**УДК 517.98**

# ТЕОРЕМА БАНАХА-ГРОТЕНДИКА ДЛЯ ПРОЕКТИВНЫХ ШКАЛ ПРОСТРАНСТВ

**И.В. Орлов**

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Крым, Украина, 95007
email: *old@tnu.crimea.ua*

**Abstract.**

The paper is devoted to investigation of duality between projective and inductive scales of spaces. The notion of dual scale is introduced for projectively rigged projective scale of locally convex spaces (LCS). It allows to extend classical Banach and Banach-Grothendieck theorems on coarse reflexivity to the case of projective scales of LCS.

## Введение

Шкалы пространств, возникшие впервые в работе [1], получили широкое применение в теории интерполяции [2]-[5], теории обобщенных функций [6]-[10], теории общих эллиптических задач [8], [11]-[12], теории интегро-дифференциальных уравнений [13] и во многих других разделах современного анализа и его приложений. Перенос основных конструкций классического функционального анализа на анализ в шкалах пространств является назревшей задачей, решение которой способствовало бы существенному прогрессу в применении техники шкал к исследованию актуальных математических проблем. В работах [14]-[15] было показано, что фундаментальные результаты теории двойственности локально выпуклых пространств (ЛВП) — теорема Банаха-Гротендика и теорема Макки-Аренса могут быть сформулированы на языке шкал ЛВП и естественным образом обобщаются на индуктивные шкалы ЛВП. Однако, замкнутая конструкция теории двойственности шкал требует исследования двойственности проективных и индуктивных шкал пространств. Настоящая работа посвящена изучению данной проблемы.

Работа состоит из четырех разделов. В первом разделе вводятся основные понятия, связанные с двойственностью проективных и индуктивных шкал, решается вопрос об обратной двойственности, рассмотрены примеры. Во втором и третьем разделе базисные понятия проективного оснащения и проективного индекса функционала, введенные ранее для индуктивных шкал ЛВП, переносятся на проективные шкалы ЛВП. В четвертом разделе решается основная задача — перенос теорем Банаха и Банаха-Гротендика о слабой рефлексивности на случай проективно оснащенных проективных шкал ЛВП. Результаты интерпретируются на языке обобщенных функций.

Ближайшими перспективами дальнейших исследований являются: в области теории — изучение индуктивных оснащений и перенос теоремы Банаха-Гротендика на индуктивно-проективный случай, в области приложений — приложения в теории обобщенных функций и в теоремах об открытом отображении и замкнутом графике.

## 1. Двойственность проективных и индуктивных шкал пространств

Всюду далее $\overrightarrow{E} = \{E_i\}_{i\in I}$ и $\overleftarrow{F} = \{F^j\}_{j\in J}$ — соответственно, индуктивная и проективная шкала векторных пространств (множества $I$ и $J$ индуктивно упорядочены).

**Определение 1.** Будем говорить, что задана двойственность $\langle\overrightarrow{E}, \overleftarrow{F}\rangle$, если для любого $i \in I$ найдется $j \in J$, для которого задана двойственность $\langle E_i, F^j\rangle$(т.е. билинейная форма на $E_i \times F^j$), причем

$$(i_1 \preccurlyeq i_2, j_1 \preccurlyeq j_2) \Rightarrow \Big(\langle E_{i_1}, F^{j_2}\rangle = \langle E_{i_2}, F^{j_1}\rangle|_{E_{i_1}\times F^{j_2}}\Big). \tag{1}$$

Аналогично, задана двойственность $\langle\overleftarrow{F}, \overrightarrow{E}\rangle$, если для любого $j \in J$ найдется $i \in I$, для которого задана двойственность $\langle F^j, E_i\rangle$, причем

$$(i_1 \preccurlyeq i_2, j_1 \preccurlyeq j_2) \Rightarrow \Big(\langle F^{j_2}, E_{i_1}\rangle = \langle F^{j_1}, E_{i_2}\rangle|_{F^{j_2}\times E_{i_1}}\Big). \tag{2}$$

**Замечание 1.** Таким обзазом, *индуктивно-проективная двойственность* $\langle\overrightarrow{E}, \overleftarrow{F}\rangle$ представляет собой двойную шкалу билинейных форм $\{\langle E_i, F^j\rangle\}$, индуктивную по первой переменной и проективную по второй; *проективно-индуктивная двойственность* $\langle\overleftarrow{F}, \overrightarrow{E}\rangle$, соответственно, представляет собой двойную шкалу билинейных форм $\{\langle F^j, E_i\rangle\}$, проективную по первой переменной и индуктивную по второй.

**Определение 2.** Многозначные отображения

$$\bar{\delta} : \{j \in J| \quad \text{задана} \quad \text{двойственность} \quad \langle E_i, F^j\rangle\};$$

$$\underline{\delta} : \{i \in I| \quad \text{задана} \quad \text{двойственность} \quad \langle F^j, E_i\rangle\};$$

назовем, соответственно, *дуальными индексами* двойственностей $\langle\overrightarrow{E}, \overleftarrow{F}\rangle$ и $\langle\overleftarrow{F}, \overrightarrow{E}\rangle$. Для двойственностей с заданным дуальным индексом мы будем использовать запись $\langle\overrightarrow{E}, \overleftarrow{F}\rangle_{\bar{\delta}}$ и $\langle\overleftarrow{F}, \overrightarrow{E}\rangle_{\underline{\delta}}$.

**Замечание 2.** Назовем *лучом* в $J$ любое подмножество $J$, содержащее вместе с каждым своим элементом все последующие, и обозначим через $\mathrm{Ray}(J)$ множество всех лучей в $J$ (см. [16]-[17]) с частичным порядком, противоположным вложению. Множество $\mathrm{Ray}(J)$ индуктивно упорядочено; более того, оно образует структуру (решетку) относительно операций

$$J' \vee J'' = J' \cap J'' \quad \text{и} \quad J' \wedge J'' = J' \cup J''.$$

Легко видеть, что дуальный индекс $\bar{\delta}$ — *возрастающее* отображение из $I$ в $\mathrm{Ray}(J)$.

Аналогично, назовем *интервалом* в $I$ любое подмножество $I$, содержащее вместе с каждым своим элементом все предшествующие, и обозначим через $\mathrm{Int}(I)$ множество всех интервалов в $I$, с частичным порядком, соответствующим вложению. Множество $\mathrm{Int}(I)$ также индуктивно упорядочено и образует структуру (двойственную структуре $\mathrm{Ray}(I)$) относительно операций

$$I' \vee I'' = I' \cup I'' \quad \text{и} \quad I' \wedge I'' = I' \cap I''.$$

Дуальный индекс $\underline{\delta}$ также, как легко видеть, — *возрастающее* отображение из $J$ в $\mathrm{Int}(I)$.

**Пример 1.** Пусть $\overleftarrow{F}$ — проективная шкала ЛВП с плотными непрерывными вложениями:

$$(j_1 \preccurlyeq j_2) \Rightarrow \left( F^{j_2} \overset{d}{\hookrightarrow} F^{j_1} \right).$$

Тогда, как хорошо известно [8], [18] возникает естественное инъективное вложение сопряженных пространств в обратном порядке:

$$(j_1 \preccurlyeq j_2) \Rightarrow \left( F^{j_1 *} \overset{i}{\hookrightarrow} F^{j_2 *} \right),$$

т.е. соответствующая шкала сопряженных пространств $\overrightarrow{E} = \{F^{j*}\}_{j \in J}$ будет индуктивной. Дуальные индексы двойственностей $\langle \overrightarrow{E}, \overleftarrow{F} \rangle_{\bar{\delta}}$ и $\langle \overleftarrow{F}, \overrightarrow{E} \rangle_{\underline{\delta}}$ обладают свойствами:

$$j \in \bar{\delta}(j), \quad j \in \underline{\delta}(j) \quad (\forall j \in J).$$

Приведенный пример порождает естественный вопрос об обратной двойственности, которая всегда существует в случае пары пространств.

**Определение 3.** Двойственность $\langle \overrightarrow{E}, \overleftarrow{F} \rangle_{\bar{\delta}}$ назовем *замкнутой*, если $\bigcup\limits_{i \in J} \bar{\delta}(i) = J$. Аналогично, назовем *замкнутой* двойственность $\langle \overleftarrow{F}, \overrightarrow{E} \rangle_{\underline{\delta}}$, если $\bigcup\limits_{j \in J} \underline{\delta}(j) = I$.

**Замечание 3.** Заметим, что любую двойственность можно привести к замкнутому виду: в случае индуктивно-проективной двойственности достаточно заменить $J$ на луч $J' = \bigcup\limits_{i \in I} \bar{\delta}(i)$ и шкалу $\overleftarrow{F}$ на $\overleftarrow{F'} = \{F^j\}_{j \in J'}$; аналогично, в случае проективно-индуктивной двойственности достаточно заменить $I$ на интервал $I' = \bigcup\limits_{j \in J} \underline{\delta}(j)$ и шкалу $\overrightarrow{E}$ на $\overrightarrow{E'} = \{E_i\}_{i \in I'}$.

**Предложение 1.** Если $\langle \overrightarrow{E}, \overleftarrow{F}\rangle_{\bar\delta}$ — замкнутая индуктивно-проективная двойственность, то система

$$\langle \overleftarrow{F}, \overrightarrow{E}\rangle_{\bar\delta^{-1}} \equiv \langle \overrightarrow{E}, \overleftarrow{F}\rangle_{\bar\delta}^{-1} := \{\langle F^j, E_i\rangle\}_{j\in J, i\in\bar\delta^{-1}(j)}$$

образует замкнутую проективно-индуктивную двойственность, которую мы назовем *обратной* к $\langle \overrightarrow{E}, \overleftarrow{F}\rangle_{\bar\delta}$. Аналогично, если $\langle \overleftarrow{F}, \overrightarrow{E}\rangle_{\underline{\delta}}$ — замкнутая индуктивно-проективная двойственность, то система

$$\langle \overrightarrow{E}, \overleftarrow{F}\rangle_{\underline{\delta}^{-1}} \equiv \langle \overleftarrow{F}, \overrightarrow{E}\rangle_{\underline{\delta}}^{-1} := \{\langle E_i, F^j\rangle\}_{i\in I, j\in\underline{\delta}^{-1}(i)}$$

образует замкнутую индуктивно-проективную двойственность, которую мы назовем *обратной* к $\langle \overleftarrow{F}, \overrightarrow{E}\rangle_{\underline{\delta}}$. При этом соответствующие дуальные индексы имеют вид:

$$\bar\delta^{-1}(j) = \{i\in I | j\in\bar\delta(i)\}; \quad \underline{\delta}^{-1}(i) = \{j\in J | i\in\underline{\delta}(j)\}.$$

**Доказательство.** Проведем доказательство для случая $\langle \overrightarrow{E}, \overleftarrow{F}\rangle_{\bar\delta}$. В силу замкнутости, для любого $j\in J$ двойственность $\langle F^j, E_i\rangle$ (как обратная к $\langle E_i, F^j\rangle$) определена для некоторого $i\in I$. Поскольку $(i'\preccurlyeq i) \Rightarrow (\bar\delta(i')\supset\bar\delta(i)\ni j)$, то $\bar\delta^{-1}$ — отображение $J$ в $\mathrm{Int}(I)$ (очевидно, возрастающее), т.е. дуальный индекс проективно-индуктивной двойственности. При этом $\bar\delta_{-1}(J) = \{i\in I|\exists j\in J : j\in\bar\delta(i)\} = I.\square$

**Следствие 1.** *Для замкнутых двойственностей обращение рефлексивно:*

$$\left(\langle \overrightarrow{E}, \overleftarrow{F}\rangle_{\bar\delta}^{-1}\right)^{-1} = \langle \overrightarrow{E}, \overleftarrow{F}\rangle_{\bar\delta}; \qquad \left(\langle \overleftarrow{F}, \overrightarrow{E}\rangle_{\underline{\delta}}^{-1}\right)^{-1} = \langle \overleftarrow{F}, \overrightarrow{E}\rangle_{\underline{\delta}}.$$

**Доказательство.** Действительно,

$$(j\in(\bar\delta^{-1})^{-1}(i)) \Leftrightarrow (i\in\bar\delta^{-1}(j)) \Leftrightarrow (j\in\bar\delta(i)),$$

откуда $(\bar\delta^{-1})^{-1} = \bar\delta$. Аналогично проверяется, что $(\underline{\delta}^{-1})^{-1} = \underline{\delta}.\square$

Перенесем теперь на случай двойственности индуктивной и проективной шкал пространств важное в приложениях понятие отделимости.

**Определение 4.** Для заданной замкнутой двойственности $\langle \overrightarrow{E}, \overleftarrow{F}\rangle_{\bar\delta}$ положим:

$$\ker\langle E_i|F^j\rangle_{\bar\delta} := \{x\in E_i|\langle x, F^j\rangle = 0\}; \quad (i\in I, j\in\bar\delta(i));$$

$$\ker\langle F^j|E_i\rangle_{\bar\delta} := \{f\in F^j|\langle E_i, f\rangle = 0\}; \quad (j\in J, \bar\delta(i)\ni j).$$

Назовем двойственность $\langle \overrightarrow{E}, \overleftarrow{F}\rangle_{\bar\delta}$ отделимой по $\overrightarrow{E}$, если для любого $i\in I$ :

$$\bigcap_{j\in\bar\delta(i)} \ker\langle E_i|F^j\rangle_{\bar\delta} = \{0\}, \quad \text{т.е.} \quad \forall 0\neq x\in E_i \quad \exists j\in\bar\delta(j) : \langle x, F^j\rangle \neq 0; \tag{3}$$

и отделимой по $\overleftarrow{F}$, если для любого $j\in J$ :

$$\bigcap_{i:\bar\delta(i)\ni j} \ker\langle F^j|E_i\rangle_{\bar\delta} = \{0\}, \quad \text{т.е.} \quad \forall 0\neq f\in F^j \quad \exists i, \bar\delta(i)\ni j : \langle E_i, f\rangle \neq 0; \tag{4}$$

Аналогично, замкнутая двойственность $\langle\overleftarrow{F},\overrightarrow{E}\rangle_{\underline{\delta}}$ отделима по $\overleftarrow{F}$, если для любого $j\in J$ :

$$\bigcap_{i\in\underline{\delta}(j)}\ker\langle F^j|E_i\rangle_{\underline{\delta}}=\{0\},\quad \text{т.е.}\quad \forall 0\neq f\in F^j\quad \exists i\in\underline{\delta}(j):\langle f,E_i\rangle\neq 0; \tag{5}$$

и отделима по $\overrightarrow{E}$, если для любого $i\in I$ :

$$\bigcap_{j:\underline{\delta}(j)\ni i}\ker\langle E_i|F^j\rangle_{\underline{\delta}}=\{0\},\quad \text{т.е.}\quad \forall 0\neq x\in E_i\quad \exists j,\underline{\delta}(j)\ni i:\langle F^j,x\rangle\neq 0; \tag{6}$$

**Замечание 4.** Нетрудно видеть, что в случае тривиальных шкал $\overrightarrow{E}=\{E\}$ и $\overleftarrow{F}=\{F\}$ отделимость двойственности в смысле определения 4 сводится к классической, а именно:

а) в соответствии с (3), отделимость $\langle E,F\rangle$ по $E$ означает, что для всякого $0\neq x\in E$ верно $\langle x,F\rangle\neq 0$, т.е. элементы $F$ отделяют точки в $E$;

б) в соответствии с (4), отделимость $\langle E,F\rangle$ по $F$ означает, что для всякого $0\neq f\in F$ верно $\langle E,f\rangle\neq 0$, т.е. различные элементы $F$ можно рассматривать как различные линейные функционалы на $E$.

Аналогичным образом, отделимость $F,E$ в смысле условий (5) и (6) сводится к классической. Дуальные индексы в этих случаях тривиальны.

В общем случае отделимость двойственности шкал можно трактовать сходным образом, а именно:

а) в соответствии с (3), отделимость $\langle\overrightarrow{E},\overleftarrow{F}\rangle_{\bar{\delta}}$ по $\overrightarrow{E}$ означает, что элементы $\overleftarrow{F}$ (трактуемые как шкалы $\{f^j\in F^j\}_{j\in J}$) отделяют точки в каждом из пространств $E_i$ шкалы $\overrightarrow{E}$;

б) в соответствии с (4), отделимость $\langle\overrightarrow{E},\overleftarrow{F}\rangle_{\bar{\delta}}$ по $\overleftarrow{F}$ означает, что элементы $\overleftarrow{F}$ можно рассматривать как различные шкалы линейных функционалов на $\overrightarrow{E}$

Аналогично трактуется и отделимость $\langle\overleftarrow{F},\overrightarrow{E}\rangle_{\underline{\delta}}$.

Легко убедиться, что условия отделимости взаимно обратных двойственностей по симметричным переменным равносильны.

**Предложение 2.** Замкнутая двойственность $\langle\overrightarrow{E},\overleftarrow{F}\rangle_{\bar{\delta}}$ отделима по $\overrightarrow{E}$ (по $\overleftarrow{F}$) тогда и только тогда, когда обратная двойственность $\langle\overrightarrow{E},\overleftarrow{F}\rangle_{\bar{\delta}}^{-1}=:\langle\overleftarrow{F},\overrightarrow{E}\rangle_{\underline{\delta}^{-1}}$ отделима по $\overrightarrow{E}$ (по $\overleftarrow{F}$).

**Доказательство.** В соответствии с предложением 1, $\underline{\delta}(j)=\bar{\delta}^{-1}(j)=\{i\in I|j\in\bar{\delta}(i)\}$, т.е. условия $j\in\bar{\delta}(i)$ и $i\in\underline{\delta}(j)$ равносильны. Поскольку $\langle x,F^j\rangle=\langle F^j,x\rangle$, то отсюда вытекает равносильность условий (3) и (6). Равносильность условий (4) и (5) проверяется аналогично.$\square$

В заключение, возвращаясь к примеру 1, заметим, что двойственность проективной шкалы отделимых ЛВП с плотными вложениями и соответствующей индуктивной шкалы сопряженных пространств, очевидно, отделима по каждой из переменных.

## 2. Проективные оснащения проективных шкал пространств

**Определение 5.** Пусть $r : J \to \mathrm{Int}(I)$ — возрастающее отображение, и для каждого $j \in J$ в $F^j$ задана система топологий $\{r_i(F^j)\}_{i\in r(j)}$, удовлетворяющая условиям:

а) для любого $j \in J$ шкала ЛВП $\overleftarrow{F_r^j} := \{(F^j, r_i(F^j))\}_{i\in r(j)}$ — проективная;

б) для любого $i \in I$ шкала ЛВП $\overleftarrow{F}_{i,r} := \{(F^j, r_i(F^j))\}_{j:i\in r(j)}$ — проективная.

Систему

$$r(\overleftarrow{F}) = \{r_i(F^j)\}_{j\in J, i\in r(j)}$$

назовем *проективным оснащением* шкалы $\overleftarrow{F}$, отображение $r$*-индексом* оснащения $r(\overleftarrow{F})$, пару $\overleftarrow{F}_r = (\overleftarrow{F}, r(\overleftarrow{F}))$ — *проективно оснащенной* проективной шкалой, проективные топологии в $F^j$ :

$$r(F^j) := \varprojlim_{i\in p(j)} r_i(F^j)$$

— *топологиями, порожденными оснащением* $r(\overleftarrow{F})$.

**Замечание 5.** Топологии, порожденные проективным оснащением, превращают $\overleftarrow{F}$ в проективную шкалу ЛВП

$$\{(F^j, r(F^j))\}_{j\in J},$$

которую мы также обозначим символом $\overleftarrow{F}_r$. Отметим, что проективные оснащения индуктивных шкал пространств введены в [14]-[15].

**Определение 6.** Пусть $\langle \overleftarrow{F}, \overrightarrow{E} \rangle_\delta$ — двойственность. Будем говорить, что проективное оснащение $r(\overleftarrow{F})$ шкалы $\overleftarrow{F}$ *подчинено данной двойственности*, если:

- для любого $j \in J : \delta(j) \preccurlyeq r(j)$;
- для любых $j \in J, i \in \delta(j)$ топология $r_i(F^j)$ согласована с двойственностью $\langle F^j, E_i\rangle$, т.е. $(F^j, r_i(F^j))^* \cong E_i$.

**Пример 2. (Примеры оснащений, подчиненных двойственности).** Пусть $\langle \overleftarrow{F}, \overrightarrow{E} \rangle_\delta$ — проективно-индуктивная двойственность, отделимая по $\overrightarrow{E}$. Согласно теореме Макки-Аренса [19]-[20], для топологий $t_i(F^j)$, где $i \in \delta(j)$, удовлетворяющих неравенству

$$\sigma(F^j, E_i) \preccurlyeq t_i(F^j) \preccurlyeq \tau(F^j, E_i) \tag{7}$$

(здесь $\sigma$ и $\tau$, соответственно, — слабая топология и топология Макки, см. [19], порожденные данной двойственностью), верно $(F^j, t_i(F^j))^* = E_i$. Таким образом, если топологии $t_i(F^j)$ выбраны так, что образуют проективное оснащение $t(\overleftarrow{F})$, то это оснащение автоматически подчинено двойственности $\langle \overleftarrow{F}, \overrightarrow{E} \rangle_\delta$. Рассмотрим конкретные примеры.

- *Слабое оснащение*: $\sigma(\overleftarrow{F}, \overrightarrow{E}) := \{\sigma(F^j, E_i)\}_{j \in J, i \in \delta(j)}$.
- *Оснащение Макки*: $\tau(\overleftarrow{F}, \overrightarrow{E}) := \{\tau(F^j, E_i)\}_{j \in J, i \in \delta(j)}$.
- *Оснащение Аренса*: $\chi(\overleftarrow{F}, \overrightarrow{E}) := \{\chi(F^j, E_i)\}_{j \in J, i \in \delta(j)}$, где $\chi(F^j, E_i)$ — топологии Аренса в $F^j$ [19].
- *Сильное оснащение*: $\beta(\overleftarrow{F}, \overrightarrow{E}) := \{\beta(F^j, E_i)\}_{j \in J, i \in \delta(j)}$, где $\beta(F^j, E_i)$ — сильные топологии в $F^j$. Это оснащение требует наличия исходных топологий в пространствах шкалы $\overrightarrow{E}$, не удовлетворяет, вообще говоря, условиям (7) и согласовано с двойственностью лишь в случае, когда $\overrightarrow{E}$ — шкала полурефлексивных ЛВП.

Рассмотрим еще один полезный пример оснащения, которое можно связать с любой проективной шкалой ЛВП. Аналогичная конструкция для индуктивных шкал ЛВП рассмотрена в [16]-[17].

**Пример 3. (нормальное оснащение).** Пусть $\overleftarrow{F} = \{(F^j, t(F^j))\}_{j \in J}$. Свяжем с каждой топологией $t(F^j)$ максимальное определяющее семейство попарно неэквивалентных преднорм $\{||\cdot||_{ji}\}_{i \in \delta(j)}$ и обозначим через $\{\lambda_i(F^j)\}_{i \in \delta(j)}$ семейство порождаемых ими топологий $F^j$. Без ограничения общности можно считать, что условия а)–б) определения 5 для системы

$$\lambda(\overleftarrow{F}) = \{\lambda_i(F^j)\}_{j \in J, i \in \delta(j)} \tag{8}$$

выполнены. Проективное оснащение (8) назовем *нормальным оснащением* шкалы $\overleftarrow{F}$. Отметим, что сопряженные пространства имеют вид:

$$\big(F^j, \lambda_i(F^j)\big)^* = \{\Lambda \in (F^j)^* \Big| ||\Lambda||^{ji} := \sup_{||f||_{ji} \leqslant 1} |\Lambda(f)| < \infty\}.$$

## 3. Проективные индексы и индуктивные разложения

**Определение 7.** Пусть $\overleftarrow{F}$ — проективная шкала ЛВП. В соответствии с общим определением согласованного семейства операторов на шкале ЛВП [13], назовем (непрерывной) *проективной функциональной шкалой* на $\overleftarrow{F}$ систему линейных непрерывных функционалов $\overleftarrow{\Lambda} = \{\Lambda^j \in F^{j*}\}_{j \in J'}$, где $J'$ — некоторый луч в $J$, удовлетворяющую условию:

$$(j_1 \preccurlyeq j_2) \Rightarrow \Big(\Lambda^{j_2} = \Lambda^{j_1}\Big|_{F^{j_2}}\Big); \quad (j_1, j_2 \in J').$$

Множество $J(\overleftarrow{\Lambda}) := J'$ назовем *базой* функциональной шкалы $\overleftarrow{\Lambda}$. Множество всех проективных функциональных шкал на $\overleftarrow{F}$ обозначим через $\overleftarrow{F}^*$ и назовем (топологическим) сопряженным пространством к $\overleftarrow{F}$.

Целью этого раздела является классификация функциональных шкал на проективно оснащенной шкале ЛВП в соответствии с типом их непрерывности относительно оснащения.

**Определение 8.** Пусть $\overleftarrow{F}_r = \left(\overleftarrow{F}, r(\overleftarrow{F})\right)$ — проективно оснащенная шкала ЛВП, $\overleftarrow{\Lambda} \in \overleftarrow{F}_r^*$. Тогда для всякого $j \in J(\overleftarrow{\Lambda})$ найдется такое $i \in r(j)$, что $\Lambda^j \in (F^j, r_i(F^j))^*$. Положим

$$\rho_{\overleftarrow{\Lambda}}(j) := \{i \in r(j) | \Lambda^j \in \left(F^j, r_i(F^j)\right)^*\}.$$

Многозначное отображение $\rho_{\overleftarrow{\Lambda}}$ назовем *проективным индексом функциональной шкалы* $\overleftarrow{\Lambda}$ (относительно оснащения $r(\overleftarrow{F})$).

**Замечание 6.** Назовем *отрезком* в $I$ любой луч $I_1$, содержащийся в некотором интервале из $I$, т.е. подмножество $I$, содержащее вместе с любыми своими двумя элементами все возможные промежуточные элементы:

$$(i_1 \preccurlyeq i_3 \preccurlyeq i_2; i_1, i_2 \in I_1) \Rightarrow (i_3 \in I_1)\,.$$

Обозначим через $\mathrm{Segm}(I)$ множество всех отрезков в $I$ и введем в нем частичный порядок, противоположный вложению. Легко видеть, что проективный индекс $\rho_{\overleftarrow{\Lambda}}$ любой функциональной шкалы $\overleftarrow{\Lambda} \in \overleftarrow{F}_r^*$ есть убывающее отображение

$$\rho_{\overleftarrow{\Lambda}} : J(\overleftarrow{\Lambda}) \longrightarrow \mathrm{Segm}(I).$$

Любое убывающее отображение $\rho : J' \to \mathrm{Segm}(I)$, где $J'$ — луч в $J$, также назовем *проективным индексом*; множество $J(\rho) := J'$ назовем *базой* индекса $\rho$. Наконец, обозначим через $P(r) := \{\rho\}$ множество всех проективных индексов, порожденных оснащением $r(\overleftarrow{F})$. Введем в $P(r)$ индуктивный порядок:

$$(\rho_1 \preccurlyeq \rho_2) :\Leftrightarrow (\forall j \in J(\rho_1) \cap J(\rho_2) : \rho_1(j) \preccurlyeq \rho_2(j)).$$

**Определение 9.** Пусть $\overleftarrow{F_r}$ — проективно оснащенная шкала ЛВП. Для каждого проективного индекса $\rho \in P(r)$ положим

$$\overleftarrow{F}^{*\rho} := \{\overleftarrow{\Lambda} \in \overleftarrow{F}_r^* | \rho_{\overleftarrow{\Lambda}} \preccurlyeq \rho\}.$$

Разложение $\overleftarrow{F}_r^*$ в индуктивную шкалу векторных пространств

$$\overrightarrow{\overleftarrow{F}}{}_r^* := \{\overleftarrow{F}^{*\rho}\}_{\rho \in P(r)} \tag{9}$$

назовем *индуктивным разложением* пространства $\overleftarrow{F}_r^*$. Шкалу (9) мы также будем называть *сопряженной шкалой* к проективно оснащенной шкале $\overleftarrow{F}_r$.

**Пример 4 (нормально сопряженная шкала).** Пусть $\overleftarrow{F}_\lambda = \left(\overleftarrow{F}, \lambda(\overleftarrow{F})\right)$ — нормально оснащенная проективная шкала ЛВП (см. пример 3), $\lambda_i(F^j) \sim \| \cdot \|_{ji}$. Тогда для любого нормального (проективного) индекса $\rho \in P(\lambda)$ имеем:

$$F^{*\rho} = \{ \overleftarrow{\Lambda} \in \overleftarrow{F}^*_\lambda \Big| \forall j \in J(\rho) \cap J(\overleftarrow{\Lambda}) \forall i \in \rho(j) : \| \Lambda^j \|^{ji} < \propto \}.$$

Сопряженную шкалу $\overleftrightarrow{F}^*_\lambda$ назовем *нормально сопряженной шкалой к* $\overleftarrow{F}_\lambda$. Отметим, что в [21] исследовались нормально сопряженные шкалы к проективно оснащенным индуктивным шкалам ЛВП, в [17, 22] — аналогичные нормальные разложения операторных пространств над ЛВП. Отметим также, что в случае, когда $\overleftarrow{F}_\lambda$ — шкала банаховых пространств (тривиальное нормальное оснащение), сопряженная шкала сводится к одному пространству:

$$\overleftarrow{F}^*_\lambda = \{ \overleftarrow{\Lambda} \Big| \forall j \in J(\overleftarrow{\Lambda}) : \| \Lambda^j \|^j < \propto \}.$$

Покажем теперь, что шкалы $\overleftarrow{F}_r$ и $\overleftrightarrow{F}^*_r$ образуют двойственность.

**Предложение 3.** Если $\overleftarrow{F}_r$ — проективно оснащенная шкала ЛВП, то $\langle \overleftarrow{F}_r, \overleftrightarrow{F}^*_r \rangle$ и $\langle \overleftrightarrow{F}^*_r, \overleftarrow{F}_r \rangle$ образуют двойственности относительно естественного спаривания $\langle f^j, \overleftarrow{\Lambda} \rangle = \langle \overleftarrow{\Lambda}, f^j \rangle = \Lambda^j(f^j)$.

**Доказательство.** Действительно, для всякого $j \in J$ найдется такое $\rho \in P(r)$, что $j \in J(\rho)$. В этом случае определена двойственность $\langle F^j, \overleftarrow{F}^{*\rho} \rangle$. Обратно, для всякого $\rho \in P(r)$ найдется $j \in J(\rho)$, что определена обратная двойственность $\langle \overleftarrow{F}^{*\rho}, F^j \rangle$. Условия согласованности (1)-(2) проверяются непосредственно.

**Определение 10.** Назовем двойственность $\langle \overleftarrow{F}_r, \overleftrightarrow{F}^*_r \rangle$ *естественной двойственностью*, порожденной проективным оснащением $r(\overleftarrow{F})$.

Легко видеть, что естественная двойственность всегда отделима по $\overleftrightarrow{F}^*_r$, а в случае, когда $\overleftarrow{F}_r$ — шкала отделимых ЛВП, — отделима и по $\overleftarrow{F}_r$.

## 4. Теоремы Банаха и Банаха-Гротендика для проективно-индуктивной двойственности

В этом разделе излагаются основные результаты работы. Мы покажем, что естественная двойственность, порожденная оснащением, подчиненным исходной двойственности, совпадает с этой двойственностью.

**Теорема 1 (Обобщенная теорема Банаха для проективно-индуктивной двойственности).** *Если замкнутая двойственность* $\langle \overleftarrow{F}, \overleftarrow{F} \rangle_\delta$ *отделима по* $\overrightarrow{E}$, *то* *имеет место изоморфизм*

$$\overleftrightarrow{F}^{*}_{\sigma} := \overrightarrow{\left(\overleftarrow{F}, \sigma(\overleftarrow{F}, \overrightarrow{E})\right)^{*}} \cong \overrightarrow{E}. \tag{10}$$

**Доказательство.** Пусть $\overleftarrow{\Lambda} = \{\Lambda^j\}_{j \in J(\overleftarrow{\Lambda})}$ — произвольная функциональная шкала на $\left(\overleftarrow{F}, \sigma(\overleftarrow{F}, \overrightarrow{E})\right)$. В соответствии с определением 7, для любого $j \in J(\overleftarrow{\Lambda})$ верно $\Lambda^j \in (F^j, \sigma(F^j))^*$, где $\sigma(F^j)$ — проективная топология относительно семейства $\{\sigma(F^j, E_i)\}_i \in \delta(j)$. Вводя индуктивный (векторный) предел $E^j := \varinjlim\limits_{i \in \delta(j)} E_i$, и учитывая, что $\sigma(F^j) = \sigma(F^j, E^j)$, имеем при всех $j \in J(\overleftarrow{\Lambda})$:

$$\Lambda^j \in \left(F^j, \sigma(F^j, E^J)\right)^*$$

1) Фиксируем $j \in J(\overleftarrow{\Lambda})$ и, применяя классическую теорему Банаха о слабой рефлексивности [19] к двойственности $\langle F^j, E^j \rangle$, найдем индекс $i \in \delta(j)$ и точку $x_i^j \in E_i$, что $\Lambda^j = \langle \cdot, x_i^j \rangle$; здесь единственность $x_i^j$ еще не гарантирована. Для каждого $i \in \delta(j)$ обозначим:

$$X_i^j = \{x_i^j \in E_i \Big| \Lambda^j = \langle \cdot, x_i^j \rangle\}.$$

Если $x_i^{j,1}$ и $x_i^{j,2}$ принадлежит $X_i^j$, то при любом $f^j \in F^j$ имеем $\Lambda^j(f^j) = \langle f^j, x_i^{j,1} \rangle = \langle f^j, x_i^{j,2} \rangle$, откуда $x_i^{j,1} - x_i^{j,2} \in \ker\langle E_i | F^j \rangle$. Следовательно,

$$X_i^j = x_i^{j,1} + \ker\langle E_i | F^j \rangle = x_i^{j,2} + \ker\langle E_i | F^j \rangle,$$

то есть

$$X_i^j - X_i^j \subset \ker\langle E_i | F^j \rangle. \tag{11}$$

2) Фиксируем теперь $i \in I$. Так как, по условию, двойственность $\langle \overleftarrow{F}, \overrightarrow{E} \rangle_\delta$ отделима по $\overrightarrow{E}$, то из (11) и определения 4 следует:

$$\bigcap_{j: i \in \delta(j)} \left(X_i^j - X_i^j\right) \subset \bigcap_{j: i \in \delta(j)} \ker\langle E_i | F^j \rangle = \{0\}. \tag{12}$$

Наконец, т.к.

$$\bigcap_{j: i \in \delta(j)} X_i^j - \bigcap_{j: i \in \delta(j)} X_i^j \subset \bigcap_{j: i \in \delta(j)} \left(X_i^j - X_i^j\right), \tag{13}$$

то из (12) и (13) получаем

$$\bigcap_{j: i \in \delta(j)} X_i^j - \bigcap_{j: i \in \delta(j)} X_i^j = \{0\},$$

откуда множество $X_i := \bigcap\limits_{j: i \in \delta(j)} X_i^j = \{x_i\}$ — одноточечное. Следовательно, $\Lambda^j = \langle \cdot, x_i \rangle$.

3) Поскольку система $\{X_i\}_{i \in I}$ индуктивно упорядочена по вложению

$$(i_1 \preccurlyeq i_2) \Rightarrow (\{j | i_2 \in \delta(j)\} \subset \{j | i_1 \in \delta(j)\}) \Rightarrow (X_{i_1} \subset X_{i_2}),$$

то множество

$$X := \bigcup_{i\in I} X_i = \{x \in E = \bigcup_{i\in I} E_i \Big| \forall j \in J(\overleftarrow{\Lambda}) : \Lambda^j = \langle \cdot, x\rangle \Big|_{F^j} \}$$

также одноточечно. Обратно, для любого $x \in E$ функционалы $\Lambda^j = \langle \cdot, x\rangle|_{F^j}$ (определенные для всех $j \in \delta(i)$ при $x \in E_i$), очевидно образуют проективную функциональную шкалу $\overleftarrow{\Lambda} \in \overleftarrow{F}^*_\sigma$. Таким образом, установлено взаимно-однозначное соответствие между носителями шкал $E = |\overrightarrow{E}|$ и $\overleftarrow{F}^*_\sigma = \left|\overrightarrow{\left(\overleftarrow{F}, \sigma(\overleftarrow{F}, \overrightarrow{E})\right)^*}\right|$.

4) Наконец, проверим изоморфизм между пространствами шкал. Если $\overleftarrow{\Lambda} = \langle \cdot, x_{i_0}\rangle$, где $x_{i_0} \in E_{i_0}$, то $\overleftarrow{\Lambda} \in \overleftarrow{F}^{*\rho_0}$, где $\rho_0(j) \equiv i_0$, $J(\rho_0) = \{j \in J : i_0 \in \delta(j)\}$. Отсюда следует векторный изоморфизм $F^{*\rho_0} \cong E_{i_0}$, а значит, и изоморфизм шкал (10).$\square$

Отметим частные случаи, когда одна из шкал двойственности тривиальна (т.е. сводится к одному пространству).

**Следствие 2.** Если замкнутая двойственность $\langle F, \overrightarrow{E}\rangle$ отделима по $\overrightarrow{E}$, то имеет место изоморфизм:

$$\overrightarrow{F}^*_\sigma := \overrightarrow{\left(F, \sigma(F, \overrightarrow{E})\right)^*} \cong \overrightarrow{E}.$$

**Следствие 3.** Если замкнутая двойственность $\langle \overleftarrow{F}, E\rangle$ отделима по $E$, то имеет место изоморфизм:

$$\overleftarrow{F}^*_\sigma := \left(\overleftarrow{F}, \sigma(\overleftarrow{F}, E)\right)^* \cong E.$$

Теперь получим обобщенную теорему Банаха-Гротендика, которая фактически также является следствием теоремы 1.

**Теорема 2** (**Обобщенная теорема Банаха-Гротендика для оснащенных проективных шкал ЛВП**). *Пусть $\overleftarrow{F}_r$ — линейная проективно оснащенная шкала ЛВП с плотными вложениями. Тогда двойственность $\langle \overleftarrow{F}, \overleftrightarrow{F}^*_r\rangle$ отделима по $\overleftrightarrow{F}^*_r$, и, следовательно, имеет место изоморфизм*

$$\overrightarrow{\left(\overleftarrow{F}, \sigma(\overleftarrow{F}, \overleftrightarrow{F}^*_r)\right)^*} \cong \overleftrightarrow{F}^*_r.$$

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что $I$ имеет начальный элемент $i_0$, тогда $i_0 \in \delta(j)$ при любом $j \in J$. Фиксируем $\rho \in P(r)$, $j_0 \in J(\rho)$ и выберем произвольно $f^{j_0} \in (F^{j_0}, r_{i_0}(F^{j_0}))^*$. Так как, согласно определению 5, система $\overleftarrow{F}_{r,i_0} := \{(F^j, r_{i_0}(F^j))\}_{j\in J}$ образует проективную (и линейную, в силу условий теоремы) шкалу ЛВП, то, меняя порядок в $J$ на противоположный: $J \to J^-$, мы получим индуктивную шкалу ЛВП

$$\overleftarrow{F}^-_{r,i_0} := \{(F^j, r_{i_0}(F^j))\}_{j\in J^-}.$$

Согласно следствию из обобщенной теоремы Хана-Банаха [23]-[24], функционал $f^{j_0}$ можно продолжить с пространства $(F^{j_0}, r_{i_0}(F^{j_0}))$ до индуктивной функциональной шкалы $\overleftarrow{f}^{\,-}$ на линейной индуктивной шкале ЛВП $\overleftarrow{F^-}_{r,i_0}$. Ввиду плотности вложений, такое продолжение однозначно. Снова меняя порядок в $J^-$ на исходный: $J^- \to J$, мы получим проективную функциональную шкалу $\overleftarrow{f}$ на проективной шкале ЛВП $\overleftarrow{F}_{r,i_0}$. Ввиду непрерывных вложений

$$\big(F^j, r(F^j)\big) \overset{c}{\hookrightarrow} \big(F^j, r_{i_0}(F^j)\big)\,, (j \in J)$$

$\overleftarrow{f}$ является проективной функциональной шкалой и на шкале ЛВП $\overleftarrow{F}_r$. Таким образом, $\overleftarrow{F}^{*\rho} \hookleftarrow (F^j, r(F^j))^*$ для любого $j \in J(\rho)$, откуда

$$\ker\langle \overleftarrow{F}^{*\rho} \big| F^j\rangle \hookrightarrow \ker\langle \big(F^j, r(F^j)\big)^* \big| F^j\rangle = \{0\},$$

откуда для любого $\rho \in P(r)$:

$$\bigcap_{j\in J(\rho)} \ker\langle \overleftarrow{F}^{*\rho} \big| F^j\rangle = \{0\},$$

т.е. двойственность $\langle \overleftarrow{F}, \overrightarrow{\overleftarrow{F}}{}^*_r\rangle$ отделима по $\overrightarrow{\overleftarrow{F}}{}^*_r$. Остается применить теорему 1. $\square$

Здесь мы также выделим частные случаи, когда одна из шкал двойственности $\langle \overleftarrow{F}, \overrightarrow{\overleftarrow{F}}{}^*_r\rangle$ сводится к единственному ЛВП.

**Следствие 4.** *Если $F_r$ — проективно оснащенное ЛВП, то имеет место изоморфизм*

$$\Big(F, \sigma(F, \overrightarrow{F}{}^*_r)\Big)^* \cong \overrightarrow{F}{}^*_r.$$

Другими словами, при переходе к слабому оснащению $F$ проективные индексы функционалов не меняются.

**Следствие 5.** *Если $\overleftarrow{F}_r$ — линейная проективная шкала банаховых пространств с плотными вложениями, то имеет место изоморфизм*

$$\Big(\overleftarrow{F}, \sigma(\overleftarrow{F}, \overleftarrow{F}{}^*_r)\Big)^* \cong \overleftarrow{F}{}^*_r.$$

Другими словами, при переходе к слабым топологиям в пространствах шкалы $\overleftarrow{F}$ сопряженное пространство (функциональных шкал на $\overleftarrow{F}$) не изменяется. В терминах обобщенных функций последние два утверждения выглядят следующим образом:

a) если пространство основных функций $\mathcal{F}$ — проективно оснащенное ЛВП (см. [8]), то при переходе к слабому оснащению для пространства обобщенных функций $\mathcal{F}$ сохраняется теорема о конечном порядке;

б) если пространство основных функций $\mathcal{F}$ есть предел линейной проективной шкалы банаховых пространств $\overleftarrow{F}_r$, то при переходе к слабым топологиям в пространствах шкалы $\overleftarrow{F}$ каждая обобщенная функция из $\mathcal{F}'$ может быть продолжена на $\overleftarrow{F}$.

Отметим в заключение, что в силу теоремы Макки-Аренса [19]-[20], замена слабой топологии $\sigma(F^j, F^{*\rho})$ в $F^j$ на любую топологию, удовлетворяющую неравенству

$$\sigma(F^j, F^{*\rho}) \preccurlyeq t_\rho(F^j) \preccurlyeq \tau(F^j, F^{*\rho}),$$

не меняет сопряженного пространства. Это позволяет перенести теорему 2 на более широкий класс оснащений.

**Следствие 6.** *Пусть $\overleftarrow{F}_r$ — линейная проективно оснащенная проективная шкала ЛВП с плотными вложениями. Если оснащение $t_r(\overleftarrow{F}) = \left\{t_\rho(F^j)\right\}_{j\in J, \rho\in P(r), J(\rho)\ni j}$ удовлетворяет (покоординатному) неравенству:*

$$\sigma\left(\overleftarrow{F}, \overrightarrow{\overleftarrow{F}}{}^*_r\right) \preccurlyeq t_r(\overleftarrow{F}) \preccurlyeq \tau(\overleftarrow{F}, \overrightarrow{\overleftarrow{F}}{}^*_r),$$

*то имеет место изоморфизм*

$$\overrightarrow{\left(\overleftarrow{F}, t_r(\overleftarrow{F})\right)^*} \cong \overrightarrow{\overleftarrow{F}}{}^*_r.$$

## Список литературы


1. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И.* Шкалы банаховых пространств //Успехи матем. наук. — 1966. — Т.21, №2. — С 89-169.
2. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. — М: Наука, 1978.
3. *Tita N.* Some special entropy spaces //Ahalele stintiface ale Universitatii «Al/ I/ Cuza» IASI, XXXVIII, s.I.a.> Matematica. — 1992. — f/2/ — P.265-267.
4. *Tita N.* Some approximations ideals //Studia Univ. «Babes-Bolyai», Matematica. — 1999. — Vol.XLIV, №3. — P.109-117.
5. *Ovchinnikov V.I.* Boundedness of Operators on $L_p$ Spaces with Arbitrary Real $1/p$ and Interpolation Theorems //Russian Journal of Mathematical Physics. — 1994. — Vol.2, №1. — P.127-130.
6. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — К: Вища школа, 1990.
7. *Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. — К: Наукова думка, 1988.
8. *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.* Функциональный анализ. — К: Вища школа, 1990.
9. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. — М: Мир, 1986.
10. *Orlov I.V.* Iterated limit theorem for inductive-projective topologies and aplication //Methods of Functional Analisis and Topology, Kiev, to appear.
11. *Мурач О.О.* Еліптичні оператори в повних шкалах Функціональних просторів //Автореферат канд. дисс., Институт математики НАН Украины, Киев, 1995.

12. *Ройтберг Б.Я.* Еліптичні граничні задачі в областях з негладкими межами в повних шкалах банахових просторів //Автореферат канд. дисс., Институт математики НАН Украины, Киев, 1997.
13. *Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. — М: Наука, 1994.
14. *Orlov I.V.* Banach-Grothendieck theorem for scales of spaces //Special and Evolution Problems. — Simferopol. — 2000. Vol.10, P.35-39.
15. *Орлов И.В.* Теорема Макки-Аренса для шкал пространств //Динамические системы. — Симферополь. — Вып.16. — С.165-171.
16. *Орлов И.В.* Нормальные индексы и нормальное дифференцирование в локально выпуклых пространствах //Ученые записки Таврического национального университета. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — 2002. — Т.15(54), №1. — С.112-121.
17. *Орлов И.В.* Нормальные индексы и шкалы операторных пространств //Функціональний аналіз. Українский математичний конгрес-2001. Праці, Київ. — 2002. — С.193-208.
18. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — К: Наукова думка, 1999.
19. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М: Мир, — 1969.
20. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М: Мир, — 1971.
21. *Orlov I.V.* Normal functional indices and normal duality //Methods of Functional Analisis and Topology, Kiev. — 2002. — Vol.8, №3. — P.61-71.
22. *Orlov I.V.* Normal Decomposition of Operator Spaces over Locally Convex Spaces //Functional Analisis and Its Applications. — 2002. — Vol.36, №4. — P.318-320.
23. *Орлов И.В.* Теорема Хана-Банаха в индуктивных шкалах пространств //Доповіді НАН України — 1997. №9. — С.32-36.
24. *Орлов И.В.* Принципы функционального анализа в шкалах пространств: теорема Хана-Банаха //Ученые записки Таврического национального университета. Математика. Физика. — 2000. — Т.2, №9. — С.88-95.