УДК 519.171

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ДЛЯ АВТОМОРФИЗМОВ ГРАФА

Д.Л.Тышкевич

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *email@mail.ru*

Abstract

The criterion for given bijection defined on vertex set of an arbitrary (not necessarily finite) given graph to be automorphism of this graph is obtained. The criterion can be used for studying as general binary relations as concrete finite graphes. Last case is illustrated on special class of graphes.

Введение

В теории графов (как и в теории общих бинарных отношений) понятие изоморфизма играет центральную роль. Многие известные задачи и *нерешенные проблемы* (такие как гипотезы Кэли-Улама и Рамачандрана, проблема Кёнига и др.) связаны с существованием тех или иных видов изоморфизма (см. [2], [3], [4], [5]). В частности, выяснение того, какая из заданной совокупности биекций, действующих на множествах вершин заданных (конечных) графов является изоморфизмом, приводит к алгоритмически трудно разрешимым задачам переборного характера (так, задача распознавания в заданном графе Γ подграфа, изоморфного заданному подграфу G являет NP-полной [1]). Ясно, что все это a priori накладывает на всевозможные критерии для изоморфизмов произвольных графов (и алгоритмы, основанные на них) непреодолимый отпечаток сложности. В связи с вышесказанным возникает необходимость *постановки следующей проблемы.* Определить по заданному графу универсальную характеристическую систему объектов, по которой можно распознавать автоморфизмы заданного графа или класса графов (бинарного отношения или класса бинарных отношений), причём (и, по возможности, не взирая на естественную сложность) такая система должна быть настолько гибкой, чтобы характеризовать автоморфизмы *любого* графа (в том числе и бесконечного).*Анализ публикаций,* посвященных этой теме (см., например, ссылки в [2], [3]) позволяет сделать вывод, что такой характеристической системы объектов, которая была бы универсальной и общепринятой, по-видимому, не существует (конечно, за исключением частных случаев, касающихся спектра графов, степенных последовательностей и пр.). *Нерешенным* является, например, *вопрос* характеризации автоморфизмов графа через вершинные (или реберные) окружения [3]. Его решению, в частности, посвящена данная статья.

Таким образом, *целью работы является:*

1) *Нахождение достаточно гибкой универсальной системы объектов, характеризующей автоморфизмы произвольного графа (в том числе и бесконечного с произвольной мощностью множества вершин).*
2) *Формулировка критерия, «распознающего» автоморфизмы графа при помощи объектов данной системы.*

Здесь может возникнуть следующий вопрос: а чем такой критерий «лучше» самого определения автоморфизма, выделяющего последние среди произвольных биекций на множестве вершин графа? Ответ (не без иронии) таков: любой подобный критерий будет ничем ни «хуже», ни «лучше». Ради краткости позволим себе аналогию с физикой, когда задаются вопросом : какая из систем отсчета наиболее удобна? Известно, что разные физические задачи приводят к большему или меньшему удобству тех или иных систем (что касается теории графов, то теорема 2 и следствие 1 данной статьи наиболее удобны в случае, когда достаточно хорошо известна структура вершинных окружений графа; также на интересные перспективы указывается в заключении).

Итак, в данной работе предложен один из критериев того, является ли заданная биекция на множестве вершин произвольного (в том числе и бесконечного) заданного графа автоморизмом этого графа. При этом перебор (как дуг графа так и самих биекций) элиминируется рассмотрением «большой» совокупности множеств, претендующей на роль вышеуказанной системы и характеризующей данный граф (в общем, если порядок графа равен v, где v — произвольный кардинал, то мощность этой системы равна 2^v). Эта совокупность является, по существу, разбиением множества вершин графа и строится по множествам исходящих дуг (см. (2) *и* (7)*). Критерий характеризует такое «поведение» биекции относительно данной системы, при котором первая является автоморфизмом (см. теорему 2 и формулу* (20)*); доказательства опираются на общие теоретико-множественные соотношения, основная часть которых вынесена в отдельный Существенным моментом является то, что формулировка приводимого критерия не зависит от того, конечен граф или бесконечен (правда, в конечном случае она упрощается за счет отпадения одного из равноправных условий, см. замечание 1). В связи с этим данный критерий может быть использован при исследовании группы автоморфизмов как абстрактных бинарных отношений, так и конкретных графов (для последнего случая в разделе 3 приводятся некоторые иллюстрации).*

1. Основные определения и вспомогательные соотношения

Всюду в данной работе под V будет подразумеваться некоторое универсальное множество, и все теоретико-множественные дополнения (обозначаемые чертой вверху), будут рассматриваться относительно него (исключение составляет обозначение $\overline{1,n}$) для множества натуральных чисел $\{1, 2, ..., n\}$). Теперь напомним некоторые необходимые нам в дальнейшем определения. Пусть $R \subseteq V^2-$ некоторое бинарное отношение. *Обратное отношение* для R есть множество $R^{-1} = \{\langle x, y\rangle | \langle y, x\rangle \in R\}$. *Образ множества* $A \subseteq V$ *относительно* R есть множество $R(A) = \{y | \exists x \in A \langle x, y\rangle inR\}$.

Произведение отношений R_1 *и* R_2 $(R_1, R_2 \subseteq V^2)$ есть отношение

$$R_1 \circ R_2 = \{\langle x, y\rangle | \exists z(\langle x, z\rangle \in R_1) \wedge (\langle z, y\rangle \in R_2)\}.$$

Через id обозначается *тождественное отношение* $\{\langle x, x\rangle | x \in V\}$. Под *функцией* f (на V) здесь понимается бинарное отношение, для которого справедливо равенство $f^{-1} \wedge f = id$. Обозначение B^A, как это принято , используется для множества всех функций с областью определения $-$ множеством A и областью значений , лежащей во множестве B. Ниже приводятся необходимые для доказательств соотношения, большинство из которых носит характер упражнений и частью содержится в задачниках по теории множеств и смежных с ней областями (см. , например. [4]). Через R, Q, и S обозначены бинарные отношения на V, через A и $B-$ подмножества V. Как обычно, в бесконечной записи операция $\times$ (декартово произведение) имеет больший приоритет, чем $\cup$ и $\cap$.

Теоретико $-$ множественные соотношения

1^0 $\bigcap\limits_{i\in I} \bigcup\limits_{j\in J} A_{ij} = \bigcap\limits_{f\in J^I} \bigcup\limits_{i\in I} A_{if}(i)$ (одно из свойств дистрибутивности).

2^0 $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} = \bigcap\limits_{i\in I} \overline{A}_i$ (одно из правил де Моргана)

3^0 $\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) \bigcap \left(\bigcup\limits_{j\in J} B_j\right) = \bigcap\limits_{\langle i,j\rangle \in I\times J} (A_i \bigcap B_j)$.

4^0 $A \bigcap \left(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} (A \bigcap B_i)$.

5^0 $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \emptyset \Leftrightarrow \ \forall i \in I \ A_i = \emptyset$.

6^0 $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset)$.

7^0 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \bigcap \bar{B} = \emptyset$

8^0 $\forall i \in I \ A_i \bigcap B = \emptyset \Leftrightarrow \left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) \bigcap B = \emptyset$.

9^0 $\bigcap\limits_{\alpha\in A} \overline{\{\alpha\}} = \bar{A}$.

10^0 Пусть $\{V_i\}_{i\in I}-$ разбиение V. Тогда $\bigcap\limits_{j\in A} \bar{V}_j = \bigcup\limits_{i\in \bar{A}} V_i$ для любого $A \subseteq I$.

11^0 Под выражением $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$, когда $I = \emptyset$, будем понимать V.

12^0 $\forall i \in I \ A_i \subseteq B_i \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i \subseteq B_i$.

13^0 Если $I \subseteq J$, то $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup\limits_{j\in J} A_j$.

14^0 Пусть $\{J_i\}_{i\in I}-$ некоторая система индексных множеств, и $J = \bigcup\limits_{i\in I} J_i$.

Тогда

$\bigcup\limits_{i\in I}\bigcup\limits_{j\in J_i} A_j = \bigcup\limits_{j\in J} A_j.$

15^0 Пусть $A, B \subseteq V$, тогда $\overline{A \times B} = \bar{A} \times B \bigcup V \times \bar{B}$.

16^0 $\bigcap\limits_{i\in I}(A_i \times B_i) = (\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \times (\bigcap\limits_{i\in I} B_i)$, в частности, $\bigcap\limits_{i\in I}(A \times B_i) = A \times (\bigcap\limits_{i\in I} B_i)$.

Связи между произведением отношений, обратным отношением, id и теоретико-множественными операциями над отношениями

17^0 $R \circ (\bigcup\limits_{i\in I} Q_i) = \bigcup\limits_{i\in I}(R \circ Q_i) \circ R = \bigcup\limits_{i\in I}(Q_i \circ R)$.

18^0 $(R \circ Q) \circ S = R \circ (Q \circ S)$ (ассоциативность композиции)

19^0 $(R \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ R^{-1}$.

20^0 $R \circ id = id \circ R = R$.

21^0 Если $R \subseteq Q$, то $S \circ R \subseteq S \circ Q$ и $R \circ S \subseteq Q \circ S$.

22^0 $\varphi-$ биекция $\Leftrightarrow \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = id$.

Свойства образов множеств относительно отношений

23^0 $R\Big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in I} R(A_i)$.

24^0 $A \subseteq B \Rightarrow R(A) \Rightarrow R(B)$.

25^0 Если $\varphi-$ биекция, то $\varphi\Big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{i\in I} \phi(A_i)$.

26^0 Если $\varphi-$ биекция, то $\varphi(A\backslash B) = \varphi(A)\backslash\varphi(B)$; в частности $\varphi(\bar{A}) = \overline{\varphi}(A)$

Некоторые специальные соотношения

27^0 $R \circ (A \times B) = R^{-1}(A) \times B, (A \times B) \circ Q = A \times Q(B)$.

28^0 $\{v \in V | R^{-1}(\{v\}) \bigcap A \neq \emptyset\} = R(A)$.

29^0 Если $\varphi-$ функция, то $\langle\varphi(u), \varphi(v)\rangle \in R \Leftrightarrow \langle u, v\rangle \in \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$

30^0 Для функций f и φ $(\varphi \circ f)(x) = f(\varphi(x))$.

2. Критерий автоморфизма для произвольного заданного графа

В качестве основного вспомогательного инструмента при доказательстве критерия будет использоваться следующая ниже теорема 1, которая дает описание решений (теоретико-множественного) уравнения для бинарных отношений (ср.7^0):

$$R \circ X \subseteq X \circ Q, \tag{1}$$

где R и $Q-$ заданные, а $X-$ искомые бинарные отношения на множестве V. Решение мы будем искать в следующем виде:

$$X = \bigcup_{v\in V} \{v\} \times L_v, \tag{2}$$

где $L_v \subseteq V$ (множество концов дуг, исходящих из вершины v в графе $\langle V, X\rangle$).

Теорема 1. *Бинарное отношение X, представленное в виде (2), является решением (1) тогда и только тогда, когда система множеств $\{L_v\}_{v\in V}$ удовлетворяет следующему условию:*

(A) Для всякого $F \subseteq V$ и для всякого $w \in R(F)$

$$L_w \bigcap \bigcap_{u\in\bar{F}} Q(L_u) \bigcap \bigcap_{u\in F} \overline{Q}(L_v) = \emptyset. \tag{3}$$

Доказательство. Из соотношений 17^0, 27^0 будем иметь:

$$R \circ X = R \circ (\bigcup_{v\in V} \{v\} \times L_v) = \bigcup_{v\in V} R \circ (\{v\} \times L_v) = \bigcup_{v\in V} R^{-1}(\{v\}) \times L_v. \tag{4}$$

Аналогично получаем равенство $X \circ Q = \bigcup\limits_{v\in V} (\{v\}) \times (L_v)$, откуда в силу 2^0 и 15^0

$$\overline{X \circ Q} = \bigcap_{v\in V} \Big(\overline{\{v\}} \times Q(L_v) \bigcup V \times \overline{Q(L_v)}.$$

Положим $A_{v1} = \overline{\{v\}} \times Q(L_v)$ и $A_{v2} = V \times \overline{Q(L_v)}$. Применяя 1^0, получим:

$$\overline{X \circ Q} = \bigcap_{v\in V} \bigcup_{j\in\overline{1,2}} A_{vj} = \bigcup_{f\in\overline{1,2}^V} \bigcap_{v\in V} A_{vf(v)}. \tag{5}$$

Зафиксируем $f \in \overline{1,2}^V$. Обозначим $F_i = f^{-1}(\{i\}), i \in \overline{1,2}$. Тогда, в силу равенства $\overline{F_1} = F_2$, соглашения 11^0 и равенств 9^0, 16^0 будем иметь цепочку равенств:

$$\bigcap_{v\in V} A_{vf(v)} = \bigcap_{v_1\in F_1} A_{v_1 1} \bigcap \bigcap_{v_2\in F_2} A_{v_2 2} = \bigcap_{v_1\in F_1} \Big(\overline{\{v_1\}} \times Q(L_{v1}) \Big) \bigcap \bigcap_{v_2\in F_2} \Big(V \times \overline{Q(L_{v2})} \Big) =$$
$$= \Big(\bigcap_{v_1\in F_1} \overline{\{v_1\}} \Big) \times \Big(\bigcap_{v_1\in F_1} Q(L_{v1}) \Big) \bigcap V \times \Big(\bigcap_{v_2\in F_2} \overline{Q(L_{v2})} \Big) = F_2 \times \Big(\bigcap_{v_1\in F_1} Q(L_{v1}) \bigcap \bigcap_{v_2\in F_2} \overline{Q(L_{v2})} \Big) \tag{6}$$

В силу $3^0, 7^0$ и равенств (4), (5) получим цепочку:

$$(1) \Leftrightarrow R \circ X \bigcap \overline{X \circ Q} = \emptyset \Leftrightarrow \Big(\bigcup_{v\in V} R^{-1}(\{v\}) \times L_v \Big) \bigcap \Bigg(\bigcup_{f\in\overline{1,2}^V} \bigcap_{v\in V} A_v f(v) \Bigg) = \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{\langle v,f\rangle\in V\times\overline{1,2}^V} (R^{-1}(\{v\}) \times L_v) \bigcap \bigcap_{v\in V} A_{vf(v)} = \emptyset.$$

Последнее, в силу 5^0, может иметь место тогда и только тогда, когда для всех $\langle v, f\rangle \in V \times \overline{1,2}^V (R^{-1}(\{v\}) \times L_v) \bigcup \bigcup\limits_{v\in V} A_{vf(v)} = \not 0$, откуда следует, с учетом (6) и свойств $5^0, 6^0$, справедливость формулы:

$$\forall \langle v, f\rangle \in V \times \overline{1,2}^V$$

$$\Big(R^{-1}(\{v\})\bigcap f^{-1}(\{2\})=\not{\emptyset}\Big)\vee\left(L_v\bigcap\bigcap_{v_1\in f^{-1}(\{1\})}Q(L_{v_1})\bigcap\bigcap_{v_2\in f^{-1}(\{2\})}\overline{(L_{v_2})}=\not{\emptyset}\right).$$

Заметим, что когда f пробегает все множество $\overline{1,2}^V$, то $f^{-1}(\{2\})$ пробегает все подмножества V, поэтому последняя формула, с учетом равенства $f^{-1}(\{1\})=\overline{f^{-1}(\{2\})}$, эквивалентна следующей:

$$\forall v\in V\forall F\subseteq V\Big(R^{-1}(\{v\})\bigcap F=\not{\emptyset}\Big)\vee\left(L_v\bigcap\bigcap_{u\in\bar{F}}Q(L_u)\bigcap\bigcap_{u\in F}\overline{Q(L_u)}=\not{\emptyset}\right).$$

Эта формула, в силу своей структуры, эквивалентна формуле

$$\forall F\subseteq V\forall v\in\{u\in V|R^{-1}(\{u\})\bigcap F\neq\not{\emptyset}\}\left(L_v\bigcap\bigcap_{u\in\bar{F}}Q(L_u)\bigcap\bigcap_{u\in F}\overline{Q(L_u)}=\not{\emptyset}\right),$$

которая, с учетом 28^0, совпадает с условием (A) теоремы.

Далее нашей основной целью является исследование уравнения (1) в случае, когда $Q=R=\varphi-$ биекция на множестве V. Рассмотрим следующие множества:

$$\mathfrak{L}_\sigma=\bigcap_{v\in V}L_v^{\sigma(v)}(\sigma\in\mathfrak{B}),\tag{7}$$

где $\mathfrak{B}=\{0,1\}^V$ и $A^s=\begin{cases}\bar{A}, & s=0\\ A, & s=1\end{cases}$ $(A\subseteq V)$.

В силу своего определения система (7) является разбиением множества V.

Теорема 2. *Бинарное отношение X, представленное в виде* (2), (7) *является решением уравнения*

$$\varphi\circ X\subseteq X\circ\varphi\tag{8}$$

тогда и только тогда, когда справедлива следующая формула

$$\forall\sigma\in\mathfrak{B}\forall\zeta\in\Gamma_\varphi(\sigma)\ \mathfrak{L}_\zeta\bigcap\varphi(\mathfrak{L}_\sigma)=\not{\emptyset},\tag{9}$$

где

$$\Gamma_\varphi(\sigma)=\{\zeta\in\quad B|\zeta^{-1}(\{1\})\bigcap\varphi(\sigma^{-1}(\{0\}))\neq\not{\emptyset}\}\tag{10}$$

Доказательство. Пусть $F\subseteq V$. Через σ_F обозначим такой набор из $\mathfrak{B}$, для которого $\sigma_F^{-1}(\{0\})=F$. Тогда

$$\bigcap_{u\in\bar{F}}L_u\bigcap_{v\in F}\overline{L_v}=\quad L_{\sigma_f}\tag{11}$$

и

$$L_v=\bigcup_{\sigma\in T_v}\quad L_\sigma\tag{12}$$

где $T_v = \{\sigma \in \mathfrak{B} | \sigma(v) = 1\}$. В силу (11), (12), 4^0 и 5^0, 25^0 и 26^0условие (А) теоремы 1 для $Q = R = \varphi$ и системы (7) равносильна формуле

$$\forall F \subseteq V \ \forall v \in \varphi(F) \forall \sigma \in T_v \quad L_\sigma \bigcap \varphi(\ L_{\sigma F}) = \emptyset \tag{13}$$

Покажем, что

$$\Gamma_\varphi(\sigma) = \{\zeta \in \mathfrak{B} | \exists F \subseteq V \ \exists v \in \varphi(F) \ (\sigma = \sigma_F) \vee (\zeta \in T_v)\} \tag{14}$$

В силу (13), (14) и того факта, что когда F пробегает все подмножества множества V, то σ_Fпробегает все $\mathfrak{B}$, и следует (9). Равенство (14) обосновывается при помощи следующей цепочки:

$$\exists F \subseteq V \ \exists v \in \varphi(F)(\sigma = \sigma_F) \wedge (\zeta \in T_v) \Leftrightarrow \exists F \subseteq V \exists v \in \varphi(F)(\sigma^{-1}(\{0\}) = F) \wedge (\zeta(v) = 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists v(v \in \varphi(\sigma^{-1}(\{0\}))) \wedge (v \in \zeta^{-1}(\{1\})) \Leftrightarrow \zeta^{-1}(\{1\}) \bigcap \varphi(\sigma^{-1}(\{0\})) \neq \emptyset \Leftrightarrow \zeta \in \Gamma_\varphi(\sigma).$$

Напомним, что биекция $\varphi : V \to V$ называется *автоморфизмом* бинарного отношения $X \subseteq V^2$ (или графа $\langle V, X \rangle$), если $\forall u, v \in V(\langle u, v \rangle \in X) \Leftrightarrow (\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle \in X)$. В силу 29^0 последнее эквивалентно равенству:

$$X = \varphi \circ X \circ \varphi^{-1} \tag{15}$$

В свою очередь, (15) эквивалентно (см.$20^0, 22^0$) совокупности двух включений: (8) и

$$\varphi^{-1} \circ X \subseteq X \circ \varphi^{-1}. \tag{16}$$

Таким образом, применяя теорему 2 к биекциям φ, φ^{-1} и отношению X, получим

Следствие 1. *Биекция* $\varphi : V \to V$ *является автоморфизмом отношения* $X \subseteq V^2$, *представленного в виде* (2), (7) *тогда и только тогда, когда справедливы следующие формулы*

$$\forall \sigma \in \mathfrak{B} \ \forall \zeta \in \Gamma_\varphi(\sigma) \ \mathfrak{L}_\zeta \bigcap \varphi(\mathfrak{L}_\sigma) = \emptyset,$$

$$\forall \sigma \in \mathfrak{B} \ \forall \zeta \in \Gamma_{\varphi^{-1}}(\sigma) \ \mathfrak{L}_\zeta \bigcap \varphi^{-1}(\mathfrak{L}_\sigma) = \emptyset.$$

Замечание 1. Утверждение следствия 1 справедливо для произвольного множества V и произвольной биекции φ. Однако, при одном предположении, которое далее будет рассмотрено и которое автоматически выполняется в случае конечного V, формулировка следствия 1 упрощается. Возможность упрощения основана на следующем простом утверждении.

Предложение 1. Пусть φ имеет конечный порядок в группе подстановок $S(V)$. Тогда из включения (8) следует равенство (15).

Доказательство. Напомним, что совокупность $S(V)$ всех биекций множества V является группой относительно произведения, определяемого композицией отображений: $\varphi\psi = \psi \circ \varphi$ (ср.30^0). Через φ^n обозначим $n-$ю степень элемента φ. Говорят, что элемент φ *имеет конечный порядок,* если существует такое натуральное число

n, что $\varphi^n = id$ (минимальное такое n и есть *порядок* φ). С помощью формул 21^0, применяя индукцию, нетрудно показать, что из включения (7) следует включение

$$\varphi^n \circ X \subseteq X \circ \varphi^n \tag{17}$$

при любом натуральном n. Пусть $m-$ порядок $m-$ порядок φ. Тогда из соотношения $\varphi^{m-1}\varphi = \varphi\varphi^{m-1} = id$ следует, что $\varphi^{m-1} = \varphi^{-1}$,таким образом, из (17) получим включения (16), которое вместе с (8) и даст равенство (15).

Итак, в случае конечного множества V предложение 1 всегда имеет место. Когда V бесконечно нетрудно привести пример биекции φ и отношения X, для которых предложение 1 неверно. Действительно, пусть $V = Z$, где $Z-$ множество целых чисел. Положим $X = N^2$ ($N-$ множество натуральных чисел), $\varphi(n) = n+1 (n \in Z)$. Легко видеть, что для любых $n, m \in Z$ выполняется импликация $\langle n, m\rangle \in X \Rightarrow \langle \varphi(n), \varphi(m)\rangle \in X$, т.е. справедливо включение (8). Но, к примеру, $\langle \varphi(0), \varphi(0)\rangle \in X$ и $\langle 0, 0\rangle \notin X$, таким образом, не имеет места включение (16), а следовательно, и равенство (15). При этом видно, что φ имеет бесконечный порядок.

3. Некоторые иллюстрации и следствия

В этом разделе мы проиллюстрируем приведенные выше результаты, переформулировав критерий автоморфизма, определяемый следствием 1 для одного частного класса графов, определение которого дано ниже.

Граф $G = \langle V, X\rangle$ с множеством вершин $V = \overline{1,n} (n \geq 2)$ назовем *синглетно распределенным,* если $\|\mathfrak{L}_\sigma\| \leq 1$ для всех $\sigma \in \mathfrak{B}$ $(= \{0,1\}^{\overline{1,n}})$ (см. (7)). В этом случае существует такая последовательность $\{\sigma_k\}_{k=1}^n$ из $\mathfrak{B}$, что $\mathfrak{L}_{\sigma_k} = \{k\} (k \in \overline{1,n})$ и $\mathfrak{L}_\sigma = \emptyset$ для остальных σ. Последовательность $\{\sigma_k\}_{k=1}^n$ назовем *определяющей последовательностью* (синглетно распределенного графа G). Через $AutG$ обозначим группу автоморфизмов G. Положим $N_k = \sigma_k^{-1}(\{0\})$ $(k \in \overline{1,n})$. Тогда справедливо следующее

Утверждение 1. $\varphi \in AutG \Leftrightarrow \forall k \in \overline{1,n}\ \varphi(N_k) \subseteq N_{\varphi k}$

Доказательство. Имеем

$$\varphi(\mathfrak{L}_{\sigma_k}) = \varphi(\{k\}) = \{\varphi(k)\} = \mathfrak{L}_{\sigma_{\varphi(k)}},$$

откуда следует, что

$$\mathfrak{L}_\zeta \bigcap \varphi(\mathfrak{L}_{\sigma_k}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{L}_\zeta \bigcap \mathfrak{L}_{\varphi(\sigma_k)} \neq \emptyset \Leftrightarrow \zeta = \varphi(\sigma_k) \tag{18}$$

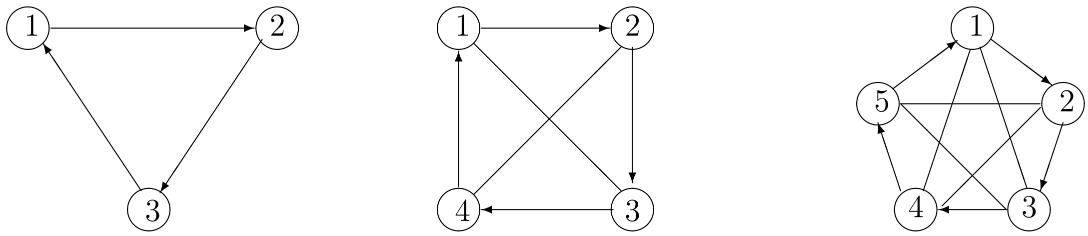
Применяя к соотношению (18) следствие 1 (с учетом предложения 1), получим:

$$\varphi \in AutG \Leftrightarrow \forall k \in \overline{1,n} \qquad \sigma_{\varphi(k)} \notin \Gamma_{\varphi(\sigma_k)} \Leftrightarrow \forall k \in \overline{1,n} \qquad \sigma^{-1}_{\varphi(k)}(\{1\}) \bigcap \varphi(\sigma_k^{-1}(\{0\})) = \emptyset \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall k \in \overline{1,n} \qquad \varphi(N_k) \subseteq N_{\varphi(k)}$$

Пример 1. Рассмотрим граф $G^{(n)} = \langle V, X \rangle, \quad V = \{1, ..., n\}, n \geq 3$, для которого (см. (2))

$$\begin{aligned} &L_1 = \overline{2, n-1} \\ &L_k = \overline{1, k-2} \bigcup \overline{k+1, n}, \quad k \in \overline{2, n-1}, \\ &L_n = \overline{1, n-2}. \end{aligned}$$

(Графы G^n для $n = 3, 4, 5$ изображены на рис.1)



$G^{(3)}$ $\qquad$ $G^{(4)}$ $\qquad$ $G^{(5)}$

Рис.1

При помощи проверки можно убедиться, что граф G^n является синглетно распределенным при любом фиксированном $n \geq 3$. Определяющая последовательность графа G^n задается следующим образом:

$$\sigma_k = \begin{cases} 1...1001...1, & k \in \overline{1, n-1} \\ 01...10, & \mathrm{k = n}. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathbb{N}_k = \begin{cases} \{k, k+1\}, & k \in \overline{1, n-1} \\ \{1, n\}, & \mathrm{k = n}. \end{cases}$$

и отсюда, используя утверждение 1 легко вывести, что биекция φ является автоморфизмом графа $G^{(n)}$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi_{(1)} = \begin{cases} \varphi(n) + 1, & \varphi(n) \neq n \\ 1, & \varphi(n) = n \end{cases} \qquad \text{и}$$

$$\forall \in \overline{1, n-1} \qquad \varphi_{(k+1)} = \begin{cases} \varphi(k) + 1, & \varphi(k) \neq n \\ 1, & \varphi(k) = n \end{cases} \tag{19}$$

Нетрудно увидеть, что условия (19) выделяют полные циклы группы S_n :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 3 & 4 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ит.д.}$$

4. Об одной алгебраической структуре на множестве биекций

Соотношение (9) являющееся определяющим при характеризации автоморфизмов произвольных графов (см. теорему 2 и следствие 1), можно эквивалентным образом переформулировать в несколько более конструктивном виде, который интересен тем, что он позволяет непосредственно усмотреть одну алгебраическую структуру (а именно, моноид), более явственно проступающую после данной переформулировки.

Применим последовательно $8^0, 7^0, 2^0, 10^0$ получим цепочку:

$$\forall\zeta \in \Gamma_\varphi(\sigma)\mathfrak{L}_\zeta \bigcap \varphi(\mathfrak{L}_\varphi) = \emptyset \Leftrightarrow \left(\bigcup_{\zeta\in\Gamma_\varphi(\sigma)} \mathfrak{L}_\zeta\right) \bigcap \varphi(\mathfrak{L}_\sigma) = \emptyset \Leftrightarrow \varphi(\mathfrak{L}_\sigma) \subseteq$$

$$\subseteq \overline{\left(\bigcup_{\zeta\in\Gamma_\varphi(\sigma)} \mathfrak{L}_\zeta\right)} = \bigcap_{\zeta\in\Gamma_\varphi(\sigma)} \overline{(\mathfrak{L}_\zeta)} = \bigcup_{\zeta\in\overline{\Gamma_\varphi(\sigma)}} \mathfrak{L}_\zeta,$$

таким образом, (9) эквивалентно формуле

$$\forall\sigma \in \mathfrak{B}\ \varphi(\mathfrak{L}_\sigma) \subseteq \bigcup_{\zeta\in\overline{\Gamma_\varphi(\sigma)}} \mathfrak{L}_\zeta \tag{20}$$

Исследуя (20), мы можем отвлечься от конкретного смысла множеств $\mathfrak{L}_\sigma$, определяемого разложениями (2) и (7). Пусть теперь $\{\mathfrak{L}_\sigma\}_\sigma \in \mathfrak{B}-$ некоторая произвольная дизъюнктивная система, не связанная непосредственно с графом $\langle V, X\rangle$ через (2) и (7). Справедливо следующее

Предложение 2. Совокупность функций $\varphi : V \to V$, удовлетворяющих (20), является полугруппой с единицей id.

Доказательство. Пусть φ_1 и φ_2- некоторые функции, удовлетворяющие (20). Покажем справедливость включения

$$\bigcup_{\chi\in\overline{\Gamma_{\varphi_2}(\sigma)}} \overline{\Gamma_{\varphi_1}(\chi)} \subseteq \overline{\Gamma_{\varphi_2\circ\varphi_1}(\sigma)} \tag{21}$$

Из определения (10) следует, что

$$\overline{\Gamma_\varphi(\sigma)} = \{\zeta \in \mathfrak{B} | \varphi(\sigma^{-1}(\{0\})) \subseteq \zeta^{-1}(\{0\})\} \tag{22}$$

Пусть ζ принадлежит левой части в (21). В силу строения левой части в (21) и равенства (22) это означает, что для некоторого $\chi \in \mathfrak{B}$ выполняются включения $\varphi_2(\sigma^{-1}(\{0\})) \subseteq \chi^{-1}(\{0\})$ и $\varphi_1(\chi^{-1}(\{0\})) \subseteq \zeta^{-1}(\{0\})$; последовательно применяя к последним двум включениям 24^0 и 30^0, получим:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1(\sigma^{-1}(\{0\})) = \varphi_1(\varphi_2(\sigma^{-1}(\{0\}))) \subseteq \varphi_1(\chi^{-1}(\{0\})) \subseteq \zeta^{-1}(\{0\}),$$

т.е. $\zeta \in \overline{\Gamma_{\varphi_2} \circ \varphi_1(\sigma)}$. Теперь, последовательно используя $30^0, 24^0, 12^0, 14^0, 13^0$ и включение (22), получим цепочку:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1(\mathfrak{L}_\sigma) = \varphi_1(\varphi_2(\mathfrak{L}_\sigma)) \subseteq \varphi_1\left(\bigcup_{\chi \in \overline{\Gamma_{\varphi_2}(\sigma)}} \mathfrak{L}_\chi\right) =$$

$$= \bigcup_{\chi \in \overline{\Gamma_{\varphi_2}(\sigma)}} \varphi_1(\mathfrak{L}_\chi) \subseteq \bigcup_{\chi \in \overline{\Gamma_{\varphi_2}(\sigma)}} \bigcup_{\zeta \in \overline{\Gamma_{\varphi_1}(\chi)}} \mathfrak{L}_\zeta = \bigcup_{\chi \in \overline{\hat{\Gamma}_{\varphi_1,\varphi_2}(\sigma)}} \mathfrak{L}_\chi \subseteq \bigcup_{\chi \in \overline{\Gamma_{\varphi_2 \circ \varphi_2}(\sigma)}} \mathfrak{L}_\chi,$$

где $\hat{\Gamma}_{\varphi_1,\varphi_2}(\sigma) = \bigcup_{\chi \in \overline{\Gamma_{\varphi_2}(\sigma)}} \overline{\Gamma_{\varphi_1}(\chi)}$. Тождественное отображение удовлетворяет (20) так как, очевидно, $\sigma \in \overline{\Gamma_{id}(\sigma)}$.

Заключение

Главными выводами работы являются следующие. Система характеристических множеств, построенная по вершинным окружениям (см. (2), (7)) является эффективным средством распознавания автоморфизмов произвольных классов графов, для которых имеется хорошее описание в терминах вершинных окружений (последнее проиллюстрировано в разделе 3). *Представляется перспективным* дальнейшее уточнение (и утончение) приведенного критерия (следствия 1), когда соответствующие множества $\mathfrak{L}_\sigma$ и биекция φ (либо другие объекты, построенные по ним) будут входить в формулировку критерия независимо. Такой путь, на наш взгляд, должен привести к полному конструктивному (т.е. индуктивному в конечном случае и трансфинитно индуктивному в бесконечном)описанию группы автоморфизмов произвольного графа (бинарного отношения).

Список литературы

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: Мир, 1982. - 416 с.
2. Лекции по теории графов / Под ред. Емеличева В.А., Мельникова О.И. и др. - М.: Наука, 1990. - 384 с.
3. Зыков А.А. Основы теории графов. - М.: Наука, 1987. - 381 с.
4. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. - М.: Наука, 1975. - 240 с.
5. Оре О. Теория графов. - М.:Наука, 1968. - 352 с.