

## МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ

Д.О. Цветков

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА

### Abstract

The problem on small motions of a viscous fluid, which density in a equilibrium state has stable stratification is investigated on base of a new approach connected with application of so-called operator matrices theory with unbounded entries. Initial boundary value problem is reduced to the Cauchy problem  $\frac{dy}{dt} + Ay + Sy = f(t)$ ,  $y(0) = y^0$ , in some Hilbert space. The theorem on strong solvability of initial boundary value problem was proved by using the fact that operator  $\mathcal{A}$  is maximal uniformly accretive.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, использованием криогенных жидкостей в космической и ракетной техники возрос интерес к изучению динамики волновых движений различных неоднородных, в частности, стратифицированных жидкостей. Этот интерес обусловлен не только практическими потребностями, но и теоретическим содержанием возникающих здесь проблем. Конечно, для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой стратифицированных жидкостей, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей, которые, как правило, оказываются нелинейными, и для полного их исследования эффективны лишь численные методы. Однако в ряде случаев качественное первоначальное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе простых линейных моделей и аналитических методов их исследования. В этом отношении весьма характерны и задачи динамики стратифицированных жидкостей. Даже в рамках линейных моделей их математические постановки весьма своеобразны и приводят к нестандартным начально-краевым задачам. Это определяет наряду с физическими следствиями и самостоятельный математический интерес к этим проблемам.

Не приводя подробной библиографии поданной тематике, упомянем лишь монографию [1] и работы [2, 3], где изучаются те или иные аспекты. К настоящему времени остались недостаточно изученными ряд задач, в частности, задача о малых движениях стратифицированной жидкости во вращающемся сосуде. Таким образом, целью работы является получение теоремы существования сильного (по времени) решения соответствующей начально-краевой задачи.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим вязкую стратифицированную несжимаемую жидкость (с динамическим коэффициентом вязкости  $\mu$ ), частично заполняющую некоторый сосуд и равномерно вращающуюся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. В состоянии относительного равновесия, жидкость занимает область  $\Omega$ , ограниченную твердой стенкой  $S$  и равновесной поверхностью  $\Gamma$ .

Введём систему координат  $Ox_1x_2x_3$ , жестко связанную с сосудом, таким образом, ось  $Ox_3$  совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, от начала координат находится на равновесной поверхности  $\Gamma$ . При этом стационарное распределение плотности жидкости  $\rho_0$  зависит от формы параболоида свободного вращения, то есть является функцией всех координат:  $\rho_0 = \rho_0(x_1, x_2, x_3)$ . Отметим же, что равномерная скорость вращения сосуда запишется в виде  $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_3$ . Будем считать для определенности, что  $\omega_0 > 0$ .

В состоянии равномерного вращения давление в жидкости распределено по закону

$$\nabla P_0(x) = \rho_0(x) \nabla \left( \frac{1}{2} \omega_0^2 (x_1^2 + x_2^2) - gx_3 \right) =: \rho_0(x) \nabla U_0 \quad (\text{в } \Omega). \quad (1)$$

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к равномерному вращению. Обозначим через  $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$  — поле скорости в жидкости,  $p = p(t, x)$  — отклонение поля давлений от равновесного давления (1), а через  $\rho = \rho(t, x)$  — отклонения поля плотности от исходного поля  $\rho_0(x)$ .

Линеализированные уравнения для определения функций  $\vec{u}, p, \rho$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - 2\omega_0(\vec{u} \times \vec{e}_3) &= \rho_0^{-1}(-\nabla p + \rho \nabla U_0 + \mu \Delta \vec{u}) + \vec{f} \quad (\text{в } \Omega), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\vec{f} = \vec{f}(t, x)$  — малое поле внешних или массовых сил.

В дальнейшем будем рассматривать лишь основной случай устойчивой стратификации по плотности:

$$\begin{aligned} 0 < N_{min}^2 \leq N^2(x) \leq N_{max}^2 =: N_0^2 < \infty, \\ N^2(x) &:= \frac{\nabla U_0 \cdot \nabla \rho_0}{\rho_0(x)}, \quad \rho_0(0) > 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $N^2(x)$  — квадрат частоты Вайселя-Брента (частоты плавучести).

На твердой стенке  $S$  для вязкой жидкости должно выполняться условие прилипания

$$\vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S). \quad (4)$$

Кинематические и динамические условия на поверхности  $\Gamma$  удобно записать в криволинейной системе координат  $\tilde{O}\xi^1\xi^2\xi^3$ , в которой уравнение равновесной поверхности  $\Gamma$  имеет вид  $\xi^3 = 0$ , а коэффициент Ламе  $h_3|_\Gamma = 1$ . Тогда, считая, что свободная

движущаяся поверхность  $\Gamma(t)$  описываются уравнениями  $\xi^3 = \zeta(t, \xi^1, \xi^2)$ , приходим к линеаризованному кинематическому условию:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{u} \cdot \vec{n} \quad (\text{на } \Gamma), \quad (5)$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор, нормальный к  $\partial\Omega$  и направленный вне  $\Omega$ .

Динамические условия на  $\Gamma(t)$  состоят в равенстве нулю касательных напряжений и в равенстве нормального напряжения скачку давлений, возникающему вследствие действия центробежных и гравитационных сил. После линеаризации они выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu(u_{i,3} + u_{3,i}) &= 0 \quad (i = 1, 2, \text{ на } \Gamma), \\ -p + 2\mu u_{3,3} &= a\zeta \quad (\text{на } \Gamma), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $a = a(\hat{\xi}) := (\nabla P_0, \vec{n})|_{\Gamma}$ ,  $\hat{\xi} := (\xi^1, \xi^2)$ , а через  $u_{i,k}$  обозначены ковариантные производные ковариантного вектора  $u_i$  по переменной  $\xi^k$ .

В начальный момент времени естественно считать заданными

$$\vec{u}(x, 0) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(x, 0) = \rho^0(x) \quad (x \in \Omega), \quad \zeta(\hat{x}, 0) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma). \quad (7)$$

Таким образом, задача о малых движениях вязкой стратифицированной жидкости в открытом равномерно вращающемся сосуде сводится к решению уравнений (2) при краевых и начальных условиях (4)-(7).

## 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Начально-краевую задачу (2)-(7) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования уравнений (2) на ортогональные подпространства [4]. Свяжем с функцией  $\rho_0 = \rho_0(x)$  гильбертово пространство  $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$  вектор функций со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \rho_0(x) \vec{u}(x) \overline{\vec{v}(x)} d\Omega. \quad (8)$$

**Лемма 1.** *Имеет место, следующее ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0),$$

где

$$\vec{J}_0(\Omega, \rho_0) = \{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \text{div } \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad u_n := \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } \Omega) \},$$

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) = \{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{v} = \rho_0^{-1} \nabla p, \quad \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0 \},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) = \{ \vec{\omega} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{\omega} = \rho_0^{-1} \nabla \varphi, \quad \varphi = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \}.$$

Наряду с введенными пространствами, понадобятся еще гильбертово пространство  $\mathfrak{L}_2(\Omega)$  скалярных функций со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := \int_{\Omega} \rho_0 \frac{N^2(x)}{|\nabla \rho_0|^2} \varphi(x) \overline{\psi(x)} d\Omega$$

и гильбертово пространство  $L_2(\Gamma)$  со скалярным произведением

$$(\eta, \zeta)_0 := \int_{\Gamma} a\eta(\hat{x}) \overline{\zeta(\hat{x})} d\Gamma, \quad \hat{x} \in \Gamma.$$

Предполагаем в дальнейшем, что состояние относительного равновесия вращающейся жидкости в сосуде статически устойчиво по линейному приближению, это условие равносильно тому, что

$$a(\hat{\xi}) \geq a_0 > 0 \quad (\hat{\xi} \in \Gamma.) \tag{9}$$

Введем также пространство  $H_{\Gamma}^1(\Omega, \rho_0)$  скалярных функций  $\{p(x)\}$  таких, что

$$\|p\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega, \rho_0)}^2 = \int_{\Omega} \rho_0^{-1} |\nabla p|^2 d\Omega < \infty, \quad \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0. \tag{10}$$

### 3. ПЕРЕХОД К ОПЕРАТОРНОМУ УРАВНЕНИЮ

Будем считать, что при каждом  $t$  отдельные слагаемые в (2) являются элементами  $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ , тогда

$$\begin{aligned} \vec{u}(t, x) &\in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) = \\ &= \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) \mid \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), u_n = 0 \text{ (на } S)\}, \\ \rho_0^{-1} \nabla p(t, x) &\in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{G}(\Omega, \rho_0) = \\ &= \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) \mid \vec{v} = \rho_0^{-1} \nabla p \text{ (в } \Omega), \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Пусть  $P_{0,S}$  и  $P_{0,\Gamma}$  ортопроекторы на  $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$  и  $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0)$  соответственно. При этом

$$\begin{aligned} P_{0,S} \vec{u}(t, x) &= \vec{u}(t, x), \quad P_{0,S}(\rho_0^{-1} \nabla p) = \rho_0^{-1} \nabla \tilde{p} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \\ P_{0,\Gamma}(\rho_0^{-1} \nabla p) &= \rho_0^{-1} \nabla \varphi \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0). \end{aligned} \tag{12}$$

Применим ортопроекторы  $P_{0,\Gamma}$  и  $P_{0,S}$  к первому уравнению (2), с учетом (12) получим

$$\vec{0} = -\rho_0^{-1} \nabla \varphi + P_{0,\Gamma}(\rho_0^{-1} \rho \nabla U_0) + P_{0,\Gamma}(\rho_0^{-1} \mu \Delta \vec{u}) + P_{0,\Gamma} \vec{f}(t, x), \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - 2\omega_0 P_{0,S}(\vec{u} \times \vec{e}_3) &= -\rho_0^{-1} \nabla \tilde{p} + P_{0,S}(\rho_0^{-1} \rho \nabla U_0) + \\ &+ P_{0,S}(\rho_0^{-1} \mu \Delta \vec{u}) + P_{0,S} \vec{f}(t, x). \end{aligned} \tag{14}$$

Соотношение (13) показывает, что  $\rho_0^{-1}\nabla\varphi(t, x)$  может быть найдено, если известно решение  $(\vec{u}, \rho)$ . Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением соотношения (14), а также условий из (6) с соответствующей заменой  $p \rightarrow \tilde{p}$ , так как

$$p = \tilde{p} + \varphi, \quad \varphi = 0 \text{ (на } \Gamma\text{)}.$$

Обозначим через  $B_0$  оператор, определённый по закону

$$B_0 := P_\Gamma a(\hat{\xi}) P_\Gamma, \quad (15)$$

где  $a(\hat{\xi})$  — заданная на  $\Gamma$  функция (6), а через  $P_\Gamma$  обозначен ортопроектор на  $H_0 = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$ . Так как  $a(\hat{\xi})$  — непрерывная на  $\Gamma$  функция, то  $B_0$  — ограниченный самосопряженный оператор, действующий в  $H_0$ . Кроме того, согласно (9), оператор  $B_0$  положительно определён в  $H_0$ .

**Вспомогательная задача 1.** По заданной функции  $\psi(\hat{x})$ ,  $\hat{x} \in \Gamma$ , найти функцию  $p_1(x)$ ,  $x \in \Omega$ , являющуюся решением задачи

$$\begin{aligned} \rho_0^{-1}(x)\nabla p_1 &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla p_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \\ \rho_0^{-1}(0)p_1 &= \psi := B_0\zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \psi d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Это аналог известной задачи Зарембы. Она имеет единственное решение:  $p_1 \in H_\Gamma^1(\Omega, \rho_0)$  при  $\psi \in H_\Gamma^{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \cap H_0$ , где  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  — пространство Соболева-Слободецкого (см. [5]).

Если  $p_1(x)$  — решение задачи 1 для  $\psi \in H_\Gamma^{\frac{1}{2}}$ , то  $\rho_0^{-1}\nabla p_1(x) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$  и

$$\rho_0^{-1}(x)\nabla p_1(x) = G\psi = GB_0\zeta, \quad (16)$$

где  $G : H_\Gamma^{\frac{1}{2}} \rightarrow \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$  есть линейный ограниченный оператор (см. [4]).

**Вспомогательная задача 2.** По заданной функции  $\vec{f}_1$  найти функции  $\vec{u}(x)$  и  $p_2(x)$ , являющиеся решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \rho_0^{-1}\nabla p_2 - P_{0,S}(\rho_0^{-1}\mu\Delta\vec{u}) &= \vec{f}_1, \quad \text{div } \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \\ \mu(u_{i,3} + u_{3,i}) &= 0 \quad (i = 1, 2, \text{ на } \Gamma,) \quad -p_2 + 2\mu u_{3,3} = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \end{aligned}$$

Известно (см. [3]), что эта задача имеет единственное обобщенное решение

$$\vec{u} = \mu^{-1}A^{-1}\vec{f}_1$$

для правой части из  $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ , где  $A$  — оператор задачи 2, При этом оператор  $A$  есть неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор.

С учетом вышесказанного вернемся к начально-краевой задаче (2)-(7), точнее, после отделения тривиального решения (13), к соответствующей начально-краевой задаче для уравнения (14). Представим  $\rho_0^{-1}\nabla\tilde{p} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$  в виде

$$\rho_0^{-1}\nabla\tilde{p} = \rho_0^{-1}\nabla p_1 + \rho_0^{-1}\nabla p_2, \quad \rho_0^{-1}\nabla p_i \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \quad (i = 1, 2) \quad (17)$$

И пусть  $p_1$  есть решение вспомогательной задачи 1 для  $\psi = B_0\zeta$ , а  $p_2$  — функция из вспомогательной задачи 2.

**Теорема 1.** *Классическое решение начально-краевой задачи (2)-(7) есть решение задачи Коши для системы дифференциальных операторных уравнений:*

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dt} + 2i\omega_0 S_0 \vec{u} + GB_0\zeta + \mu A\vec{u} + C\rho = P_{0,S}\vec{f} =: \vec{f}_{0,S}, & \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \\ \frac{d\zeta}{dt} - \gamma_n \vec{u} = 0, & \zeta(0) = \zeta^0, \\ \frac{d\rho}{dt} - C^* \vec{u} = 0, & \rho(0) = \rho^0, \end{cases} \quad (18)$$

и уравнения (13). Здесь  $A$  есть оператор задачи 2,  $G$  оператор, связанный с задачей 1,  $\gamma_n$  оператор следа:  $\gamma_n \vec{u} := u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}|_\Gamma$  ( $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0)$ ),  $C^* \vec{u} := -\nabla \rho_0 \cdot \vec{u}$ ,  $C\rho := -P_{0,S}(\rho_0^{-1} \rho \nabla U_0)$ ,  $S_0 \vec{u} := iP_{0,S}(\vec{u} \times \vec{e}_3)$ , а  $\vec{u}$ ,  $\zeta$  и  $\rho$ , считаются функциями  $t$  со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах.

**Лемма 2.** а) Оператор  $\gamma_n$ , может быть расширен до оператора  $\tilde{\gamma}_n$  с областью определения  $D(\tilde{\gamma}_n) = \{\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) : \tilde{\gamma}_n \vec{v} \in H_0\}$ , в этом случае оператор  $\tilde{\gamma}_n$  есть оператор, сопряженный к оператору  $G : \tilde{\gamma}_n = G^*$ .

б) Для операторов  $A$  и  $\tilde{\gamma}_n$  следующие включения имеют место:

$$D(A) \subset D(A^{\frac{1}{2}}) = \vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0) \subset D(\tilde{\gamma}_n).$$

в) Операторы  $C : \mathfrak{L}_2(\Omega) \rightarrow \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$  и  $C^* : \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \rightarrow \mathfrak{L}_2(\Omega)$  взаимно сопряжены и

$$\|C\| = \|C^*\| \leq N_0.$$

г) Оператор  $S_0$  обладает следующими свойствами:  $S_0 = S_0^*$ ,  $\|S_0\| = 1$ .

С целью получения более симметричного вида операторной матрицы, отвечающей задаче (2)-(7), введен еще в (18) замену  $B_0^{\frac{1}{2}}\zeta = \hat{\zeta}$  и применим (положительно определенный и ограниченный) оператор  $B_0^{\frac{1}{2}}$  к обеим частям второго уравнения системы (18). В новых переменных будем иметь:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \hat{\zeta} \\ \rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu A + 2i\omega_0 S_0 & GB_0^{\frac{1}{2}} & C \\ -B_0^{\frac{1}{2}} G^* & 0 & 0 \\ -C^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \hat{\zeta} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{0,S} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\left( \vec{u}(0); \hat{\zeta}(0); \rho(0) \right)^t = \left( \vec{u}^0; B_0^{\frac{1}{2}} \zeta^0; \rho^0 \right)^t.$$

**Определение 1.** Функции  $\vec{u}(t, x)$ ,  $\zeta(t, \hat{x})$ ,  $\rho(t, x)$  и  $p(t, x)$  назовем сильным решением задачи (2)-(7), если выполнено (13) и  $\{\vec{u}; \hat{\zeta}; \rho\}$  есть сильное решение задачи (19) в пространстве  $\mathcal{H} := \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \oplus H_0 \oplus \mathfrak{L}_2$ . Это значит, что для всех  $t \geq 0$  функции  $\vec{u} = \vec{u}(t) \in \mathcal{D}(A)$ ,  $B_0^{\frac{1}{2}} \hat{\zeta}(t) \in \mathcal{D}(G)$ ,  $\rho = \rho(t) \in \mathfrak{L}_2(\Omega)$  и функции

$\frac{d\vec{u}}{dt}, \frac{d\hat{\zeta}}{dt}, \frac{d\rho}{dt}, \mathcal{A}\vec{u}(t), S_0\vec{u}, GB_0^{\frac{1}{2}}\hat{\zeta}(t), C\rho(t), B_0^{\frac{1}{2}}G^*\vec{u}(t), C^*\vec{u}(t)$  есть непрерывные по  $t$ , кроме того, уравнение и начальное условие (19) выполнены.

Для удобства, рассмотрим задачу (19) при  $\mu = 1$ . Свяжем с ней оператор-матрицу

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} A & GB_0^{\frac{1}{2}} & C \\ -B_0^{\frac{1}{2}}G^* & 0 & 0 \\ -C^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

которая имеет плотную в  $\mathcal{H} = \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \oplus H_0 \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega)$  область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(GB_0^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega). \quad (21)$$

**Лемма 3.** Оператор  $\mathcal{A}_0$  с областью определения (21) есть аккретивный оператор, то есть для любых  $(\vec{u}; \hat{\zeta}; \rho)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$  выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} \left( \mathcal{A}_0 \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \hat{\zeta} \\ \rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \hat{\zeta} \\ \rho \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} = (A\vec{u}, \vec{u}) \geq 0. \quad (22)$$

Отметим, что оператор  $\mathcal{A}_0$  не является максимальным аккретивным оператором. Для перехода к максимальному аккретивному оператору представим  $(\vec{u}; \hat{\zeta}; \rho)^t = e^{at}(\vec{v}; \eta; \sigma)^t$ ,  $a > 0$ , и, подставляя в (19), получим следующую задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0 y + \mathcal{S}y = f(t), \quad y(0) = y^0, \quad (23)$$

где

$$y(t) = (\vec{v}(t); \eta(t); \sigma(t))^t, \quad f(t) = (\vec{f}_{0,S}(t); 0; 0)^t e^{-at}, \quad \mathcal{S} := \operatorname{diag}(2i\omega_0 S_0; 0; 0),$$

$$\mathcal{A}_a := \mathcal{A}_0 + a\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A_a & GB_0^{\frac{1}{2}} & C \\ -B_0^{\frac{1}{2}}G^* & aI & 0 \\ -C^* & 0 & aI \end{pmatrix}, \quad A_a = A + aI,$$

$\mathcal{I}$  — единичный оператор в  $\mathcal{H}$ .

Обозначим

$$Q_1 := B_0^{\frac{1}{2}}G^*A_a^{-\frac{1}{2}}, \quad Q_1^+ := A_a^{-\frac{1}{2}}GB_0^{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{D}(Q_1^+) = \mathcal{D}(GB_0^{\frac{1}{2}}) = B_0^{-\frac{1}{2}}\mathcal{D}(G). \quad (24)$$

**Лемма 4.**  $Q_1^+ \subset Q_1^*$ ,  $Q_1^+ = Q_1^*|_{\mathcal{D}(GB_0^{\frac{1}{2}})}$ ,  $\overline{Q_1^+} = Q_1^*$ .

Поскольку всякий аккретивный оператор допускает расширение до максимального аккретивного оператора, то дальнейшее исследование задачи (23) основывается на расширении оператора  $\mathcal{A}_a$  до максимального аккретивного оператора.

**Лемма 5.** Замыкание  $\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_a}$  оператора  $\mathcal{A}_a$  есть равномерный максимальный аккретивный оператор. При этом

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{y = (\vec{v}; \eta; \sigma)^t \in \mathcal{H} | \vec{v} + A_a^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \eta \in D(A_a)\}, \quad (25)$$

и справедливы следующие факторизации,

а) в виде Шура-Фробениуса

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -Q_1 A_a^{-\frac{1}{2}} & I_\Gamma & 0 \\ -Q_2 A_a^{-\frac{1}{2}} & 0 & I_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_1 & Q_1 Q_2^* \\ 0 & Q_2 Q_1^* & \mathcal{W}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_a^{-\frac{1}{2}} Q_1^* & A_a^{-\frac{1}{2}} Q_2^* \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ T_1 & I_\Gamma & 0 \\ T_2 & 0 & I_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_1 & Q_1 Q_2^* \\ 0 & Q_2 Q_1^* & \mathcal{W}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T_3 & T_4 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \\ T_1 &:= -Q_1 A_a^{-\frac{1}{2}}, \quad T_2 := -Q_2 A_a^{-\frac{1}{2}}, \quad T_3 := A_a^{-\frac{1}{2}} Q_1^*, \quad T_4 := A_a^{-\frac{1}{2}} Q_2^*, \\ \mathcal{W}_1 &:= a I_\Gamma + Q_1 Q_1^*, \quad \mathcal{W}_2 := a I_{\mathcal{L}_2(\Omega)} + Q_2 Q_2^* \end{aligned} \quad (26)$$

б) с симметрическим окаймлением

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} A_a^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & Q_1^* & Q_2^* \\ -Q_1 & a I_\Gamma & 0 \\ -Q_2 & 0 & a I_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_a^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix}, \\ Q_2 &:= C^* A_a^{-\frac{1}{2}}, \quad Q_2^* = A_a^{-\frac{1}{2}} C. \end{aligned} \quad (27)$$

Доказательство аналогично приведенному в [6].

#### 4. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вместо задачи (23) рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y + Sy = f(t), \quad y(0) = y^0. \quad (28)$$

Используя факторизацию Шура-Фробениуса для оператора  $\mathcal{A}$ , осуществим замену

$$\begin{pmatrix} I & T_3 & T_4 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \eta \\ \sigma \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \eta_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

и применим к (28) слева оператор

$$\begin{pmatrix} I & T_3 & T_4 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix}.$$



В результате приходим к следующей задаче:

$$\frac{dz}{dt} + (\mathcal{I} + \mathcal{T})\mathcal{A}_\omega z + \tilde{\mathcal{S}}z = f(t), \quad z(0) = z^0, \quad z := (\vec{v}_1; \eta_1; \sigma_1)^t, \quad (30)$$

где

$$\mathcal{I} + \mathcal{T} := \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_3 T_1 + T_4 T_2 & T_3 & T_4 \\ T_1 & 0 & 0 \\ T_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_\omega := \begin{pmatrix} A_b & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_1 & Q_1 Q_2^* \\ 0 & Q_2 Q_1^* & \mathcal{W}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{S}} := \begin{pmatrix} S & -ST_3 & -ST_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом оператор  $\mathcal{T}$  — компактный,  $\tilde{\mathcal{S}}$  — ограниченный, оператор  $\mathcal{A}_\omega$  есть самосопряженный положительно определенный, имеющий компактный обратный оператор  $\mathcal{A}_\omega^{-1}$ .

Так как для оператора  $(-\mathcal{A}_\omega)$  уравнение

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_\omega z = 0, \quad z = (\vec{v}_1; \zeta_1; \sigma_1)^t, \quad (31)$$

является абстрактным параболическим (см. [7], с. 104, с. 121) и соответствующая полугруппа аналитична и секторе, содержащем положительную полуось, то (см. [7], с. 183) уравнение

$$\frac{dz}{dt} + \left( \mathcal{I} + (\mathcal{T} + \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{A}_\omega^{-1}) \right) \mathcal{A}_\omega z = 0, \quad (32)$$

где оператор  $\mathcal{T} + \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{A}_\omega^{-1}$  компактный, будет также абстрактным параболическим (см. [7], с. 181). Соответствующая полугруппа аналитична в секторе, содержащем положительную полуось.

Таким образом, если в уравнении

$$\frac{dz}{dt} + \left( \mathcal{I} + (\mathcal{T} + \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{A}_\omega^{-1}) \right) \mathcal{A}_\omega z = f(t) \quad (33)$$

функция  $f$  удовлетворяет условию Гельдера, т.е. для каждого  $\tau \in \mathbb{R}^+$  найдутся такие числа  $K = K(\tau) > 0$ ,  $\gamma = \gamma(\tau) \in (0, 1]$ , что

$$\|f(t) - f(s)\| \leq K|t - s|^\gamma \text{ при } 0 \leq s, t \leq \tau,$$

тогда, с учетом (29) и возможности перейти от (28) к уравнению, отвечающему не замкнутому оператору  $\mathcal{A}$ , а его сужению  $\mathcal{A}_a$  (см. [6]); задача (23) (см. [8], с. 130) имеет единственное сильное решение на промежутке  $[0, T]$ . Сформулируем полученный результат.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия

$$\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A), \quad B_0^{\frac{1}{2}} \zeta^0 \in \mathcal{D}(G) = H_\Gamma^{\frac{1}{2}}, \quad \rho^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega), \quad (34)$$

$$\vec{f}(t) \in C^\gamma \left( [0, T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) \right), \quad \gamma \in (0, 1],$$

для задачи Коши (23). Тогда она имеет сильное единственное решение на промежутке  $[0, T]$ .

Как следствие теоремы 2 имеем следующий результат.

**Теорема 3.** *Если выполнены условия (34), то задача (2)-(7) имеет единственное сильное (в смысле определения 1) решение на промежутке  $[0, T]$ .*

Доказательство теоремы основывается на переходе от задачи (23) с обратной заменой к задаче (19).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

*В данной работе сформулирована и качественно исследована задача о малых, движениях стратифицированной жидкости во вращающемся сосуде. Основным новым результатом является теорема о существовании и единственности сильного решения изучаемой начально-краевой задачи, (теорема 3).*

Автор благодарит Н.Д. Копачевского за постановку задачи, внимание к работе и полезные дискуссии.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. - М.: Наука, 1990. - 344 с.
2. Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости, частично заполняющей сосуд. - Труды МВГУ. - 1984. - № 406. - с.43-56.
3. Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. Свободные колебания вязкой стратифицированной жидкости в сосуде. - Ден. в ВИНТИ 16.03.33, № 4531 - 83 ДЕП. - 43 с.
4. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. - М.: Наука, 1989. - 416 с.
5. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. - М.: Наука, 1977. - 455 с.
6. Цветков Д.О. Малые движения стратифицированной жидкости. // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И.Вернадского. Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. - 2002. - Т.15(54), № 2. - с.99-104.
7. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1967. - 464 с.
8. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. - К.: Вища школа, 1989. - 347 с.