УДК 517.98

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ СОПРЯЖЕНИЯ

П. А. Старков

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, Симферополь, Крым, Украина, 95007
E-mail: pstarksci@aport.ru

Abstract

In the work a spectral problem for a two-parametrical operator pencil $L(\lambda,\mu) := I + \lambda A - \mu B$, acting in a separable Hilbert space H, with operator factors $A,\ B,\ 0 < A \in \mathfrak{S}_\infty,\ 0 \leqslant B \in \mathfrak{S}_\infty$, and $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ is studied. There are considered cases when one parameter is fixed and the second is spectral. The given problem arises in studying of transmition problems on the base of the operator approach using auxiliary operators for elliptic boundary problems. This problem for a case $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ has been investigated earlier by the author. *The purpose of the given work* is to study the case of real values of parameteres.

1. Постановка задачи

1.1. **К истории вопроса.** Пусть $\Omega_+\mathcal{B}\mathbb{R}^m (m \geqslant 2)$ — произвольная ограниченная область с липшицевой границей $\partial\Omega$, а $\Omega_- = \mathbb{R}^m\overline{\Omega}_+$. К задачам сопряжения для уравнения Гельмгольца относятся следующие спектральные задачи [1],[2]:

$$-\Delta u_+ + \lambda u_+ = 0 \quad (\text{в } \Omega_+), \qquad \frac{\partial u_+}{\partial n} = \mu u_+ \quad (\text{на } \partial\Omega); \tag{1}$$

$$-\Delta u_- + \lambda u_- = 0 \quad (\text{в } \Omega_-), \qquad \frac{\partial u_-}{\partial n} = -\mu u_- \quad (\text{на } \partial\Omega); \tag{2}$$

$$-\Delta u_\pm + \lambda u_\pm = 0 \quad (\text{в } \Omega_\pm), \qquad \frac{\partial u_+}{\partial n} - \frac{\partial u_-}{\partial n} = \mu u_+, \quad u_+ = u_- \quad (\text{на } \partial\Omega); \tag{3}$$

$$-\Delta u_\pm + \lambda u_\pm = 0 \quad (\text{в } \Omega_\pm), \qquad \frac{\partial u_+}{\partial n} = \frac{\partial u_-}{\partial n} = \mu(u_+ - u_-) \quad (\text{на } \partial\Omega); \tag{4}$$

Здесь в задачах (1)-(4) для функции $u_-(x)$, заданной в безграничной области Ω_-, дополнительно требуют выполнения условия излучения на бесконечности.

Задачи вида (1)-(4) как в скалярном случае для уравнения Гельмгольца, так и в соответствующих проблемах теории упругости и других, исследовались в большой серии работ М.С. Аграновича, его учеников и соавторов. Основная идея изучения задач подобного рода — это сведение каждой проблемы к системе интегральных (операторных) уравнений, заданных на $\partial\Omega$. При этом $\mu \in \mathbb{C}$ считается спектральным параметром, а $\lambda \in \mathbb{C}$ — фиксированным. Изучались задачи в гладких и негладких (липшицевых) областях $\Omega = \Omega_+$.

В работах автора [3],[4] применен другой подход, основанный на использовании вспомогательных операторов краевых задач (см. [5]) в областях $\Omega_\pm$, причем Ω_- — ограниченная область. Здесь искомыми являются функции $u_\pm$, заданные в $\Omega_\pm$, что позволяет получить утверждения о полноте и базисности системы собственных функций, а не только их следов на границе $\partial\Omega$. Кроме того, при этом подходе параметры λ и μ равноправны, т.е. их роли можно поменять местами, считая не только μ спектральным, а λ — фиксированным, но и наоборот.

Отметим, что случай, когда λ — спектральный параметр, а μ — фиксированный, в общей эллиптической ситуации для задачи (1) изучен В.И. Горбачук в [6].

1.2. **Математическая формулировка.** Упомянутый выше подход автора (см. [3]) привел к изучению спектральной проблемы

$$L(\lambda,\mu)u := (I+\lambda A-\mu B)u = 0, \tag{5}$$

$$0 < A \in \mathfrak{S}_\infty, \quad 0 \leqslant B \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{6}$$

$$dim\,kerB = \infty, \quad dim\overline{\mathcal{R}(B)} = \infty, \tag{7}$$

в соответственно подобранном гильбертовом пространстве H для каждой из задач (1) - (4). В связи с этим естественно исследовать проблему (5) в абстрактном сепарабельном гильбертовом пространстве H с операторными коэффициентами A и B, удовлетворяющими общим требованием (6), (7).

В работе [4] уже исследован случай общего положения, когда λ и μ — невещественные параметры. *Поэтому в данной работе изучается специальный частный случай*

$$Im\,\lambda = Im\,\mu = 0,$$

позволяющий доказать свойство базисности системы собственных элементов как в случае спектрального параметра λ, так и спектрального параметра μ.

В дальнейшем понадобиться ортогональное разложение

$$H = H_0 \oplus H_1, \quad H_0 := ker\,B, \quad H_1 = H \ominus H_0 := \overline{\mathcal{R}(B)}, \tag{8}$$

обусловленное свойствами (6), (7).

2. Свойства решений при спектральном параметре μ

2.1. **Положительные значения параметра.** Рассмотрим задачу (5) в случае, когда фиксированный параметр λ удовлетворяет условию

$$\lambda \geqslant 0. \tag{9}$$

Пусть P_0 и P_1 — взаимно дополнительные ортопроекторы, отвечающие разложению (8), т.е.

$$P_0 + P_1 = 1, \quad P_0\,P_1 = P_1\,P_0 = 0,$$

а I_0 и I_1 единичные операторы в H_0 и H_1 соответственно.

Лемма 1. *При условии (9) оператор* $F_0(\lambda) := I_0 + \lambda P_0\, AP_0$ *обратим в* H_0 *и для обратного оператора* $F_0^{-1}(\lambda)$ *выполнены свойства*

$$F_0^{-1}(\lambda) = (I_0 + \lambda P_0\, AP_0)^{-1} = I_0 + T_0(\lambda), \quad T_0(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty. \tag{10}$$

Доказательство. Так как $\lambda \geqslant 0$ и $A > 0$, то

$$F_0(\lambda) = I_0 + \lambda P_0\, AP_0 \geqslant I_0 \gg 0,$$

а потому $F_0(\lambda)$ имеет ограниченный обратный. Так как $P_0\, AP_0 \in \mathfrak{S}_\infty$, то по теореме Фредгольма $(I_0 + \lambda P_0\, AP_0)^{-1} = I_0 + T_0(\lambda)$, где $T_0(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty$. □

Разыскивая решение задачи (5) в виде

$$u = u_0 + u_1, \quad u_0 = P_0 u = P_0 u_0, u_1 = P_1 u = P_1 u_1,$$

и применяя к обеим частям (5) ортопроекторы P_0 и P_1, получим взамен (5) равносильную систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} (I_0 + \lambda P_0 AP_0)u_0 + \lambda P_0 AP_1 u_1 = 0, \\ \lambda P_1 AP_0 u_0 + (I_1 + \lambda P_1 AP_1)u_1 - \mu B_1 u_1 = 0, \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Исключим в системе уравнений (11) неизвестную u_0 и придем к уравнению

$$(F_1(\lambda) - \mu B_1)u_1 = 0, \quad u_1 \in H_1, \tag{12}$$

где $F_1(\lambda)$ определен формулой

$$F_1(\lambda) := I_1 + \lambda P_1 AP_1 - \lambda^2 P_1 AP_0 (I_0 + \lambda P_0 AP_0)^{-1} P_0 AP_1. \tag{13}$$

Лемма 2. *При условии (9) оператор* $F_1(\lambda)$ *положительно определен, причем*

$$F_1(\lambda) \geqslant I_1 \gg 0.$$

Доказательство основано на свойстве

$$I + \lambda A \gg I \quad \lambda \geqslant 0, A > 0, \tag{14}$$

и существовании оператора $F_0^{-1/2}(\lambda) \in \mathcal{L}(H_0)$, который, очевидно, положителен в H_0. Для любого $u = u_0 + u_1$ запишем свойство (14), имеем

$$((I + \lambda A)u, u) = ((I_0 + \lambda P_0 AP_0)u_0 + \lambda P_0 AP_1 u_1, u_0) +$$
$$+((I_1 + \lambda P_1 AP_1)u_1 + \lambda P_1 AP_0 u_0, u_1) \geqslant \|u\|^2 = \|u_0\|^2 + \|u_1\|^2.$$

С помощью оператора $F_0^{1/2}(\lambda)$и обратного ему $F_0^{-1/2}(\lambda)$ в этом неравенстве можно выделить полный квадрат, что приводит к неравенству

$$((I + \lambda A)u, u) = \|F_0^{1/2}(\lambda)u_0 + \lambda F_0^{-1/2}(\lambda) P_0 AP_1 u_1\|^2 + (F_1(\lambda)u_1, u_1) \geqslant \|u_0\|^2 + \|u_1\|^2.$$

Выбирая здесь u_0 в виде

$$u_0 = \lambda F_0^{-1}(\lambda) P_0 AP_1 u_1,$$

приходим к неравенству

$$(F_1(\lambda)u_1, u_1) \geqslant \|u_0\|^2 + \|u_1\|^2 \geqslant \|u_1\|^2.$$

$\square$

Теорема 1. *При выполнения условия (9) задача (12), т.е. задача собственные значения*

$$F_1(\lambda)u_1 = \mu B_1 u_1,\ u_1 \in H_1,$$

имеет дискретный спектр $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$, состоящий из конечнократных положительных собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Собственные элементы $\{u_1k\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающие собственным значениям $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$, образуют ортогональный базис в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_{F_1(\lambda)}$, оператора $F_1(\lambda)$, а также по квадратичной форме оператора B_1. Элементы базиса можно выбрать удовлетворяющим следующим условиям ортонормировки

$$\begin{aligned}(F_1(\lambda)u_{1k}, u_{1l}) = (u_{1k}, u_{1l})_{F_1(\lambda)} = \delta_{kl},\\ (B_1 u_{1k}, u_{1l}) = \mu_k^{-1}\delta_{kl}.\end{aligned} \tag{15}$$

Доказательство. Перепишем задачу в эквивалентном виде

$$F_1^{-1}(\lambda)B_1 u_1 = \nu u_1, \quad u_1 \in H, \quad \nu = \mu^{-1}. \tag{16}$$

Введем энергетическое пространство $\mathcal{H}_{F_1(\lambda)}$, отвечающее оператору $F_1(\lambda)$, со скалярным произведением

$$(u, v)_{F_1(\lambda)} := (F_1(\lambda)u, v), \quad u, v \in H_1.$$

Нетрудно видеть, что норма, порожденная данным скалярным произведением, эквивалентна норме пространства H.

Заметим теперь, что в пространстве $\mathcal{H}_{F_1(\lambda)}$ оператор $F_1^{-1}(\lambda)B$ является положительным и компактным оператором

$$(F_1^{-1}(\lambda)B_1 u_1, u_1)_{F_1(\lambda)} = (B_1 u_1, u_1) > 0\ (u_1 \neq 0),$$

откуда следует свойство положительности, а компактность $F_1^{-1}(\lambda)B$ имеет место потому, что $F_1^{-1}(\lambda)$ ограничен, а B компактен в H, а потому и в $\mathcal{H}_{F_1(\lambda)}$.

Доказанные свойства оператора $F_1^{-1}(\lambda)B$ позволяют применить к спектральной задаче (16) известную теорему Гильберта-Шмидта, из которой следуют все утверждения теоремы. $\square$

2.2. **Отрицательные неисключительные значения параметра.** Теперь изучим задачу (5) или равносильную ей задачу (11) в случае, когда параметр

$$\lambda < 0.$$

Прежде чем рассматривать эту задачу, докажем следующий факт.

Теорема 2. *Пусть гильбертово пространство H имеет ортогональное разложение*

$$H = H_0 \oplus H_1,$$

а оператор $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$ в этом разложении представлен в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = P_i A P_j, \ i,j = 0,1,$$

где P_0 и P_1 — взаимно дополнительные ортопроекторы на H_0 и H_1 соответственно. Пусть существуют $A_{00}^{-1} \in \mathcal{L}(H_0)$. Тогда операторная матрица A обратима в H в том и только том случае, когда обратим оператор

$$A_1 := A_{11} - A_{10} A_{11}^{-1} A_{01} : H_1 \to H_1.$$

При этом ранги индефинитности $\varkappa, \varkappa_0$ и $\varkappa_1$ операторов A, A_{00} и A_1 соответственно связаны отношением

$$\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1. \tag{17}$$

Доказательство.

1^0. Рассмотрим задачу вида $Au = v$,т.е. систему уравнений

$$\begin{aligned} A_{00}u_0 + A_{01}u_1 &= v_0, \\ A_{10}u_0 + A_{11}u_1 &= v_1, \end{aligned} \tag{18}$$

где $u = u_0 + u_1, \ v = v_0 + v_1, \ u_i = P_i u, \ v_i = P_i v, \ i = 0,1$. Так как $A_{00}^{-1} \in \mathcal{L}(H_0)$ существует, то в (18) можно осуществить замену

$$\widetilde{u}_0 := u_0 + A_{00}^{-1} A_{01} u_1. \tag{19}$$

Тогда система (18) принимает вид

$$\begin{aligned} A_{00}\widetilde{u}_0 &= v_0, \\ A_{10}\widetilde{u}_0 + A_1 u_1 &= v_1 \end{aligned} \tag{20}$$

Так как эта система имеет треугольный вид, то она при условии существования $A_{00}^{-1} \in \mathcal{L}(H_0)$ однозначно разрешима в том и только в том случае, когда существует обратный оператор A_1^{-1}. Тогда решение задачи (20) имеет вид

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_0 &= A_{00}^{-1} v_0, \\ u_1 &= A_1^{-1}\left(v_1 - A_{10} A_{00}^{-1} v_0\right). \end{aligned} \tag{21}$$

В частности, если $A_1^{-1} \in \mathcal{L}(H_1)$, то $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Этим доказано первое утверждение теоремы, поскольку решение задачи (18) следует из формул (21), (19).

2^0. Докажем теперь формулу (17). Для произвольного элемента $u = u_0 + u_1 \in H = H_0 \oplus H_1$ имеет с учетом (19)

$$\begin{aligned} (Au, u) &= (A_{00}u_0 + A_{01}u_1, u_0) + (A_{10}u_0 + A_{11}u_1, u_1) = \\ &= (A_{00}\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_0 - A_{00}^{-1}A_{01}u_1) + (A_{10}(\widetilde{u}_0 - A_{00}^{-1}A_{01}u_1), u_1) + (A_{11}u_1, u_1) = \\ &= (A_{00}\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_0) - (A_{00}\widetilde{u}_0, A_{00}^{-1}A_{01}u_1) + (A_{10}\widetilde{u}_0, u_1) - (A_{10}A_{00}^{-1}A_{01}u_1, u_1) + (A_{11}u_1, u_1). \end{aligned}$$

Так как в силу самосопряженности оператора A имеем $A_{ij} = (A_{ji})^*, i,j = 0,1$, то из полученного соотношения следует, что

$$(Au, u) = (A_{00}\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_0) + (A_{11}u_1, u_1) \tag{22}$$

Заметим теперь , что замена (19) задает ограниченное треугольное отображение

$$Vu = \begin{pmatrix} I_0 & A_{00}^{-1}A_{01} \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} : H \to H,$$

которое, очевидно, имеет ограниченное обратное отображение

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} I_0 & -A_{00}^{-1}A_{01} \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} : H \to H.$$

Из этого факта и из (22) следует формула (17). □

Следствие 1. *Если в спектральной задаче (11) оператор $I_0 + \lambda P_0AP_0$ обратим в H_0, то оператор $I + \lambda A$ обратим H тогда и только тогда, когда обратим в H_1 оператор $F_1(\lambda)$ из (13). При этом ранги индефинитности этих операторов связаны соотношением*

$$\varkappa_{I+\lambda A} = \varkappa_{I_0+\lambda P_0AP_0} + \varkappa_{F_1(\lambda)}, \tag{23}$$

а все обратные к ним операторы ограничены.

Доказательство. Если оператор $I_0 + \lambda P_0AP_0$ обратим в H_0, то (по теореме Фредгольма) он имеет ограниченный обратный. Поэтому утверждения следствия получаются непосредственно из предыдущей теоремы, если ее применить к оператору

$$I + \lambda A = \begin{pmatrix} I_0 + \lambda P_0AP_0 & \lambda P_0AP_1 \\ \lambda P_1AP_0 & I_1 + \lambda P_1AP_1 \end{pmatrix} : H \to H. \tag{24}$$

При этом оператор A_1 из теоремы 2 в данном случае имеет вид $A_1 = F_1(\lambda)$, а формула (23) следует из (17) для оператора вида (24). Наконец, так как A — компактный оператор, то все упомянутые обратные ограничены. □

Обозначим через $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность собственных значений положительного компактного оператора A, действующего в пространстве H, а через $\{\lambda_k(A_{00})\}_{k=1}^{\infty}$ — аналогичную последовательность для положительного компактного оператора $A_{00} = P_0AP_0$, действующего в пространстве $H_0\mathcal{B}H$. Собственные значения в этих последовательностях записаны с учетом их кратностей. Из свойства $A > 0$, а также бесконечномерности пространств H и H_0 следует, что обе последовательности — монотонно неубывающие, причем

$$\lambda_k(A) \geqslant \lambda_k(A_{00}), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Определение 1. Будем говорить, что параметр $\lambda < 0$ задачи (11) принимает неисключительные значения, если выполнены условия

$$1 + \lambda\lambda_k(A) \neq 0, \quad 1 + \lambda\lambda_k(A_{00}) \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

а числа

$$\lambda = -\lambda_k^{-1}(A), \quad \lambda = -\lambda_k^{-1}(A_{00}), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

назовем исключительными отрицательными значениями параметра λ.

Пусть $\lambda < 0$ принимает неисключительное значение. Тогда операторы $I + \lambda A$ и $I_0 + \lambda P_0 A P_0$ ограниченно обратимы, и согласно следствию 1, ограниченно обратим также при этом λ оператор $F_1(\lambda)$. При этом спектральная задача (11) равносильна задаче (12).

Для дальнейшего исследования нам понадобиться оператор канонической симметрии $\mathcal{J}_\varkappa = \mathcal{J}_\varkappa^* = \mathcal{J}_\varkappa^{-1}$ и сконструированный по нему матричный оператор $\mathcal{J}_\varkappa := \mathrm{diag}(I_0; \mathcal{J}_\varkappa)$.

Лемма 3. *Оператор $\mathcal{J}_\varkappa$ является оператором канонической симметрии, действующим в пространстве $H = H_0 \oplus H_1$:*

$$\mathcal{J}_\varkappa = \mathcal{J}_\varkappa^* = \mathcal{J}_\varkappa^{-1}.$$

Теорема 3. *Пусть параметр $\lambda < 0$ принимает неисключительное отрицательное значение и $\varkappa = \varkappa_{F_1(\lambda)} > 0$ — ранг индефинитности оператора $F_1(\lambda)$. Тогда задача (12) при этом λ имеет дискретной спектр $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$, состоящий из конечнократных вещественных собственных значений с единственной предельной точкой $\mu = \infty$. При этом собственные значения $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^{\varkappa}$ отрицательны, а остальные положительны. Собственные элементы $\{u_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ задачи(12), отвечающие собственным значениям $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$, образуют базис Рисса и ортонормированный базис в H_1 по квадратичным фирмам операторов $F_1(\lambda)$ и B_1. При этом элементы базиса можно выбрать удовлетворяющими следующим условиям $\mathcal{J}_\varkappa$ — ортонормировки:*

$$(F_1(\lambda)u_{1k}, u_{1l}) = -\delta_{kl}, \quad 1 \leqslant k, l \leqslant \varkappa; \quad (F_1(\lambda)u_{1k}, u_{1l}) = \delta_{kl}, \quad k, l > \varkappa; \tag{25}$$
$$(B_1 u_{1k}, u_{1l}) = \mu_k^{-1}(\lambda)\left(F_1(\lambda)u_{1k}, u_{1l}\right).$$

Доказательство. Представим в (12) оператор $F_1(\lambda)$ в виде

$$F_1(\lambda) = |F_1(\lambda)|^{1/2} J_\varkappa |F_1(\lambda)|^{1/2} \tag{26}$$

где $\varkappa$ — ранг индефинитности $F_1(\lambda)$, а $J_\varkappa$ — каноническая симметрия. Это возможно, поскольку параметр λ принимает неисключительные значения. Кроме того, в этом случае $|F_1(\lambda)| \gg 0$ и существует ограниченный обратный оператор $|F_1(\lambda)|^{-1/2}$. С учетом представления (26) задача (12) равносильна задаче

$$\begin{gathered} J_\varkappa v_1 = \nu B_1(\lambda) v_1, \quad v_1 = |F_1(\lambda)|^{-1/2} u_1, \\ \nu = \mu^{-1}, \quad B_1(\lambda) := |F_1(\lambda)|^{-1/2} B_1 |F_1(\lambda)|^{-1/2}. \end{gathered} \tag{27}$$

Перепишем задачу (27) с учетом свойств $J_\varkappa$ в виде задачи на собственные значения

$$J_\varkappa B_1(\lambda) v_1 = \delta v_1, \quad \delta = \nu^{-1}. \tag{28}$$

Так как $B_1(\lambda) > 0$ и компактен, то оператор $J_\varkappa B_1(\lambda)$ является компактным и $J_\varkappa$–положительным оператором. Поэтому этот оператор удовлетворяет условиям известной теоремы о свойствах спектра и системы собственных элементов таких операторов, действующих в пространстве Л.С. Понтрягина $\Pi_\varkappa$ [7]. Значит, согласно выводам упомянутой теоремы Л.С. Понтрягина, задача (28) имеет дискретный вещественный спектр $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой в нуле, а собственные элементы $\{v_{1k}\}_{k=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$, образуют базис Рисса в H_1. При этом первые $\varkappa$ собственных значений задачи (28) являются отрицательными, а остальные положительные. Если потребовать, чтобы для собственных элементов функционал $(J_\varkappa v, v) = [v, v]$ равнялся по модулю единице, то приходим к формулам

$$[v_{1k}, v_{1j}] = -\delta_{kj},\ 1 \leqslant k, j \leqslant \varkappa,\ [v_{1k}, v_{1j}] = \delta_{kj},\ k, j \geqslant \varkappa + 1.$$

Из этих формул после замены $v_1 = |F_1(\lambda)|^{-1/2} u_1$ получаются формулы ортогональности (25), а после возвращения от спектрального параметра δ к ν, а затем к μ — утверждения теоремы о свойствах собственных значений $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^\infty$. □

Теорема 4. *Пусть для оператора B задачи (5) выполнено асимптотическое условие*

$$\lambda_k(B) = c_B^\beta k^{-\beta}(1 + o(1)), \quad c_B > 0,\ \beta > 0,\ k \to \infty. \tag{29}$$

Тогда при неисключительных вещественных значениях параметра λ для собственных значений $\mu_k(\lambda)$ задачи (5) справедлива формула

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(B)\,(1 + o(1))\,, \quad (k \to \infty). \tag{30}$$

Доказательство данной теоремы совпадает с доказательством соответствующего факта для случая общего положения [4], так как оно не зависит от того, является λ вещественным либо невещественным фиксированным параметром. □

Итогом рассмотрения задачи (5) при $\lambda \in \mathbb{R}$ является

Теорема 5. *Пусть в задаче (5) параметр λ принимает неисключительное значение. Тогда задача (5) имеет дискретный вещественный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^\infty$ с единственной предельной точкой $\mu = \infty$. Система собственных элементов $\{u_1k\}_{k=1}^\infty$, отвечающая собственным значениям $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^\infty$, после их проектирования на подпространство $H_1 = \overline{\mathcal{R}(B)}$, т.е. система элементов $\{u_{1k}\}_{k=1}^\infty$, $u_{1k} = P_1 u_k$, образуют базис Рисса в $H_1 = P_1 H$. При этом в случае $\lambda \geqslant 0$ выполнены формулы ортогональности (15), а при $\lambda < 0$ — формулы (25). Если выполнено условие (29), то для собственных значений $\mu_k(\lambda)$ задачи (5) справедлива асимптотическая формула (30).*

3. Свойства решений при спектральном параметре λ

3.1. **Отрицательные значения параметра.** Поменяем роли параметров λ и μ в задаче (5), т.е. будем считать, что λ — спектральный параметр, а μ — спектральный параметр, причем сначала

$$\mu \leqslant 0. \tag{31}$$

Тогда возникает спектральная задача

$$(I - \mu B) = -\lambda A u, \quad u \in H. \tag{32}$$

Теорема 6. *При выполнении условия (31) задача (32) имеет дискретный спектр $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=1}^{\infty}$, состоящий из конечнократных отрицательных собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Собственные элементы $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=1}^{\infty}$, образуют ортогональный базис в энергетическом поле $\mathcal{H}_{F(\mu)}$, $F(\mu) := I - \mu B$, а также по квадратичной форме оператора A. Элементы базиса можно выбрать удовлетворяющими следующим условиям ортонормировки:*

$$\begin{aligned} (F(\mu)u_k, u_l) = (u_k, u_l)_{F(\mu)} = \delta_{kl}, \\ (Au_k, u_l) = \lambda_k^{-1}\delta_{kl}. \end{aligned} \tag{33}$$

Доказательство этой теоремы в точности повторяет схему доказательства теоремы 1, если заменить, что здесь в силу условия (31) и свойства $B \geqslant 0$ имеем

$$F(\mu) = I - \mu B \geqslant I \gg 0,$$

а оператор A имеет нулевое ядро в H. □

3.2. **Положительные неисключительные значения параметра.** Изучим теперь задачу (32) в случае, когда взамен (31) выполнены условия

$$\mu > 0, \quad \mu \neq \lambda_k^{-1}(B),\ k = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

где $\{\lambda_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность ненулевых собственных значений оператора B, которые являются положительными и имеют предельную точку $\lambda = 0$.

Условия (32) обеспечивают обратимость оператора $I - \mu B$, причем соответствующая квадратичная форма $((I - \mu B)u, u)$ индефинитна, а ранг ее индефинитности равен количеству $\varkappa(\mu)$ (с учетом кратностей) собственных значений $\lambda_k(B)$, удовлетворяющих условиям

$$1 - \mu\lambda_k(B) < 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \varkappa(\mu), \quad 1 - \mu\lambda_{\varkappa(\mu)+1}(B) > 0. \tag{35}$$

Для доказательства последнего факта воспользуемся ортогональным разложением (8) гильбертова пространства H и представлением

$$u = u_0 + u_1, \quad u_0 = P_0 u = P_0 u_0, \quad u_1 = P_1 u = P_1 u_1.$$

Тогда

$$((I-\mu B)u,\,u)=((I-\mu B)(u_0+u_1),\,(u_0+u_1))=\|u_0\|^2+\|u_1\|^2-\mu(Bu_1,u_1)=$$
$$=\|u_0\|^2+\sum_{k=1}^{\infty}(1-\mu\lambda_k(B))\left|(u_1,\,u_k(B))\right|^2=$$
$$=\|u_0\|^2+\sum_{k=1}^{\varkappa}(1-\mu\lambda_k(B))\left|\big(u_1,\,u_k(B)\big)\right|^2+\sum_{k=\varkappa+1}^{\infty}(1-\mu\lambda_k(B))\left|\big(u_1,\,u_k(B)\big)\right|^2, \tag{36}$$

где $\{u_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ — собственные элементы оператора B отвечающие ненулевым собственным значениям и образующие ортогональный базис в H_1. Так как при $k>\varkappa$ выполнены условия $1-\mu\lambda_k(B)>0$, то из (36) следует, что квадратичная форма $((I-\mu B)u,\,u)$ имеет ранг индефинитности, в точности равный $\varkappa=\varkappa(\mu)$.

Учитывая это обстоятельства, запишем задачу (32) в векторно-матричной форме

$$\begin{pmatrix} I_0 & 0\\ 0 & I_1-\mu B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix}=-\lambda\begin{pmatrix}P_0AP_0 & P_0AP_1\\ P_1AP_0 & P_1AP_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix} \tag{37}$$

и представим оператор $I_1-\mu B_1$ в виде

$$I_1-\mu B_1=|I_1-\mu B_1|^{1/2}\,J_\varkappa\,|I_1-\mu B_1|^{1/2},\quad |I_1-\mu B_1|=\big((I_1-\mu B_1)^2\big)^{1/2}, \tag{38}$$

где в силу условий (34), (35) операторы $|I_1-\mu B|$ и $|I_1-\mu B|^{1/2}$ — положительно определенные, а $J_\varkappa$ — оператор канонической симметрии.

Используя (38) и осуществляя в (37) замену

$$v_1=|I_1-\mu B_1|^{1/2}\,u_1, \tag{39}$$

а также применяя ко второй строке (37) ограниченно обратимый оператор $|I_1-\mu B|^{-1/2}$, приходим к спектральной задаче

$$\begin{pmatrix} I_0 & 0\\ 0 & J_\varkappa\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ v_1\end{pmatrix}=$$
$$=-\lambda\begin{pmatrix}P_0AP_0 & P_0AP_1\,|I_1-\mu B_1|^{-1/2}\\ |I_1-\mu B_1|^{-1/2}\,P_1AP_0 & |I_1-\mu B_1|^{-1/2}\,P_1AP_1\,|I_1-\mu B_1|^{-1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ v_1\end{pmatrix}, \tag{40}$$

которую можно записать в виде

$$\mathcal{J}_\varkappa v=\nu\mathcal{A}(\mu)v,\quad v=(u_0;v_1)^t\in H,\quad \nu=-\lambda, \tag{41}$$

а $\mathcal{A}(\mu)$ — матрица, стоящая справа в (40).

Лемма 4. *Операторная матрица $\mathcal{A}(\mu)$ — компактный положительный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $H=H_0\oplus H_1$.*

Доказательство. Свойство компактности $\mathcal{A}(\mu)$ очевидно, так как $A\in\mathfrak{S}_\infty$, а остальные операторы P_0, P_1 и $|I_1-\mu B|^{-1/2}$, участвующие в образовании элементов $\mathcal{A}(\mu)$, ограничены. Свойство положительности $\mathcal{A}(\mu)$ следует из свойства положительности оператора A. В самом деле, вычислим квадратичную форму для $\mathcal{A}(\mu)$:

$$
\begin{gathered}
(\mathcal{A}(\mu)v,\, v) = (P_0AP_0u_0,\, u_0) + \left(P_0AP_1\left|I_1-\mu B_1\right|^{-1/2}v_1,\, u_0\right) + \\
+\left(\left|I_1-\mu B_1\right|^{-1/2}P_1AP_0u_0,\, v_1\right) + \left(\left|I_1-\mu B_1\right|^{-1/2}P_1AP_1\left|I_1-\mu B_1\right|^{-1/2}v_1,\, v_1\right) = \\
= (P_0AP_0u_0,\, u_0) + (P_0AP_1u_1,\, u_0) + (P_1AP_0u_0,\, u_1) + (P_1AP_1u_1,\, u_1) = (Au,\, u)\,.
\end{gathered}
\tag{42}
$$

Из (42) и положительности оператора A получаем, что $(\mathcal{A}(\mu)v,\, v) \geqslant 0$, причем $(\mathcal{A}(\mu)u,\, u) = 0$ при $u = (u_0, u_1)^t = 0$, но тогда и $v = (u_0, v_1) = 0$, в силу (39). □

Теорема 7. *Задача (32) при условиях (34), (35) имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=1}^{\infty}$, *состоящий из конечнократных вещественных собственных значений с единственной предельной точкой* $\lambda = -\infty$. *При этом собственных значений* $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=1}^{\varkappa}$ *положительны, а остальные — отрицательные. Собственные элементы* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, *отвечающие собственным значениям* $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=1}^{\infty}$*б образуют базис Рисса и ортонормированный базис по квадратичным формам операторов* $F(\mu) := I - \mu B$ *и* A. *При этом элементы базиса можно выбрать удовлетворяющими следующим условиям* $\mathcal{J}_{\varkappa}$ *— ортонормировки:*

$$
(F(\mu)u_k,\, u_l) = -\delta_{kl}, \quad 1 \leqslant k,l \leqslant \varkappa; \quad (F(\mu)u_k,\, u_l) = \delta_{kl}, \quad k,l > \varkappa; \tag{43}
$$

$$
(Au_k, u_l) = -\lambda_k^{-1}(\mu)\,(F(\mu)u_k,\, u_l)\,.
$$

Доказательство этой теоремы в точности повторяет доказательство теоремы 3. Перепишем задачу (41) с учетом $\mathcal{J}_{\varkappa} = \mathcal{J}_{\varkappa}^{*} = \mathcal{J}_{\varkappa}^{-1}$ в виде задачи на собственные значения

$$
\mathcal{J}_{\varkappa}\mathcal{A}(\mu)v = \delta v, \quad \delta = \nu^{-1}. \tag{44}
$$

Эта задача имеет в точности тот же вид, что и (28), а операторы этих задач обладают одинаковыми свойствами, использованными при доказательстве теоремы 3. □

Теорема 8. *Если выполнено условие*

$$
\lambda_k(A) = c_A^{\alpha}k^{-\alpha}\left(1+o(1)\right), \quad c_A > 0,\ \alpha > 0,\ k \to \infty, \tag{45}
$$

то для собственных значений $\lambda_k(\mu)$ *справедлива асимптотическая формула*

$$
\lambda_k(\mu) = -\lambda_k^{-1}(A)\,(1+o(1)) \quad (k \to \infty).
$$

Доказательство данной теоремы совпадает с доказательством соответствующего факта для случая общего положения [4], т.к. оно не зависит от того, является ли параметр μ вещественным или нет. □

3.3. **Положительные исключительные значения параметра.** Рассмотрим снова задачу (32), и причем теперь будем считать, что параметр μ принимает одно из исключительных значений

$$\mu = \lambda_{k_0}^{-1}(B) > 0, \quad k_0 \in \mathbb{N}. \tag{46}$$

Так как оператор B компактный и самосопряженный, то собственному значению $\lambda_{k_0}(B)$ отвечает конечнократное подпространство собственных элементов H_{k_0}, причем в силу того, что $\lambda_{k_0}(B) \neq 0$ получаем, что $H_{k_0}\mathcal{B}H_1$, где $H_1 = H \ominus H_0, H_0 = \ker B$. Отсюда следует, что имеет место ортогональное разложение

$$H = H_0 \oplus H_{k_0} \oplus \widetilde{H}_1, \quad \widetilde{H}_1 := H_1 \ominus H_{k_0}. \tag{47}$$

Представим в задаче (32) решение u в виде

$$u = u_0 + u_{k_0} + \widetilde{u}_1, \quad u_0 \in H_0,\ u_{k_0} \in H_{k_0},\ \widetilde{u}_1 \in \widetilde{H}_1. \tag{48}$$

Взамен (32) имеем

$$u_0 + u_{k_0} + \widetilde{u}_1 - \mu B(u_0 + u_{k_0} + \widetilde{u}_1) = -\lambda A(u_0 + u_{k_0} + \widetilde{u}_1).$$

Подействуем теперь на обе части этого уравнения ортопроекторами $P_0,\ P_{k_0}$ и $\widetilde{P}_1$ на подпространства $H_0,\ H_{k_0}$, и $\widetilde{H}_1$ соответственно. Учитывая, что в рассматриваемом случае $Bu_0 = 0, Bu_{k_0} = \lambda_{k_0}(B)u_{k_o}, \mu = \lambda_{k_0}^{-1}(B)$, придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} u_0 &= -\lambda\left(P_0AP_0u_0 + P_0APk_0u_{k_0} + P_0A\widetilde{P}_1\widetilde{u}_1\right), \\ 0 &= \lambda\left(P_{k_0}AP_0u_0 + P_{k_0}AP_{k_0}u_{k_0} + P_0A\widetilde{P}_1\widetilde{u}_1\right), \\ \left(\widetilde{I}_1 - \mu\widetilde{B}_1\right)\widetilde{u}_1 &= -\lambda\left(\widetilde{P}_1AP_0u_0 + \widetilde{P}_1AP_{k_0}u_{k_0} + \widetilde{P}_1A\widetilde{P}_1\widetilde{u}_1\right). \end{aligned} \tag{49}$$

Заметим, что здесь оператор $\widetilde{I}_1 - \mu\widetilde{B}_1,\ \widetilde{B} := \widetilde{P}_1A\widetilde{P}_1$, согласно построению, имеют ограниченный обратный $\left(\widetilde{I}_1 - \mu\widetilde{B}_1\right)^{-1}$.

Задача (49) имеет нетривиальны решения, когда собственное значение $\lambda = 0$. В это случае выполнены соотношения $u_0 = 0,\ \left(\widetilde{I}_1 - \mu\widetilde{B}_1\right)\widetilde{u}_1 = 0$. В силу обратимости оператора $\widetilde{I}_1 - \mu\widetilde{B}_1$ получаем, что $\widetilde{u}_1 = 0$. Таким образом, при $\lambda = 0$ имеем решение

$$u = u_{k_0}, \quad \forall u_{k_0} \in H_{k_0},$$

т.е. число $\lambda = 0$ является конечнократным собственным значением, ему отвечают элементы, которые можно выбирать ортогональными.

Пусть теперь в (49) $\lambda \neq 0$. Так как оператор A положителен, а $\dim\, H_{k_0} < \infty$, то оператор $P_{k_0}AP_{k_0}$ является положительно определенным и потому имеет ограниченный обратный оператор $(P_{k_0}AP_{k_0})^{-1} \in \mathcal{L}(H_{k_0})$. Тогда из второго равенства (49) (при $\lambda \neq 0$) получаем, что

$$u_{k_0} = -\left(P_{k_0}AP_{k_0}\right)^{-1}\left(P_{k_0}AP_0u_0 + P_{k_0}A\widetilde{P}_1\widetilde{u}_1\right).$$

Подставляя это соотношение в первое и третье уравнение (49), придем к системе уравнений

$$\begin{gathered} u_0 = -\lambda\left(\widetilde{A}_{00}u_0 + \widetilde{A}_{01}\widetilde{u}_1\right), \\ \left(\widetilde{I}_1 - \mu\widetilde{B}\right)\widetilde{u}_1 = -\lambda\left(\widetilde{A}_{10}u_0 + \widetilde{A}_{11}\widetilde{u}_1\right), \\ \widetilde{A}_{ij} := P_iAP_j - P_iAP_{k_0}\left(P_{k_0}AP_{k_0}\right)^{-1}P_{k_0}AP_j, \quad i,j=0,1. \end{gathered} \tag{50}$$

Лемма 5. *Операторная матрица*

$$\widetilde{A} := \left(\widetilde{A}_{ij}\right)_{i,j=0}^{1}$$

является положительным и компактным оператором, действующим в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} := H_0 \oplus \widetilde{H}_1$.

Доказательство. Для любого ненулевого $u = u_0 + u_{k_0} + \widetilde{u}_1 \in H$ имеем

$$\begin{gathered} (Au,u) = \left(P_0AP_0u_0 + P_0AP_{k_0}u_{k_0} + P_0A\widetilde{P}_1\widetilde{u}_1, u_0\right) + \\ + \left(P_{k_0}AP_0u_0 + P_{k_0}AP_{k_0}u_{k_0} + P_{k_0}A\widetilde{P}_1\widetilde{u}_1, u_{k_0}\right) + \left(\widetilde{P}_1AP_0u_0 + \widetilde{P}_1AP_{k_0}u_{k_0} + \widetilde{P}_1A\widetilde{P}_1\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_1\right) = \\ = \left\|\left(P_{k_0}AP_{k_0}\right)^{1/2}u_{k_0} - \left(P_{k_0}AP_{k_0}\right)^{1/2}P_{k_0}AP_0u_0 + \left(P_{k_0}AP_{k_0}\right)^{1/2}P_{k_0}A\widetilde{P}_1\widetilde{u}_1\right\|^2 - \\ - \left\|\left(P_{k_0}AP_{k_0}\right)^{1/2}P_{k_0}AP_0\right\|^2 - \left\|\left(P_{k_0}AP_{k_0}\right)^{1/2}P_{k_0}A\widetilde{P}_1\widetilde{u}_1\right\|^2 + \\ + \left(\left(P_{k_0}AP_{k_0}\right)^{-1}P_{k_0}AP_0u_0, P_{k_0}A\widetilde{P}_1\widetilde{u}_1\right) + \left(P_{k_0}A\widetilde{P}_1\widetilde{u}_1, \left(P_{k_0}AP_{k_0}\right)^{-1}P_{k_0}AP_0u_0\right) + \\ + \left(P_0AP_0u_0, u_0\right) + \left(\widetilde{P}_1AP_0u_0, \widetilde{u}_1\right) + \left(\widetilde{P}_1A\widetilde{P}_1\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_1\right). \end{gathered} \tag{51}$$

Берем в этом тождестве u_{k_0} в виде

$$u_{k_0} = -\left(P_{k_0}AP_{k_0}\right)^{-1}\left(P_{k_0}AP_0u_0 + P_{k_0}A\widetilde{P}_1\widetilde{u}_1\right),$$

$$\begin{gathered} (Au,u) = \left(\left(P_0AP_0 - P_0AP_{k_0}\left(P_{k_0}AP_{k_0}\right)^{-1}P_{k_0}AP_0\right)u_0, u_0\right) + \\ + \left(\left(P_0A\widetilde{P}_1 - P_0AP_{k_0}\left(P_{k_0}AP_{k_0}\right)^{-1}P_{k_0}A\widetilde{P}_1\right)\widetilde{u}_1, u_0\right) + \\ + \left(\left(\widetilde{P}_1AP_0 - \widetilde{P}_1AP_{k_0}\left(P_{k_0}AP_{k_0}\right)^{-1}P_{k_0}AP_0\right)u_0, \widetilde{u}_1\right) + \\ + \left(\left(\widetilde{P}_1A\widetilde{P}_1 - \widetilde{P}_1AP_{k_0}\left(P_{k_0}AP_{k_0}\right)^{-1}P_{k_0}A\widetilde{P}_1\right)\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_1\right) = \\ = \left(\widetilde{A}_{00}u_0 + \widetilde{A}_{01}\widetilde{u}_1, u_0\right) + \left(\widetilde{A}_{10}u_0 + \widetilde{A}_{11}\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_1\right) = \left(\widetilde{A}\widetilde{u}, \widetilde{u}\right), \quad \widetilde{u} := u_0 + \widetilde{u}_1 \in \widetilde{H}. \end{gathered} \tag{52}$$

Так как $u_0 \in H_0$, $\widetilde{u}_1 \in \widetilde{H}_1$ в (52) произвольны, то из этого тождества имеем $\left(\widetilde{A}\widetilde{u}, \widetilde{u}\right) \geqslant 0$, причем $\left(\widetilde{A}\widetilde{u}, \widetilde{u}\right) = 0$ лишь при $\widetilde{u} = u_0 + \widetilde{u}_1 = 0$. □

Перепишем задачу (50) в виде

$$\left(\widetilde{I} - \mu\widetilde{B}\right)\widetilde{u} = -\lambda\widetilde{A}\widetilde{u}, \quad \widetilde{B} := \operatorname{diag}\left(0;\ \widetilde{B}_1\right),\ \widetilde{u} = \left(u_0; \widetilde{u}_1\right)^t \in \widetilde{H}. \tag{53}$$

Итогом рассмотрения задачи (32) при условии (46) является

Теорема 9. *Если параметр μ принимает исключительное значение*

$$\mu = \lambda_{k_0}^{-1}(B) > 0,$$

которому отвечает конечнократное подпространство $H_{k_0}\mathcal{B}H_1$, то задача (32) имеет дискретный спектр $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=1}^{\infty}$, состоящий из конечнократных вещественных собственных значений с единственной предельной точкой $\lambda = -\infty$. Если $\varkappa$ — максимальное количество собственных элементов оператора B, удовлетворяющих условиям

$$1 - \mu\lambda_k(B) < 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \varkappa,$$

то собственные значения $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=1}^{\varkappa}$ положительны. Если $p := \dim H_{k_0}$, то $\lambda_{\varkappa+1}(\mu) = \ldots = \lambda_{\varkappa+p}(\mu) = 0$, а остальные собственные значения отрицательны. Собственные элементы $\{u_k\}_{k=1}^{\varkappa} \cup \{u_k\}_{k=\varkappa+p+1}^{\infty}$, отвечающие ненулевым собственным значениям, после проектирования на $\widetilde{H} := H \ominus H_{k_0}$, т.е. элементы $\{\widetilde{u}_k\}$, являющиеся решением задачи (53), образуют базис Рисса в $\widetilde{H}$, а собственные элементы $\{u_k\}_{k=\varkappa+1}^{\varkappa+p}$, отвечающие собственному значению $\lambda = 0$, можно выбрать образующими ортогональный базис в H_{k_0}. При этом объединение этих двух базисов является базисом Рисса в $H = H_0 \oplus H_{k_0} \oplus \widetilde{H}_1$, а элементы этого базиса можно выбрать удовлетворяющими следующим условиям ортонормировки:

$$\begin{gathered}
\left(\left(\widetilde{I} - \mu\widetilde{B}\right)\widetilde{u}_k, \widetilde{u}_l\right) = -\delta_{kl}, \quad 1 \leqslant k, l \leqslant \varkappa; \\
(u_k, u_l) = \delta_{k,l}, \quad \varkappa + 1 \leqslant k, l \leqslant \varkappa + p; \\
\left(\left(\widetilde{I} - \mu\widetilde{B}\right)\widetilde{u}_k, \widetilde{u}_l\right) = \delta_{kl} \quad k, l \geqslant \varkappa + p + 1; \\
\left(\widetilde{A}\widetilde{u}_k, \widetilde{u}_l\right) = -\lambda_k^{-1}(\mu)\left(\left(\widetilde{I} - \mu\widetilde{B}\right)\widetilde{u}_k, \widetilde{u}_l\right), \quad k, l \neq \varkappa + 1, \ldots, \varkappa + p.
\end{gathered} \tag{54}$$

Доказательство этой теоремы основано на том, что задача (53), рассматриваемая в пространстве $\widetilde{H} = H_0 \oplus \widetilde{H}_1$, идентична задаче (32), или задаче (37), в пространстве $H = H_0 \oplus H_1$. В самом деле, как и в задаче (37), в задаче (53) оператор $\widetilde{I}_1 - \mu\widetilde{B}_1$ обратим в $\widetilde{H}$, а оператор $\widetilde{A}$, согласно теореме 5, компактен и положителен. Поэтому для задачи (50) справедливы, с соответствующими изменениями, формулы перехода от (37) к (41), а затем леммы 4, 3 и теорема 7. Все эти рассуждения относятся к ненулевым собственным значениям задачи (49).

Что касается собственного значения $\lambda = 0$ задачи (49), то этот случай разобран выше, см. рассуждения после (49).

Отсюда следуют все утверждения данной теоремы, а также формулы ортогональности (54). □

Теорема 10. *Если параметр μ принимает исключительное значение*

$$\mu = \lambda_{k_0}^{-1}(B) > 0,$$

то для собственных значений $\lambda_k(\mu)$ задача (32) справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_k(\mu) = -\lambda_k^{-1}(A)(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Доказательство данной теоремы совпадает с доказательством соответствующего факта для случая положения [4], т.к. оно не зависит от того, является ли параметр μ вещественным или нет. □

Заключение

Основные результаты работы сформулированы в теоремах 5 и 7 для спектрального параметра μ и 9 для спектрального параметра λ. Остался не рассмотренным случай отрицательных исключительных значений параметра λ. Этому вопросу будет уделено внимание в дальнейших публикациях.

Автор благодарит Н.Д. Копачевского за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Агранович М.С., Менникен Р.* Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности // Математич. сборник. — 1976. — Т.1999, №1. — С. 29-68.
2. *Agranovich M.S., Katsenelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voitovich N.N.* Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory // Berlin: WILLEY-VCH Verlag. — 1999. — 377p. ISBN 3-527-40092-3
3. *Старков П.А.* Операторный подход к задачам сопряжения // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. — 2002. — Т15(54), №1. — с. 58-62
4. *Старков П.А.* Случай общего положения для операторного пучка, возникающего при исследовании задач сопряжения // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. — 2002. — Т15(54), №2. — с. 82-88.
5. *Копаческий Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: эфолюционные и спектральныезадачи. // Москва: Наука, 1989. — 416с.
6. *Горбачук В.И.* Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений // Функциональные и численные методы математической физики. Институт математики и механики: Сб.науч.тр./Редкол.:И.В. Скрыпник и др. — Киев: Наукова думка, 1988. — с. 60-63.
7. *Понтрягин Л.С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой // Изв. АН СССР. Сер.мат. — 1944. —Т.8, №6. — с. 243-280.