x) \in \vec{C}^1(\overline{\Gamma})$, $\nabla\varphi^0(x) \in \vec{C}^1(\overline{\Gamma})$. $\square$

Заключение

Начально-краевая задача для дифференциальных уравнений теории мелкой воды допускает формулировку в виде задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве с неограниченными самосопряженными операторными коэффициентами.

Для негладких начальных данных задача Коши для уравнения в гильбертовом пространстве имеет единственное обобщенное решение.

Для гладких начальных данных задача Коши для уравнения в гильбертовом пространстве имеет единственное сильное решение.

Отметим, что *в этой работе не исследована спектральная задача о собственных колебаниях тонкого слоя вращающейся идеальной жидкости. Развитие методов данной работы позволит в дальнейшем исследовать и эту проблему.*

Список литературы

1. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
2. Kopachevsky N. D., Krein S. G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynemics. Volume 1: Selfadjoint Problems for an Ideal Fluid. Birkhäuser Verlag. — Basel, Boston, Berlin. — 2001. Operator Theory: Advances and Applicationes. — Vol. 128. — 377 p.; Volume 2: Not-self-adjoint Problems for a Viscaus Fluid (to appear at 2003).
3. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. 1. — М.: Мир, 1981. — 480 с.
4. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложение к спектральной теории // Материалы X математической школы. Киев: Изд-во Института математики АН УССР. — 1974. — с. 5–189.
5. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. — М.: ВИНИТИ. — 1977. — Т. 14. — с. 5–52.
6. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.