УДК 517.9:532

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ

Д.О. Цветков

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина

Abstract

There is investigated the problem on small motions of ideal fluid, which density in an equilibrium state has stable stratification. The theorem on strong solvability of initial boundary value problem is proved.

Введение

Задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости, частично заполняющей произвольный сосуд, исследовалась в работе [1] . В данной работе задача изучается с помощью нового подхода, связанного с применением операторных блок-матриц (см., например, [3]).

1. Постановка задачи

Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность ρ_0 которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси $Ox_3 : \rho_0 = \rho_0(x_3)$,частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω, ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью Γ. Предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на свободной равновесной поверхности Γ, которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести $\vec{\mathrm{g}} = -\mathrm{g}\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3.

Будем рассматривать основной случай стратификации по плотности:

$$0 < N^2_{min} \leqslant N^2(x_3) \leqslant N^2_{max} = N^2_0 < \infty, \qquad (1)$$
$$N^2(x_3) = -\mathrm{g}\rho_0'(x_3)/\rho_0(x_3), \quad \rho_0(0) > 0,$$

где $N^2(x_3)$ —квадрат частоты плавучести (частоты Вейсяля - Брента). В состоянии покоя давление в жидкости распределено по закону

$$p_0 = p_0(x_3) = p_0(0) - \mathrm{g}\int_0^{x_3} \rho_0(\eta)\, d\eta. \qquad (2)$$

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x)(x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega)$ поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ — отклонение поля давлений от равновесного давления (2), $\rho = \rho(t,x)$ — отклонение поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, а через $\varsigma = \varsigma(t,\hat{x})(\hat{x} \in \Gamma)$ — отклонение свободно движущейся поверхности жидкости $\Gamma(t)$ от Γ по нормали $\vec{n}$. Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей (см. [1]):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)(-\nabla p - \mathrm{g}\rho\vec{e}_3) + \vec{f}(t,x) \quad (\text{в}\,\Omega),$$

$$div\,\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho\cdot\vec{u} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \tag{3}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad (\text{на} S), u_n = \frac{\partial \varsigma}{\partial t} \quad (\text{на}\,\Gamma), p = \mathrm{g}\rho_0(0)\varsigma \quad (\text{на}\,\Gamma),$$

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^{\,0}(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x), \quad \varsigma(0,\hat{x}) = \varsigma(\hat{x}).$$

Отметим, что для классического решения задачи (3) имеет место закон баланса энергии:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\Big\{\int\limits_\Omega \rho_0(x_3)|\vec{u}|^2 d\Omega + \mathrm{g}^2\int\limits_\Omega (\rho_0(x_3)N^2(x_3))^{-1}|\rho|^2 d\Omega + \mathrm{g}\rho_0\int\limits_\Gamma |\varsigma|^2 d\Gamma\Big\} =$$

$$= \int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\vec{f}\cdot\vec{u}d\Omega. \tag{4}$$

2. Функциональные пространства

Начально-краевую задачу (3)приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применем прием проектирования первого уравнения (3) на ортогональные подпространства [2]. Свяжем с функцией ρ_0 гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ вектор функций со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v}) = \int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\overline{\vec{v}(x)}d\Omega. \tag{5}$$

Как следует из (1), для $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ справедливы неравенства $0 < m \leqslant \rho_0 \leqslant M < \infty$, обеспечивающие эквивалентность норм, определяемых (4) и обычным скалярным произведением в $\vec{L}_2(\Omega)$.

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0) \tag{6}$$

где

$$\vec{J}_0(\Omega,\rho_0) = \Big\{\vec{u}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\colon div\vec{u} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), u_n = 0 \quad (\text{на}\,\partial\Omega)\Big\},$$

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) = \Big\{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho,\rho_0)\colon \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla(p), \vec{v}\cdot\vec{n} = 0(\text{на}\,S), \nabla\cdot\vec{v} = 0(\text{в}\,\Omega), \int\limits_\Gamma p\,d\Gamma = 0\Big\},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)=\Big\{\vec{w}=\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\colon \vec{w}=\rho_0^{-1\nabla}\varphi,\varphi=0(\text{на}\,\Gamma)\Big\}.$$

Доказательство леммы такое же, как при $\rho_0(x_3)=const$ (см. [1, 2]). Наряду с введенными пространствами, понадобятся еще гильбертово пространство $Z_2(\Omega)$ скалярных функций со скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)_{Z_2(\Omega)}=\mathrm{g}^2\int\limits_{\Omega}(\rho_0(x_3)N^2(x_3))^{-1}\varphi(x)\overline{\psi(x)}d\Omega$$

и гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\eta,\varsigma)_0=\rho_0(0)\int\limits_{\Gamma}\eta(\hat{x})\overline{\varsigma(\hat{x})}d\Gamma.$$

3. Переход к системе дифференциально операторных уравнений

Будем считать $\vec{u}(t,x)$ и $\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$. Тогда в силу уравнений и граничных условий (3), ортогонального разложения (6) имеем

$$\vec{u}(t,x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)=:\vec{J}_{O,S}(\Omega,\rho_0),$$
$$\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p(t,x)\in\vec{G}_{h,s}(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{O,\Gamma}(\Omega,\rho_0).$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\begin{gathered}\vec{u}(t,x)=\vec{v}(t,x)+\rho_0^{-1}\nabla w(t,x),\quad \vec{v}\in\vec{J}_0(\Omega,\rho),\quad \rho_0^{-1}\nabla w\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),\\ \rho_0^{-1}\nabla p(t,x)=\rho_0^{-1}\nabla p_1(t,x)+\rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x),\\ \rho_0^{-1}\nabla p_1\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),\quad \rho_0^{-1}\nabla p_2\in\vec{G}_{O,\Gamma}(\Omega,\rho_0).\end{gathered}\tag{7}$$

Обозначим P_0, $P_{h,S}$ и $P_{O,\Gamma}$ ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$ и $\vec{G}_{O,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$ соответственно. Тогда, подставляя (7) в первое уравнение (3) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-P_0(\rho_0^{-1}\mathrm{g}\rho\vec{e}_3)+P_0\vec{f},\\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0^{-1}\nabla w)=-\rho_0^{-1}\nabla p_1-P_{h,S}(\rho_0^{-1}\mathrm{g}\rho\vec{e}_3)+P_{h,S}\vec{f},\\ \vec{0}=-\rho_0^{-1}\nabla p_2-P_{O,\Gamma}(\rho_0^{-1}\mathrm{g}\rho\vec{e}_3)+P_{0,\Gamma}\vec{f}.\end{gathered}\tag{8}$$

Из последного соотношения следует, что $\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p_2$ может быть найдено, если известно решение $\rho=\rho(t,x)$. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничных и начальных условий с соответсвующей заменой $p\to p_1$, так как $p=p_1+p_2$, $p_2=0$ (на Γ).

4. Вспомогательная задача

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p_1)=0 \quad (\text{в}\,\Omega),\quad \rho_0^{-1}(x_3)\nabla p_1\cdot\vec{n}=0 \quad (\text{на}\,S), \tag{9}$$
$$\rho_0^{-1}p_1=\phi \quad (\text{на}\,\Gamma),\quad \int\limits_\Gamma \phi d\Gamma=0.$$

Это задача —аналог известной проблемы Зарембы. Можно доказать, что она имеет единственное решение $p\in H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0)$ тогда и только тогда, когда $\phi\in H_\Gamma^{\frac12}$. Здесь

$$H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0)\colon=\Big\{p(x):\|p\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0)}=\int\limits_\Omega\rho_0^{-1}|\nabla p|^2d\Omega<\infty,\ \int\limits_\Gamma pd\Gamma=0\Big\},$$

$$H_\Gamma^{\frac12}=H^{\frac12}(\Gamma)\cap H_0, L_2(\Gamma)=H_0\oplus\{1_\Gamma\}.$$

Пусть $p_1(x)$ — решение вспомогательной задач (9) для $\phi\in H_\Gamma^{\frac12}$. Тогда

$$\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p_1=\colon G\phi\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),$$

где $G\colon H_\Gamma^{\frac12}\to\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$ —линейный ограниченный оператор.

Введем обозначения

$$-\nabla\rho_0\cdot\vec{v}=\colon C_1^*\vec{v},\quad P_0(\rho_0^{-1}\mathrm{g}\rho\vec{e}_3)=\colon C_1\rho,$$

$$-\nabla\rho_0\cdot\vec{w}=\colon C_2^*\vec{w},\quad P_{h,S}(\rho_0^{-1}\mathrm{g}\rho\vec{e}_3)=\colon C_2\rho,$$

где $\vec{w}=\rho_0^{-1}\nabla w$. Отметим, что операторы C_1 и C_1^*, C_2 и C_2^* взаимно сопряжены соответственно, и $\|C_1\|=\|C_1^*\|\le N_0, \|C_2\|=\|C_2^*\|\le N_0$.

Для $\phi=\mathrm{g}\varsigma$ имеем из (9) $\rho_0^{-1}\nabla p_1=\mathrm{g}G\varsigma$. Учитывая введенные обозначения для операторов, перепишем начально-краевую задачу (3) в виде последнего соотношения (8) и задачи Коши для системы дифференциально-операторных уравнений:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \vec{w}\\ \varsigma\\ \rho\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&C_1\\0&0&\mathrm{g}G&C_2\\0&-\gamma_n&0&0\\-C_1^*&-C_2^*&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \vec{w}\\ \varsigma\\ \rho\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_0\vec{f}\\P_{h,S}\vec{f}\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$(\vec{v}(0);\vec{w}(0);\varsigma(0);\rho(0))^t=(\vec{v}^{\,0};\vec{w}^{\,0};\varsigma^0;\rho^0)^t,$$

$$(\vec{v};\vec{w};\varsigma;\rho)^t\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\oplus H_0\oplus Z_2(\Omega)=\colon H.$$

Здесь γ_n — оператор следа: $\gamma_n\vec{u}\colon=u_n=\vec{u}\cdot\vec{n}|_\Gamma, D(\gamma_n)=\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\cap C^1(\bar\Omega)$.

Лемма 2. *Оператор γ_n может быть расширен до оператора $\tilde\gamma_n$ с областью определения $D(\tilde\gamma_n)=\Big\{\vec{w}\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho)\colon\tilde\gamma_n\vec{w}\in H_0\Big\}$, в этом случае оператор $\tilde\gamma_n$ есть оператор, сопряженный к оператору $G\colon\tilde\gamma_n=G^*$.*

Определение 1. Функции $\vec{u}, \varsigma, \rho$ и $p(x,t) = p_1 + p_2$ назовем сильным решением задачи (3) на отрезке [0, T], если выполнено последнее условие (8) и $(\vec{v}, \vec{w}, \varsigma, \rho)$ есть сильное решение задачи Коши (10) в пространстве H. Это значит, что для $\forall t \geq 0$ функции $\vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ $\vec{w} \in D(\tilde{\gamma}_n), \varsigma \in H_\Gamma^{\frac{1}{2}}$, $\rho \in Z_2(\Omega)$ и $d\vec{v}/dt, d\vec{w}/dt$, $d\varsigma/dt, d\rho/dt$, $C_1\rho, C_2\rho, G\varsigma, C_1^*\vec{v}, C_2^*\vec{w}, \tilde{\gamma}_n\vec{w}$ есть непрерывные по t, кроме того, уравнение и начальное условие (10) выполнено.

5. Теорема существования сильного решения

Рассмотрим для простоты задачу (10) при g = 1. (Если сделать замену $g^{\frac{1}{2}}\varsigma \to \varsigma, g^{\frac{1}{2}}G \to G$, тогда получаем такую же задачу, как при g = 1.) Свяжем с задачей (10), с учетом леммы 2, оператор -матрицу, которая имеет плотную в H область определения

$$D(A) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus D(\tilde{\gamma}_n) \oplus H^{\frac{1}{2}\Gamma} \oplus Z_2(\Omega) \tag{11}$$

и определена на $D(A)$ по закону

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & G & C_2 \\ 0 & -G^* & 0 & 0 \\ -C_1^* & -C_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что оператор A с областью определения (11) будет максимально аккреативным оператором и, значит, задача Коши (10) будет равномерно корректной ([2]), а оператор $(-A)$ есть генератор сжимающей группы унитарных операторов $U(t) \colon = exp(-tA)$, и справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$y^0 \in D(A), \quad f(t) \in C^1([0,T]; H),$$

тогда задача Коши (10) имеет единственное сильное решение на промежутке [0, T], выражаемой формулой

$$y(t) = U(t)y^0 + \int_0^t U(t-s)f(s)\,ds, \tag{12}$$

$$y \colon = (\vec{v}; \vec{w}; \varsigma; \rho)^t, \quad y^0 \colon = (\vec{v}^{\,0}; \vec{w}^{\,0}; \varsigma^0\rho^0)^t, \quad f \colon = (P_0\vec{f}; P_{h,S}\vec{f}; 0; 0)^t.$$

Как следствие теоремы 1 имеем следующий результат.

Теорема 2. *Если выполнены условия*

$$\vec{v}^{\,0} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad \vec{w}^{\,0} \in D(\tilde{\gamma}_n), \quad \varsigma^0 \in H_\Gamma^{\frac{1}{2}}, \quad \rho^0 \in Z_2(\Omega), \quad \vec{f}(t) \in C^1([0,T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)),$$

тогда задача (3) имеет единственное сильное (в смысле определения 1) решение для любого $t \in [0,T]$.

Определение 2. Для задачи (10) назовем ее обобщенным решением с непрерывной полной энергией функцию (12) при $y^0 \in H, f(t) \in C([0,T];H)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^{\,0}(x) \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0), \rho^0(x) \in Z_2(\Omega), \varsigma^0(\hat{x}) \in H_0, \vec{f}(t,x) \in C([0,T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)).$$

Тогда $y^0 \in H$, $f(t) \in C([0,T];H)$, *и для обобщенного решения* $y(t)$ *выполнен закон баланса полной энергии*

$$\frac{1}{2}\left\|y(t)\right\|_H^2 = \frac{1}{2}\left\|y^0\right\|_H^2 + Re\int_0^t (f(s), y(s))_H ds,$$

который в исходных переменных имеет тот же вид, что и тождество (4).

Список литературы

1. *Копачевский Н.Д., Темнов А.Н.* Колебания стратифицированноц жидкости в бассейне произвольной формы. —Ж. вычисл. матем., и матем. физ., 1986, Т 26, №5, 734-755с.
2. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г. Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. —М.:Наука, 1989. -416с.
3. *T.Ya. Azizov, V. Hardt, N.D. Kopachevsky, R. Mennicken.* To the problem on small motions and normall oscillations of a viscous fluid in a partially filled container. Math. Nachr., submitted.