УДК 514.7

ТОЖДЕСТВО КАПЕЛЛИ ДЛЯ ДУАЛЬНЫХ ФОРМ

А. М. Сухтаева

Крымский Государственный Инженерно-Педагогический Университет.
ул. Севастопольская, 21, г. Симферополь, 95015, Украина

Abstract
The present article deals with capelli's identity for dual form. In this article the identity is proved.

Введение

Произвольная система сил, действующих на тело или произвольные перемещения твердого тела могут быть выражены винтами — особыми дуальными векторами $r + \omega r^{(1)}$, где $\omega^2 = 0$. Преобразования винтов осуществляется с помощью матриц с дуальными элементами $A_{ik} = a_{ik} + \omega a_{ik}$, где $\omega^2 = 0$ [1]. Это определило необходимость *подстановки следующей проблемы*

Изучить целый рациональный базис инвариантов систем винтов относительно действия такой группы матриц.

Анализ последних достижений и публикаций, посвященный этой проблеме [3], [4], [5], позволяет сделать вывод, что в настоящее время целый рациональный базис инвариантов систем винтов относительно действия матриц с дуальными элементами не изучался. Однако для того, чтобы подойти к этой проблеме необходимо доказательство такого мощного формального инструмента как тождество Капелли [2].

Нерешенными являются, например такие *вопросы* как определение понятия поляризованного полинома от дуальных переменных с дуальными коэффициентами, изучение свойств такой поляризации и доказательство тождества Капелли.

Таким образом, *целями работы являются:*

а) изучение свойств поляризации для случая полиномов от дуальных переменных с дуальными коэффициентами;

б) доказательство тождества Капелли.

1. Вспомогательные факты и результаты

В теории векторных инвариантов классических групп используется понятие поляризации. Пусть $f((x))$ - форма степени r (под записью (x) будем понимать n-мерный переменный вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)).(x)$ и $(y) - n$-мерные переменные векторы. Тогда полином имеющий вид:

$$D_{yx}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}y_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}y_n \qquad (1)$$

называется поляризованным полиномом от f или первой частичной поляризацией f поляризация обладает следующими свойствами:

1. $D(f+q) = Df + Dq$
2. $D(\alpha f) = \alpha Df \qquad (\alpha - const)$
3. $D(fq) = (Df)q + f(Dq)$

Применение поляризации позволяет провести редукцию первой основной проблемы теории векторных инвариантов от случая m векторных аргументов $(X)^1, (X)^2, \ldots, (X)^m$ в n мерном векторном пространстве $V(m>n)$ к случаю n векторных аргументов $(X)^1, (X)^2, \ldots, (X)^n$. При этом используются следующие свойства поляризации:

а) поляризация переводит абсолютный или относительный инвариант $f((X)^1, (X)^2, \ldots, (X)^m)$ в инвариант $D_{(x)^\alpha (x)^\beta} f$ с тем же мультипликатором.

б) $D_{yx} f((x))_{y=x} = r \cdot f((x))$.

в) (Тождество Капелли).

Обозначим $D_{(x)^\alpha (x)^\beta} f$ через $D_{\alpha\beta} f$, тогда:

$$\begin{vmatrix} D_{mm}+(m+1) & \ldots & \ldots & D_{m2} & D_{m1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{2m} & \ldots & \ldots & D_{22}+1 & D_{21} \\ D_{1m} & \ldots & \ldots & D_{12} & D_{11} \end{vmatrix} f = \begin{cases} 0, & \text{при } m>n \\ [(x)^1(x)^2\ldots(x)^n]\cdot\Omega f, & \text{при } m=n, \end{cases}$$

где $[(x)^1(x)^2\ldots(x)^n]$ — компонентный определитель,

$$\Omega f = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1^1} & \frac{\partial}{\partial x_2^1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n^1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1^2} & \frac{\partial}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial}{\partial x_1^n} & \frac{\partial}{\partial x_2^n} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n^n} \end{vmatrix} f \tag{2}$$

Поляризация дуальных форм.

Пусть $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, $D = \{a+\omega b : a, b \in \mathbb{R}, \omega^2 = 0\}$ — кольцо дуальных чисел над $\mathbb{R}$.

Обозначим кольцо полиномов над D через $F(D)$. Если $X = x + \omega x^{(1)}$ — дуальная переменная, то полином $F(X)$ с дуальными коэффициентами имеет

$$F(X) = \sum_{i=1}^{K} (\alpha_i + \omega\alpha^{(1)})(x+\omega x^{(1)})^i = \sum_{i-1}^{K} \alpha_i x^i + \omega \sum_{i=1}^{K} \alpha_i^{(1)} x^i + \omega \sum_{i=1}^{K} \alpha_i i x^{i-1} x^{(1)} \tag{3}$$

Аналогично, если $X_i = x_i + \omega x_i^{(1)}|_{i=\overline{1,l}}$ — дуальные переменные, то полином от l дуальных переменных имеет развернутый вид:

$$F(X_1, X_2, \dots X_l) = \sum_{r_1+r_2+\dots+r_l=r} (\alpha_{r_1\dots r_l} + \omega\alpha^{(1)}_{r_1\dots r_l})(x_1 + \omega x_1^{(1)})^{r_1} \times \dots \times$$

$$\times(x_l + \omega x_l^{(1)})^{r_l} = \sum \alpha_{r_1\dots r_l} x_1^{r_1} \dots x_l^{r_l} + \omega \sum \alpha^{(1)}_{r_1\dots r_l} x_1^{r_1} \dots x_l^{r_l} + \omega \sum \alpha_{r_1\dots r_l} \sum_{j=1}^{l} r_j \times$$

$$\times x_1^{r_1} \dots x_j^{r_{j-1}} x_j^{(1)} x_{j+1}^{r_{j+1}} \dots x_l^{r_l} \quad (4)$$

Определим поляризованный полином $D_{TX}((X))$ от $F((X))$ следующим образом:

$$D_{TX}F((X)) = \sum(\alpha_{r_1\dots r_l} + \omega\alpha^{(1)}_{r_1\dots r_l}) D_{tx}\{x_1^{r_1} \dots x_l^{r_l}\}+$$

$$+\omega \sum \alpha_{r_1\dots r_l} \sum_{j=1}^{l} r_j D_{\widetilde{T}\widetilde{X}}\{x_1^{r_1} \dots x_j^{r_{j-1}} x_j^{(1)} \dots x_l^{r_l}\}, \quad (5)$$

где $X = (x_1 + \omega x_1^{(1)}, \dots, x_l + \omega x_l^{(1)}), T = (t_1 + \omega t_1^{(1)}, \dots, t_l + \omega t_l^{(1)})$.
$x = (x_1, x_2, \dots, x_l), t = (t_1, t_2, \dots, t_l)$.
$\widetilde{X} = (x_1, x_2, \dots, x_l, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_l^{(1)})$,
$\widetilde{T} = (t_1, t_2, \dots, t_l, t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots, t_l^{(1)})$.

Поляризация $D_{\widetilde{T}\widetilde{X}}$ есть обычная поляризация,примененная к форме от $2n$ переменных. Нетрудно убедится, что таким образом определенная поляризация обладает свойством б).

$$\{D_{TX}F((X))\}_T = X = rF((X)), \quad (6)$$

где $r = \sum_{i=1}^{l} r_i$.

Покажем, что она удовлетворяет также свойству а). Пусть G — подгруппа D-линейных преобразований модуля D^n, $F((X, Y, \dots, Z))$ — дуальная форма степени r, инвариантная относительно обычного действия группы G. Пусть Φ : X $\to$ ΦX — невырожденное D-линейное преобразование, $A\|\alpha_{ij} + \omega\alpha_{ij}^{(1)}\|_{i,j=1}^{n}$ — матрица этого преобразования.

$X, Y, \dots, Z$ — n-мерные дуальные вектора. Произвольная форма F степени r от этих векторов имеет вид:

$$F((X, Y, \dots Z)) = \sum(\alpha_{r_1\dots r_l} + \omega\alpha^{(1)}_{r_1\dots r_l})\{x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} y_1^{s_1} \dots y_n^{s_n} z_1^{l_1} \dots z_n^{l_n} + \omega[\sum_{j=1}^{n} r_j x_1^{r_1} \dots x_j^{r_j - 1} \times$$

$$\times x_j^{(1)} \dots x_n^{r_n} y_1^{s_1} \dots y_n^{s_n} z_1^{l_1} \dots z_n^{l_n} + \sum_{j=1}^{n} s_j x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} y_1^{s_1} \dots y_j^{s_j - 1} y_j^{(1)} \dots z_1^{l_1} \dots z_n^{l_n} + \dots +$$

$$\sum_{j=1}^{n} l_j x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} y_1^{s_1} \dots y_n^{s_n} z_1^{l_1} \dots z_j^{l_j - 1} z_j^{(1)} \dots z_n^{l_n}]\},$$

где $(r)r_1r_2\dots r_n, (s) = s_1s_2\dots s_n, (l) = l_1l_2\dots l_n$.

Если $F((X,Y,\dots,Z))$ — инвариантная форма относительно действия группы G, то имеет место равенство:

$$F((AX,AY,\dots,AZ)) = F((X,Y,\dots,Z)) \tag{7}$$

Применим к форме F поляризацию:

$$D_{TX}((AX,AY,\dots,AZ)) = D_{TX}\{\sum(\alpha_{r(1)\dots r(l)} + \omega\alpha^{(1)}_{r(1)\dots r(l)})[(\sum\alpha_{li}x_i)^{r_1}\times\dots\times$$
$$\times(\sum\alpha_{ni}x_i)^{r_n}(\sum\alpha_{li}y_i)^{s_1}\dots(\sum\alpha_{ni}y_i)^{s_n}(\sum\alpha_{li}z_i)^{l_1}\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}\dots+\omega\sum_{j=1}^{n}r_j\times$$
$$(\sum\alpha_{li}x_i)^{r_1}\dots(\sum\alpha_{ji}x_i)^{r_j-1}\dots(\sum\alpha_{ji}x_i^{(1)}+\sum\alpha_{ji}^{(1)}x_i)\dots(\sum\alpha_{ni}x_i)^{r_n}\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+$$
$$+\omega\sum_{j=1}^{n}s_j(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\dots(\sum\alpha_{ni}x_i)^{r_n}(\sum\alpha_{1i}y_i)^{s_1}\dots(\sum\alpha_{ji}y_i)^{s_j-1}(\sum\alpha_{ji}y_i^{(1)}+$$
$$+\sum\alpha_{ji}^{(1)}y_i)\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}\dots+\omega\sum_{j=1}^{n}l_j(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\dots(\sum\alpha_{ji}z_i)^{l_j-1}(\sum\alpha_{ji}z_i^{(1)}+$$
$$+\sum\alpha_{ji}^{(1)}z_i)\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}]\} = \sum(\alpha_{r(1)\dots r(l)}+\omega\alpha^{(1)}_{r(1)\dots r(l)})[r_1(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1-1}(\sum\alpha_{1i}t_i)\times$$
$$\times(\sum\alpha_{2i}x_i)^{r_2}\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+r_2(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}(\sum\alpha_{2i}x_i)^{r_2-1}(\sum\alpha_{2i}t_i)\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+\dots+$$
$$+r_n(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\dots(\sum\alpha_{ni}x_i)^{r_n-1}(\sum\alpha_{ni}t_i)\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}]+\omega\sum r_j[r_1(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1-1}\times$$
$$\times(\sum\alpha_{1i}t_i)(\sum\alpha_{2i}x_i)^{r_2}\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+r_2(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}(\sum\alpha_{2i}x_i)^{r_2-1}(\sum\alpha_{2i}t_i)\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+$$
$$+(r_j-1)[(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\dots(\sum\alpha_{ji}x_i)^{r_j-2}(\sum\alpha_{ji}t_i)(\sum\alpha_{ji}x_i^{(1)}+\sum\alpha_{ji}^{(1)}x_i)\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+\dots+$$
$$(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\dots(\sum\alpha_{ji}x_i)^{r_j-1}(\sum\alpha_{ji}t_i^{(1)}+\sum\alpha_{ji}^{(1)}t_i)\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}]+\dots+r_n(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\times$$
$$\times\dots\times(\sum\alpha_{ni}x_i)^{r_n-1}(\sum\alpha_{ni}t_i)\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}]+\omega\sum s_j[r_1(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1-1}(\sum\alpha_{1i}t_i)\times$$
$$\times(\sum\alpha_{2i}x_i)^{r_2}\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+r_2(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}(\sum\alpha_{2i}x_i)^{r_2-1}(\sum\alpha_{2i}t_i)\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+\dots+$$
$$+r_n(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\dots(\sum\alpha_{ni}x_i)^{r_n-1}(\sum\alpha_{ni}t_i)\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}]+\dots+\omega\sum l_j[r_1(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1-1}\times$$
$$\times(\sum\alpha_{1i}t_i)(\sum\alpha_{2i}x_i)^{r_2}\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+r_2(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}(\sum\alpha_{2i}x_i)^{r_2-1}(\sum\alpha_{2i}t_i)\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+$$
$$+\dots+r_n(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\dots(\sum\alpha_{ni}x_i)^{r_n-1}(\sum\alpha_{ni}t_i)\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}]] =$$
$$= r_1[\sum(\alpha_{r(1)\dots r(l)}+\omega\alpha^{(1)}_{r(1)\dots r(l)})[(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1-1}(\sum\alpha_{1i}t_i)(\sum\alpha_{2i}x_i)^{r_2}\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+$$
$$+\sum r_j[(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1-1}(\sum\alpha_{1i}t_i)(\sum\alpha_{2i}x_i)^{r_2}\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+\omega\sum s_j(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1-1}\times$$
$$\times(\sum\alpha_{1i}t_i)(\sum\alpha_{2i}x_i)^{r_2}\dots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+\dots+\omega\sum l_j(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1-1}(\sum\alpha_{1i}t_i)(\sum\alpha_{2i}x_i)^{r_2}\times$$

$$\times\ldots\times(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}]]+\ldots+(r_j-1)[\sum(\alpha_{r(1)\ldots r(l)}+\omega\alpha^{(1)}_{r(1)\ldots r(l)})[(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\ldots(\sum\alpha_{ji}x_i)^{r_j-2}\times$$
$$\times(\sum\alpha_{ji}t_i)(\sum\alpha_{ji}x^{(1)}_i+\sum\alpha^{(1)}_{ji}x_i)\ldots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+\sum r_j(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\ldots(\sum\alpha_{ji}x_i)^{r_j-1}\times$$
$$\times(\sum\alpha_{ji}t^{(1)}_i+\sum\alpha^{(1)}_{ji}t_i)\ldots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+\omega\sum s_j(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\ldots(\sum\alpha_{ji}x_i)^{r_j-1}(\sum\alpha_{ji}t_i)\times$$
$$\times\ldots\times(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+\ldots+\omega\sum l_j(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\ldots(\sum\alpha_{ji}x_i)^{r_j-1}(\sum\alpha_{ji}t_i)\ldots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}]+\ldots+$$
$$+r_n[\sum(\alpha_{r(1)\ldots r(l)}+\omega\alpha^{(1)}_{r(1)\ldots r(l)})[(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\ldots(\sum\alpha_{ni}x_i)^{r_n-1}(\sum\alpha_{ni}t_i)\ldots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+$$
$$+\omega\sum s_j(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\ldots(\sum\alpha_{ni}x_i)^{r_n-1}(\sum\alpha_{ni}t_i)\ldots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}+\omega\sum l_j(\sum\alpha_{1i}x_i)^{r_1}\times\ldots\times$$
$$\times(\sum\alpha_{ni}x_i)^{r_n-1}(\sum\alpha_{ni}t_i)\ldots(\sum\alpha_{ni}z_i)^{l_n}] \quad (8)$$

Используя, что F инвариантная форма получим, что правая часть (9) будет следующей:

$$r_1\sum(\alpha_{r(1)\ldots r(l)}+\omega\alpha^{(1)}_{r(1)\ldots r(l)})[x_1^{r_1-1}t_1\ldots z_n^{l_n}+\sum r_jx_1^{r_1-1}t_1\ldots z_n^{l_n}+\omega\sum s_jx_1^{r_1-1}t_1\ldots z_n^{l_n}+\ldots+$$
$$\omega\sum l_jx_1^{r_1-1}t_1\ldots z_n^{l_n}]+\ldots+(r_j-1)\sum(\alpha_{r(1)\ldots r(l)}+\omega\alpha^{(1)}_{r(1)\ldots r(l)})[x_1^{r_1}\ldots x_j^{r_j-2}t_jx_j^{(1)}\ldots z_n^{l_n}+$$
$$+\sum r_jx_1^{r_1}\ldots x_j^{r_j-1}(t_j+t_j^{(1)})\ldots z_n^{l_n}+\omega\sum s_jx_1^{r_1}\ldots x_j^{r_j-1}t_j\ldots z_n^{l_n}+\omega\sum l_jx_1^{r_1}\ldots x_j^{r_j-1}t_j\ldots z_n^{l_n}]+\ldots+$$
$$+r_n[\sum(\alpha_{r(1)\ldots r(l)}+\omega\alpha^{(1)}_{r(1)\ldots r(l)})[x_1^{r_1}\ldots x_n^{r_n-1}t_n\ldots z_n^{l_n}+$$
$$+\omega\sum s_jx_1^{r_1}\ldots x_n^{r_n-1}t_n\ldots z_n^{l_n}+\omega\sum l_jx_1^{r_1}\ldots x_n^{r_n-1}t_n\ldots z_n^{l_n}]]=D_{TX}F((X,Y,\ldots,Z)) \quad (9)$$

Что и требовалось доказать.

2. Основная теорема.

Теорема. *(Тождество Капелли)*

$$\begin{vmatrix} D_{mn}+(m-1) & \ldots & \ldots & D_{m2} & D_{m1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ D_{2m} & \ldots & \ldots & D_{22}+1 & D_{21}\\ D_{1m} & \ldots & \ldots & D_{12} & D_{11}\end{vmatrix} F((X^1,X^2,\ldots,X^n))=$$
$$=\begin{cases}0, & \textit{при } m>n\\ [X^1,X^2,\ldots,X^n], & \textit{при } m=n\end{cases}$$

Здесь X^i — это i-ый n-мерный дуальный вектор.

Доказательство. Рассмотрим следующий операторный определитель, составленный из введенных дуальных поляризаций, примененных к дуальной форме $F((X,Y,\ldots,Z))$

$$\begin{vmatrix} D_{mm}+(m-1) & \dots & \dots & D_{m2} & D_{m1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ D_{2m} & \dots & \dots & D_{22}+1 & D_{21}\\ D_{1m} & \dots & \dots & D_{12} & D_{11}\end{vmatrix} F((X,Y,\dots,Z)) =$$

$$= \begin{vmatrix} D_{mm}+(m-1) & \dots & \dots & D_{m2} & D_{m1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ D_{2m} & \dots & \dots & D_{22}+1 & D_{21}\\ D_{1m} & \dots & \dots & D_{12} & D_{11}\end{vmatrix} \sum(\alpha_{r_{(1)}\dots r_{(l)}} + \omega\alpha^{(1)}_{r_{(1)}\dots r_{(l)}})\times$$

$$\times\{x_1^{r_1}\dots x_n^{r_n}\dots x_n^{l_n} + \omega[\sum r_j x_1^{r_1}\dots x_1^{r_j-1}x_j^{(1)}\dots z_n^{l_n} + \dots + \sum l_j x_1^{r_1}\dots z_1^{r_j-1}z_j^{(1)}\dots z_n^{l_n}]\} =$$

$$\begin{vmatrix} \overline{D_{mm}}+(m-1) & \dots & \dots & \overline{D_{m2}} & \overline{D_{m1}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \overline{D_{2m}} & \dots & \dots & \overline{D_{22}}+1 & \overline{D_{21}}\\ \overline{D_{1m}} & \dots & \dots & \overline{D_{12}} & \overline{D_{11}}\end{vmatrix} (\sum(\alpha_{r(1)\dots r(l)} + \omega\alpha^{(1)}_{r(1)\dots r(l)})x_1^{r_1}\dots x_n^{r_n}\dots z_n^{l_n})+$$

$$+\begin{vmatrix} \overline{\overline{D_{mm}}}+(m-1) & \dots & \dots & \overline{\overline{D_{m2}}} & \overline{\overline{D_{m1}}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \overline{\overline{D_{2m}}} & \dots & \dots & \overline{\overline{D_{22}}}+1 & \overline{\overline{D_{21}}}\\ \overline{\overline{D_{1m}}} & \dots & \dots & \overline{\overline{D_{12}}} & \overline{\overline{D_{11}}}\end{vmatrix} (\sum r_j x_1^{r_1}\dots x_1^{r_j-1}x_j^{(1)}\dots z_n^{l_n} + \dots +$$

$$+\sum l_j x_1^{r_1}\dots z_1^{z_j-1}z_j^{(1)}\dots z_n^{l_n} \quad (10)$$

Здесь $\overline{D}$ — обычная поляризация на векторах $x, y, \dots, z.\overline{\overline{D}}$ — поляризация на $2n$ векторах $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \dots, \widetilde{Z}$. Поэтому слагаемые правой части тождества (11) будут равны следующим выражениям.

$$\begin{vmatrix} \overline{D_{mm}}+(m-1) & \dots & \dots & \overline{D_{m2}} & \overline{D_{m1}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \overline{D_{2m}} & \dots & \dots & \overline{D_{22}}+1 & \overline{D_{21}}\\ \overline{D_{1m}} & \dots & \dots & \overline{D_{12}} & \overline{D_{11}}\end{vmatrix} (\sum(\alpha_{r(1)\dots r(l)}+\omega\alpha^{(1)}_{r(1)\dots r(l)})x_1^{r_1}\dots x_n^{r_n}\dots z_n^{l_n}) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } m > n\\ [x, y, \dots, z]\Omega F_0, & \text{при } m = n, \text{где}\\ F_0 = \sum(\alpha_{r(1)\dots r(l)} + \omega\alpha^{(1)}_{r(1)\dots r(l)})x_1^{r_1}\dots x_n^{r_n}\dots z_n^{l_n} & \end{cases} \quad (11)$$

Операторный определитель:

$$\begin{vmatrix} \overline{\overline{D_{mm}}}+(m-1) & \dots & \dots & \overline{\overline{D_{m2}}} & \overline{\overline{D_{m1}}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \overline{\overline{D_{2m}}} & \dots & \dots & \overline{\overline{D_{22}}}+1 & \overline{\overline{D_{21}}}\\ \overline{\overline{D_{1m}}} & \dots & \dots & \overline{\overline{D_{12}}} & \overline{\overline{D_{11}}}\end{vmatrix} (\sum r_j x_1^{r_1}\dots x_1^{r_j-1}x_j^{(1)}\dots z_n^{l_n} + \dots +$$

$$+\sum l_j x_1^{r_1}\dots z_1^{z_{j-1}} z_j^{(1)}\dots z_n^{l_n}) \quad (12)$$

преобразует данное выражение в следующую сумму:

$$S=\sum_{i=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n}\dots\sum_{l=1}^{2n}(\sum\pm\widetilde{X_i'}\widetilde{Y_j'}\dots\widetilde{Z_l'})\frac{\partial^m F_2}{\partial\widetilde{X_i}\partial\widetilde{Y}_j\dots\partial\widetilde{Z}_l}, \quad (13)$$

где $F_2=(\sum r_j x_1^{r_1}\dots x_1^{r_j-1}x_j^{(1)}\dots z_n^{l_n}+\dots+\sum l_j x_1^{r_1}\dots z_j^{z_j-1}z_j^{(1)}\dots z_n^{l_n})$;

$\widetilde{X'},\widetilde{Y'},\dots\widetilde{Z}'$ — некоторая перестановка $2n$-векторов $\widetilde{X},\widetilde{Y},\dots\widetilde{Z}$, а $\widetilde{P}_i$ — i-я координата вектора $\widetilde{P}$. Сумма $\sum\pm\widetilde{X_i^1}\widetilde{Y_j^1}\dots\widetilde{Z_l^1})$ распространена знакопеременно на n перестановок $2n$-векторов $\widetilde{X},\widetilde{Y},\dots\widetilde{Z}$, все суммы состоящие из $2n$ слагаемых в (14) разобьем на две части

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n}\dots\sum_{l=1}^{2n}(\sum\pm\widetilde{X_i'}\widetilde{Y_j'}\dots\widetilde{Z_l'})\frac{\partial^m F_2}{\partial\widetilde{X_i}\partial\widetilde{Y}_j\dots\partial\widetilde{Z}_l}+$$
$$+\sum_{i=n+1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n}\dots\sum_{l=1}^{2n}(\sum\pm\widetilde{X_i'}\widetilde{Y_j'}\dots\widetilde{Z_l'})\frac{\partial^m F_2}{\partial\widetilde{X_i}\partial\widetilde{Y}_j\dots\partial\widetilde{Z}_l}$$

и т.д. В итоге мы получим 2^n слагаемых вида:

$$S=\sum_{i}\sum_{k}\dots\sum_{l}(\sum\pm\widetilde{X_i'}\widetilde{Y_j'}\dots\widetilde{Z_l'})\frac{\partial^m F_2}{\partial\widetilde{X_i}\partial\widetilde{Y}_j\dots\partial\widetilde{Z}_l} \quad (14)$$

где i,j,k пробегают независимо друг от друга поочередно множества $\{1,\dots,n\}$ и $\{n+1,\dots,2n\}$. Но заметим, что в выражении (16) те суммы, в которых хотя бы два индекса из n пробегают значения от $(n+1)$ до $2n$ равны нулю, так как в них берется производная по дуальной части переменных, а в F_2 каждое слагаемое содержит не более одной такой переменной.

Таким образом,

$$S=\sum_{i=n+1}^{2n}\sum_{k=1}^{n}\dots\sum_{l=1}^{n}(\sum\pm\widetilde{X_i'}\widetilde{Y_j'}\dots\widetilde{Z_l'})\frac{\partial^m F_2}{\partial\widetilde{X_i}\partial\widetilde{Y}_j\dots\partial\widetilde{Z}_l}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\dots\sum_{l=1}^{n}(\sum\pm\widetilde{X_i'}\widetilde{Y_j'}\dots\widetilde{Z_l'})\frac{\partial^m F_2}{\partial\widetilde{X_i}\partial\widetilde{Y}_j\dots\partial\widetilde{Z}_l}+\dots+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\dots\sum_{l=n+1}^{2n}(\sum\pm\widetilde{X_i'}\widetilde{Y_j'}\dots\widetilde{Z_l'})\frac{\partial^m F_2}{\partial\widetilde{X_i}\partial\widetilde{Y}_j\dots\partial\widetilde{Z}_l}=\begin{cases}0, & \text{при } m>n\\ I, & \text{при } m=n, \text{ где}\end{cases}$$
$$I=[X^{(1)}YT\dots Z]\Omega_1F_2+[XY^{(1)}T\dots Z]\Omega_2F_2+\dots+[XYT\dots Z^{(1)}]\Omega_nF_2 \quad (15)$$

Здесь $[X^{(1)}YT\dots Z]$ — компонентный определитель составленный из векторов $x^{(1)},y,t,\dots z$. А выражение Ω_i отличается от Ω в (3) тем, что в i-ой строке операторного определителястоят производные по координате i-го n-вектора $x^{(1)},y^{(1)},\dots,z^{(1)}$.

Непосредственным вычислением получим, что левая часть в (17) будет равна в том случае:

$$\begin{vmatrix} x_1+\omega x_1^{(1)} & y_1+\omega y_1^{(1)} & \dots & z_1+\omega z_1^{(1)} \\ x_2+\omega x_2^{(1)} & y_2+\omega y_2^{(1)} & \dots & z_n+\omega z_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n+\omega x_n^{(1)} & y_n+\omega y_n^{(1)} & \dots & z_n+\omega z_n^{(1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1^1} & \frac{\partial}{\partial x_2^1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n^1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1^2} & \frac{\partial}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_1^n} & \frac{\partial}{\partial x_2^n} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n^n} \end{vmatrix} F \qquad (16)$$

Заключение

Главным выводами работы является доказательство тождества Капелли. *Представляется перспективным* изучение целого рационального базиса инвариантов систем винтов относительно действия матриц с дуальными элементами.

Список литературы

1. Дименберг Т.М. Теория пространственных шарнирных механизмов. – М.: Наука, 1982. — 335с.
2. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. – М.: Гос. издат. иностранной литературы, 1947. – 408с.
3. Размыслов Ю.П. Алгебры, удовлетворяющие тождественным соотношениям типа Капелли // НАНСССР: Сер.матем. – 1981. – 45. №1. – С143-166.
4. Стовба В.В. О конечной базируемости некоторых многообразий алгебр Ли и ассоциативных алгебр // Вестник МГУ :матем.,мех. – 1982. №2. – С.54-58.
5. Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. – М.: Наука, 1985.