УДК 519.95

О РАСШИРИТЕЛЬНОСТИ СЛОЕВ n–МЕРНОЙ ТРЕХЗНАЧНОЙ РЕШЕТКИ

Т.В. Андреева

Государственный университет - высшая школа экономики,
ул. Мясницкая, д. 20, г.Москва, Россия, 103001
e-mail: *t_andr@mail.ru*

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 01-01-00266

In this paper the enlargeability of the graphs generated by next levels on n-dimensional 3-valued lattice E_3^n was proven.

Введение

Для получения асимптотики числа антицепей в частичных порядках *ставится проблема* доказательства унимодальности частично упорядоченного множества. Задача о числе антицепей в n-мерном единичном кубе, называемая также проблемой Дедекинда, была решена А.Д. Коршуновым (см. [3]) в 1977 г. В 1987 г. А.А. Сапоженко получил асимптотику числа антицепей в унимодальных частично упорядоченных множествах (см., например, [4]- [6]), из которой вытекает и решение проблемы Дедекинда. *Анализ последних достижений и публикаций* позволяет сделать вывод, что *нерешенными вопросами* являются, например вопросы об унимодальности k-значной n-мерной решетки. *Целью данной работы* является решение этих вопросов. Свойство унимодальности частично упорядоченного множества основано на **расширительности** графа, порожденного парой соседних слоев множества. Расширительность состоит в том, что мощность границы подмножества вершин больше мощности самого подмножества (см. определение ниже).

В данной работе доказывается расширительность графа, порожденного парой соседних слоев множества E_3^n.

Будем рассматривать множество E_3^n всех наборов вида $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, где $\alpha_i \in E_3$, $E_3 = \{0, 1, 2\}$, $n \geqslant 2$. **Нормой** набора $\tilde{\alpha} \in E_3^n$ называется величина $\|\tilde{\alpha}\| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$. Подмножество множества E_3^n, состоящее из всех наборов с нормой i и называемое **i-ым слоем**, обозначим через $F(n, i)$. Мощность можества $F(n, i)$, будем обозначать через $N(n, i)$.

Пусть $G = (X, Z; E)$ – двудольный граф. Границей множества $A \subseteq X$ называется множество

$$\partial(A) = \{v \in Z : \exists u \in A \ \{u, v\} \in E\}.$$

Двудольный граф $G = (X, Z; E)$ назовем (ε, δ)-**расширителем**, если $|A| \leqslant |\partial(A)|(1 - \delta)$ для всех $A \subseteq X$ таких, что $|\partial(A)| \leqslant \lceil \varepsilon |Z| \rceil$. Если граф является $(1 - \delta)$-расширителем, назовем его δ-**расширителем**.

В [4] было дано определение полного $(\Delta, æ, q, p)$-раширителя. При рассмотрении E_3^n возникает необходимость обобщить это понятие. Определение, данное ниже, отличается от данного в [4] отсутствием одного требования. Положим

$$g = \frac{æ^3}{\log_2^7 æ}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{g}{|Z|},$$

$$\delta_2 = \frac{\log_2^2 æ}{æ}, \qquad \delta_1 = \frac{\log_2^9 æ}{æ^2}.$$

Пусть $p > 0$ – действительное число. Граф $G = (X, Z; E)$ назовем **полным** $(\Delta, æ, q, p)$–**расширителем**, если он является δ_1-расшителем, $(\varepsilon_2, \delta_2)$-расширителем и довлетворяет условиям

$$|X| \leqslant 2^{(\Delta+1)æ - 2\log_2^2 æ}, \tag{1}$$

$$\min_{v \in X} \sigma(v) = æ, \qquad \max_{v \in X \cup Z} \sigma(v) \leqslant æ^p, \qquad \max_{u,v \in X, v \neq u} |\partial(\{u\}) \cap \partial(\{v\})| \leqslant q, \tag{2}$$

где $\sigma(v) = |\partial(\{u\})|$ – степень вершины v в графе G. *Основным результатом* данной работы является *доказательство* следующего утверждения:

Теорема 1. *Пусть n достаточно велико, $0 \leqslant i \leqslant n-1$ и $\Gamma_i^n = (X_i, Z_i; E_i)$ – двудольный граф с долями вершин $X_i = F(n,i)$, $Z_i = F(n, i+1)$ и множеством ребер $E_i = \{\{u, v\} : \ u \in X_i, \ v \in Z_i, \ u \leqslant v\}$. Тогда Γ_i^n является полным $(3, n-(i/2), 1, 2)$-расширителем.*

1. Аналог теоремы Краскала–Катона

Пусть A – произвольное подмножество наборов i-го слоя E_3^n. Набор $\tilde\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ **не превосходит** набор $\tilde\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ (т.е. $\tilde\alpha \leqslant \tilde\beta$) тогда и только тогда, когда $\alpha_i \leqslant \beta_i$, для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Наборы $\tilde\alpha$ и $\tilde\beta$ называются **сравнимыми**, если либо $\tilde\alpha \leqslant \tilde\beta$, либо $\tilde\beta \leqslant \tilde\alpha$. Через $\partial_t(A)$ обозначается множество всех наборов t-го слоя E_3^n, сравнимых с наборами из A. Для $0 \leqslant i \leqslant n$ положим $\partial(A) = \partial_{i+1}(A)$

Будем использовать понятие лексикографического порядка на множестве E_3^n, введенное в [7], при котором набор $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ предшествует набору $(\beta_1, ..., \beta_n)$, если либо $\alpha_1 < \beta_1$, либо $\alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_{i-1} < \beta_{i-1}, \alpha_i < \beta_i$ для которого i, $2 \leqslant i \leqslant n$.

Пусть $A \subseteq F(n,i)$. Через CA обозначается множество, состоящее из $|A|$ первых в лексикографическом порядке, а через LA – множество из $|A|$ последних в лесикографическом порядке элементов $F(n,i)$. Из [7] следует

Теорема 2. *Для произвольного $A \subseteq F(n,i)$, $i = 0, 1, ..., 2n$, справедливо*

(i) $|\partial_{i-1}(A)| \geqslant |\partial_{i-1}(CA)|$;
(ii) $|\partial_{i+1}(A)| \geqslant |\partial_{i+1}(LA)|$;
(iii) *если $A = CA$, то $\partial_{i-1}(A) = C\partial_{i-1}(A)$;*
(iv) *если $A = LA$, то $\partial_{i+1}(A) = L\partial_{i+1}(A)$.*

Докажем некоторые вспомогательные утверждения. Обозначим множество последних p векторов множества $F(n,i)$ в лексикографическом порядке через $L_{n,i}()p$.

Лемма 1. *Пусть* $A \subseteq F(n,i),\ i < n,\ |A| = s,\ t = t(n,i,s) = \min\{l : N(n-l, i-2l) \geqslant s\}$. *Пусть* $\tilde{\alpha}_t = (2,...,2,0,...,0),\ \|\tilde{\alpha}_t\| = 2t$. *Тогда*

$$LA \subseteq F(n,i) \cap \partial_i(\tilde{\alpha}_t). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $q = |\partial_{i-1}(\tilde{\alpha}_t)| = N(n-t, i-2t)$. Поскольку $s \leqslant q$, то

$$L_{n,i}(s) \subseteq L_{n,i}(q).$$

С другой стороны,

$$L_{n,i}(q) = F(n,i) \cap \partial_i(\tilde{\alpha}_t).$$

Отсюда вытекает (3). Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть* $A \subseteq F(n,i),\ i < n$ *и найдется такое* r, *что* $A \leqslant N(n-2r, 2)$. *Тогда*

$$|A|(n-2r-1) \leqslant 3|\partial(A)|. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $B = LA,\ \tilde{\alpha}_t = (2,...,2,0,...,0),\ \|\tilde{\alpha}_t\| = 2r$. В силу теоремы 2 имеем $|\ \partial(a)| \geqslant |\ \partial(B)|$, а в силу леммы 1 при $|B| \leqslant N(r,2)$

$$B \subseteq F(n,i) \cap \partial_i(\tilde{\alpha}_r).$$

Заметим, что $|\partial_{i+1}(\tilde{\beta})| \geqslant n-2r-1$ для всякого $\tilde{\beta} \in B$, и $|\tilde{\gamma}| \leqslant 3$ для всякого $\tilde{\gamma} \in \partial(B)$. Обозначим через $E(B)$ множество ребер в графе с долями вершин B и $\partial(B)$. Тогда

$$|A|(n-2r-1) = |B|(n-2r-1) \leqslant |E(B)| \leqslant 3|\partial(B)| \leqslant 3|\partial(A)|.$$

Отсюда следует (4).

Следствие 2. *Пусть* $A \subseteq F(n,i),\ i < n$ *и найдется* r *такое, что* $\partial(A) \leqslant N(n-2r, 3)$. *Тогда выполнено неравенство (4).*

Доказательство. Покажем, что $|A| < N(n-2r, 2)$, тогда утверждение будет вытекать из следствия 1. Предположим, что $|A| = s > N(n-2r, 2)$. Пусть $B = LA$ и $t = N(n-2r, 3)$. Тогда для всякого набора $\tilde{\beta}$ из $B \backslash L_{n,i}(N(n-2r, 2))$

$$|\partial(\tilde{\beta}) \backslash L_{n,i}(t)| \geqslant 1.$$

Отсюда получаем, что при $i < n$

$$|\partial(A)| \geqslant |\partial(B)| \geqslant N(n-2r, 3) + 1 > N(n-2r, 3),$$

что противоречит условию.

Лемма 2. *Пусть* $A \subseteq F(n,i)$, $i < n$, $|A| = s$, $t = t(n,i,s) = \min\{l : N(n-l-1, i-2l-1) + N(n-l-1, i-2l-2) \geqslant s\}$. *Пусть* $\tilde{\beta}_t = (2,...,2,1,0,...,0)$, $\|\tilde{\beta}_t\| = 2t+1$. *Тогда*

$$LA \subseteq F(n,i) \cap \partial_i(\tilde{\beta}_t). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $q = |\partial_i(\tilde{\beta}_t)| = N(n-t-1, i-2t-1) + N(n-t-1, i-2t-2)$. Поскольку $s \leqslant q$, то

$$L_{n,\ i}(s) \subseteq L_{n,\ i}(q).$$

С другой стороны,

$$L_{n,\ i}(q) = F(n,i) \cap \partial_i(\tilde{\beta}_t).$$

Отсюда вытекает (5). Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся результатом из работы [1]:

Теорема 3. *При достаточно больших* n *и произвольных* $1 \leqslant i \leqslant n$ *существует функция* ε_n *такая, что* $\lim\limits_{n\to\infty} n\varepsilon_n = 0$ *и выполнено*

$$\frac{N(n,i-1)}{N(n,i)} \leqslant 1 - \frac{3}{4n} + \varepsilon_n.$$

Следствие 3. *При достаточно больших* n *и произвольных* $1 \leqslant i \leqslant n$ *выполнено*

$$\frac{N(n,i-1)}{N(n,i)} \leqslant 1 - \frac{7}{10n}. \tag{6}$$

Лемма 3. *Пусть* n *достаточно велико,* $0 \leqslant i \leqslant n-1$ *и* $\Gamma_i^n = (X_i, Z_i; E_i)$ *– двудольный граф с долями вершин* $X_i = F(n,i)$, $Z_i = F(n,i+1)$ *и множеством ребер* $E_i = \{\{u,v\} : u \in X_i,\ v \in Z_i,\ u \leqslant v\}$. *Тогда* Γ_i^n *является* δ_1*–расширителем.*

Доказательство. Для произвольного множества $A \subseteq F(n,i)$ покажем, что $|A| \leqslant |\partial(A)|(1-\delta_1)$. Рассмотрим наборы $\tilde{\alpha}_m = (2,...,2,0,...,0) \in F(n,2m)$ и $\tilde{\beta}_t = (2,...,2,1,0,...,0) \in F(n,2t+1)$. Если множество LA совпадает либо с $\partial_i(\tilde{\alpha}_m)$ для некоторого m, $2m \leqslant i$, либо с $\partial_i(\tilde{\beta}_t)$ для некоторого t, $2t+1 \leqslant i$, то в силу лемм 1, 2 и следствия 3 справедливо (6). В противном случае возможны два варианта.

1) Найдется t, $1 \leqslant t \leqslant n$ такое, что $|\partial_i(\tilde{\alpha}_t)| < |A| < |\partial_i(\tilde{\beta}_{t-1})|$. Положим $C = LA \backslash \partial_i(\tilde{\alpha}_t)$, $\partial^*(C) = \partial(C) \backslash \partial_{i+1}(\tilde{\alpha}_t)$, тогда $\partial(LA) = \partial_{i+1}(\tilde{\alpha}_t) \cup \partial^*(C)$. Имеем в силу следствия 3

$$|A| = |LA| = |\partial_i(\tilde{\alpha}_t)| + |C| \leqslant \left(1 - \frac{7}{10(n-t)}\right) |\partial_{i+1}(\tilde{\alpha}_t)| + |C| =$$

$$= \left(1 - \frac{7}{10(n-t)} \frac{|\partial_{i+1}(\tilde{\alpha}_t)|}{|\partial_{i+1}(\tilde{\alpha}_t)| + |C|}\right)(|\partial_{i+1}(\tilde{\alpha}_t)| + |C|).$$

Поскольку $|\partial_i(\tilde{\beta}_{t-1}) \backslash \partial_i(\tilde{\alpha}_t)| = |\partial_i(\tilde{\beta}_{t-1})| - |\partial_i(\tilde{\alpha}_t)| = N(n-t, i-2t+1)$, то, $|C| < N(n-t, i-2t+1) = |\partial_{i+1}(\tilde{\alpha}_t)|$. Из [2] следует, что $|C| \leqslant |\partial^*(C)|$, с учетом этого и теоремы 2 получаем

$$|A| < \left(1 - \frac{7}{10(n-t)}\right)(N(n-t, i-2t+1) + |C|) \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - \frac{7}{10(n-t)}\right)(N(n-t, i-2t+1) + |\partial^*(C)|) =$$

$$= \left(1 - \frac{7}{10(n-t)}\right)|\partial(LA)| \leqslant (1-\delta_1)|\partial(A)|.$$

2) Найдется t, $0 \leqslant t \leqslant n-1$ такое, что $|\partial_i(\tilde{\beta}_t)| < |A| < |\partial_i(\tilde{\alpha}_t)|$. Положим $|C| = LA \setminus \partial_i(\tilde{\beta}_t)$, $\partial^*(C) = \partial(C) \setminus \partial_{i+1}(\tilde{\beta}_t)$, тогда $\partial(LA) = \partial_{i+1}(\tilde{\beta}_t) \cup \partial^*(C)$. Имеем в силу следствия 3

$$|A| = |LA| = |\partial_i(\tilde{\beta}_t)| + |C| \leqslant \left(1 - \frac{7}{10(n-t-1)}\right)|\partial_{i+1}(\tilde{\beta}_t)| + |C| =$$

$$= \left(1 - \frac{7}{10(n-t-1)}\right)(N(n-t-1, i-2t) + N(n-t-1, i-2t+1)) + |C| =$$

$$= \left(1 - \frac{7}{10(n-t-1)}\right)N(n-t-1, i-2t+1)+$$

$$+\left(1 - \frac{7}{10(n-t-1)}) \frac{N(n-t-1, i-2t)}{N(n-t-1, i-2t+|C|}\right)(N(n-t-1, i-2t) + |C|).$$

Поскольку $|\partial_i(\tilde{\alpha}_t) \backslash \partial_i(\tilde{\beta}_t)| = |\partial_i(\tilde{\alpha}_t)| - |\partial_i(\tilde{\beta}_t)| = N(n-t-1, i-2t)$, то, $|C| < N(n-t-1, i-2t)$.Из [2] следует, что $|C| \leqslant |\partial^*(C)|$, с учетом этого и теоремы 2 получаем

$$|A| = \left(1 - \frac{7}{10(n-t-1)}\right)N(n-t-1, i-2t+1) + \left(1 - \frac{7}{20(n-t-1)}\right)(N(n-t-1, i-2t) + |C|) \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - \frac{7}{10(n-t-1)}\right)N(n-t-1, i-2t+1) + \left(1 - \frac{7}{20(n-t-1)}\right)(N(n-t-1, i-2t) + |\partial^*(C)|) \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - \frac{7}{20(n-t-1)}\right)|\partial(LA)| \leqslant (1-\delta_1)|\partial(A)|.$$

Лемма доказана полностью.

Доказательство (теоремы 1). Положим $æ = n - (i/2)$, $g = æ^3/\log_2^7 æ$, $\varepsilon_2 = g/|Z|$, $\delta_2 = (\log_2^2 æ)/æ$, $\delta_1 = (\log_2^9 æ)/æ^2$. При достаточно больших n имеем

$$N(n-(i/2)+2,3) = \binom{n-(i/2)+2}{3} + \binom{n-(i/2)+2}{1}\binom{n-(i/2)+2}{1} \geqslant \frac{(n-(i/2))^3}{6} \geqslant g_2.$$

Из следствия 2 при $r = \lfloor i/4 \rfloor - 1$ вытекает, что для всякого $A \subseteq X$ такого, что $|\partial(A)| = g \leqslant g_2$ выполнено неравенство

$$|A| \leqslant |\partial(A)| \frac{3}{n-(i/2)+1} \leqslant |\partial(A)|(1-\delta_2).$$

Следовательно, граф Γ_i^n является $(\varepsilon_2, \delta_2)$ – расширителем.

Далее из леммы 3 следует, что граф Γ_i^n является δ_1 – расширителем.

Проверим выполнение условий (1) и (2). Из [1] следует, что при $0 \leqslant i \geqslant n$ справедливо

$$N(n,i) \leqslant N(n,n) \leqslant \frac{3^n}{\sqrt{n}} \leqslant 2^{4(n-i/2)-2\log_2^2(n-i/2)},$$

следовательно, (1) выполняется при $\triangle = 3$. При $0 \leqslant i \geqslant n$ имеем

$$\min_{v \in F(n,i)} \sigma(v) = n - (i/2) = æ, \max_{v \in F(n,i) \cup F(n,i+1)} \sigma(v) = n \leqslant æ^2,$$

$$\max_{u,v \in F(n,i), v \neq u} |\partial(u) \cap \partial(v)| \leqslant 1,$$

следовательно, (2) выполняется при $p = 2$ и $q = 1$.

Таким образом, граф Γ_i^n является полным $(3, n-(i/2), 1, 2)$ – расширителем.

Теорема 1 доказана.

Заключение

Из метода доказательства теоремы 1 можно сделать *вывод*, что k–значная n–мерная решетка является расширителем при любом $k \succ 3$. Это и послужит предметом для *дальнейших исследований*. Свойство расширительности позволяет воспользоваться методом граничных функционалов (см. [4]– [6]) для нахождения числа антицепей в описанных решетках.

Список литературы

1. Андреева Т. В. О мощности слоев трехзначной n-мерной решетки // Журнал вычислительной математики и математичекой физики, сдано в редакцию.
2. Катериночкина Н. Н Некоторык соотношения для подмножеств слоев n-мерного k-значной решетки // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1984. - Т. 24, № 5. - С. 782-786.
3. Коршунов А. Д. Решение проблемы Дедекинда о числе монотонных булевых функций //Докл. АН СССР. - 1977. - Т. 223, № 4. - С. 543-546.
4. Сапоженко А. А. Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов / в кн. Математические вопросы кибернетики, Вып. 9 - М. : Наука, 2000. - С. 161-220.
5. Сапоженко А. А. О числе антицепей в ранжированных частично упорядоченных множествах / Дискретная математика. - 1989. Т. 1, вып. 1. - С.74-93.
6. Сапоженко А. А. О числе антицепей в многослойных ранжированных частично упорядоченных множествах / Дискретная математика. - 1989. Т. 1, вып. 2. - С. 110-128.
7. Clements G. , Lindstrom B. , A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay // J. Comb. Theory. - Vol. 7, № 2. - P. 230-238.