УДК 571.983

О БИПОДОБИИ В РЕГУЛЯРНОМ G-ПРОСТРАНСТВЕ (ПОЛУ)УНИТАРНОГО ОПЕРАТОРА ГИЛЬБЕРТОВО(ПОЛУ)УНИТАРНОМУ

Д.Л. Тышкевич

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина

Abstract
(Semi)unitary operators on inner product spaces are studied. The conception of bisimilarity of operators on nondegenerated G-spaces is introduced. The criterion of bisimilarity in a regular G-space of a (semi)unitary operator to a (semi)unitary one in Hilbert sense is obtained by using results generalizing well-known Wold decomposition.

Введение

При исследовании операторов, действующих в гильбертовом пространстве, одну из центральных ролей (наряду со спектральными вопросами и вопросами базисности и полноты) играют различные методы установления изоморфизма между исследуемым оператором (классом операторов) и оператором заданной структуры (классом операторов заданной структуры), являющимся в той или иной мере хорошо изученным. В этом случае можно выделить три основных аспекта данного направления:

1) тип устанавливаемого изоморфизма;
2) структура оператора (класса оператора) при помощи изоморфизма устанавливаемого типа;
3) условия на оператор (класс операторов), при которых данный тип изоморфизма существует.

В зависимости от вида условий 1)-3) существуют различные подходы к изучению операторов (см. [4], [5], [7], [8], [13]). В [4], [13] подробно освещён метод характеристических функций и имеются ссылки на многочисленную литературу по кругу вопросов.

В данной работе вводится понятие биподобия операторов, тесно связанное со спецификой G-пространств. На основании результатов, обобщающих известное разложение Вольда, приводится критерий биподобия в регулярном G-пространстве (полу)унитарного оператора гильбертово (полу)унитарному. в связи с дефицитом места доказательства опускаются; все определения, необходимые для понимания излагаемого материала и не упомянутые в данной работе, можно найти в [2], [8], [12]. В работе приняты обычные обозначения; индексы k, j, m, n, если не оговорено противное, всегда будут пробегать множество неотрицательных целых чисел и стремиться к

∞ во всех пределах. Скобки в слове «(полу)унитарны» означают, что мы имеем в виду как полуунитарный, так и унитарный операторы. Здесь наша трактовка термина «полуунитарный» восходит к работам [1], [6] (ср. [2],гл.2, опр.5.1)

1. Некоторые определения и вспомогательные результаты

Пусть τ - допустимая топология на пространстве с внутренним произведением (ПВП) $\mathfrak{X}$. Линейный τ-непрерывный оператор T в $\mathfrak{X}$ назовём *τ-сопрягаемым*, если существует такой линейный τ-непрерывный оператор $T\,'$ в $\mathfrak{X}$, что для любых $x, y \in \mathfrak{X}$

$$[Tx, y] = [x, T\,'y].$$

В случае невырожденности $\mathfrak{X}$ такой оператор $T\,'$ определяется единственным образом; в этом случае будем обозначать $T\,'$ через $T^\sharp$ и называть оператор $T^\sharp$ *τ-сопряженным* к T. Если $T^\sharp = T$, то оператор T назовем *τ-самосопряженным* (ср. [2], [12]). В дальнейшем будем предполагать, что в ПВП $\mathfrak{X}$ (в частности, в G-пространстве $\mathfrak{H}$) задана некоторая допустимая топология τ, и в соответствующих выражениях префикс «τ-» будет опускаться.

Рассмотрим операторы проектирования в пространстве $\mathfrak{X}$ (т.е. идемпотенты $P : P^2 = P$). Любое коммутативное семейство проекторов $\mathfrak{P}$ (в произвольном линейном пространстве) можно вложить в булеву алгебру проекторов, если определить операции $\vee, \wedge$ и — следующим образом:

$$P \vee Q = P + Q - PQ, \tag{1.1}$$

$$P \wedge Q = PQ, \tag{1.2}$$

$$\bar{P} = I - P$$

Отметим, что если существует такой проектор $P_0 \in \mathfrak{P}$, что для любого $P \in \mathfrak{P}$

$$PP_0 = PP_0 = P,$$

то операцию дополнения можно ввести иначе как:

$$\bar{P} = P_0 - P. \tag{1.3}$$

В этом случае $\mathfrak{P}$ также можно вложить в булеву алгебру с операциями $\vee, \wedge$ и $-$.

Пусть $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ - некоторые коммутативные семейства проекторов. Отображение

$$\varphi : \mathfrak{P}_1 \to \mathfrak{P}_2$$

назовём *псевдобулевым*, если оно обладает следующими свойствами:

$$\varphi(P_1 + P_2) = \varphi(P_1) + \varphi(P_2), \text{ при } P_1P_2 = 0 \text{ и } P_1, P_2, P_1 + P_2 \in \mathfrak{P}_1;$$

$$\varphi(P_1P_2) = \varphi(P_1)\varphi(P_2), \text{ при } P_1, P_2, P_1P_2 \in \mathfrak{P}_1.$$

Псевдобулево отображение φ назовём *булево продолжаемым*, если $\mathfrak{P}_1$ замкнуто относительно произведения проекторов. В этом случае *булевым продолжением* отображения φ назовём отражение $\tilde{\varphi} : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ (где $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — булевы алгебры, порождённые семействами $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ соответственно), определяемое при помощи обобщённой индукции:

а) $\tilde{\varphi}(P) = \varphi(P)$, если $P \in \mathfrak{P}_1$;

б) если $\tilde{\varphi}(P_1)$, $\tilde{\varphi}(P_2)$ и $\tilde{\varphi}(P)$ — определены, то полагаем

$$\tilde{\varphi}(P_1 \vee P_2) = \tilde{\varphi}(P_1) \vee \tilde{\varphi}(P_2),$$
$$\tilde{\varphi}(P_1 \wedge P_2) = \tilde{\varphi}(P_1) \wedge \tilde{\varphi}(P_2),$$
$$\tilde{\varphi}(\bar{P}) = \bar{\tilde{\varphi}}(P).$$

Особый интерес в ПВП $\mathfrak{X}$ представляют самосопряженные проекторы. В этом случае $R(P)$ и $R(I-P)$ — проекционно полные взаимно ортогональные пространства (замкнутые линеалы), причем

$$R(P)[\dot{+}]R(I-P) = \mathfrak{X}$$

Таким образом, определено (взаимно однозначное) соответствие

$$P \to R(P)$$

между всеми самосопряженными проекторами, заданными на $\mathfrak{X}$ и проекционно полными подпространствами пространства $\mathfrak{X}$. В силу этого самосопряжённые проекторы называются также *ортогональными.*

Самосопряжённый оператор T называется *положительным* (*отрицательным, неотрицательным* и т.д.), если пространство $R(T)$ - положительно (отрицательно, неотрицательно и т.д. соответственно).

Подпространство $\mathfrak{X}_o$ назовём приводящим сопрягаемый оператор T (либо будем говорить, что $\mathfrak{X}_o$ — приводит T), если $\mathfrak{X}_o$ инвариантно относительно T и $T^\sharp$. Очевидно, если $\mathfrak{X}_o$ приводит T, то и $\mathfrak{X}_o^{[\perp]}$ приводит T.

Если U — унитарный оператор, то в силу соотношения $U^\sharp = U^{-1}$ любое инвариантное подпространство U является приводящим.

В случае сопрягаемого полуунитарного оператора W операторы $P = WW^\sharp$ и $Q = I - WW^\sharp$, как нетрудно убедиться, суть ортогональные проекторы соответственно на (проекционно полные) подпространства $R(W)$ и $KerW^\sharp$, откуда

$$R(W)[\dot{+}]KerW^\sharp = \mathfrak{X}. \tag{1.4}$$

Разложение (1.4) играет важную роль при исследовании полуунитарных операторов. Всюду в дальнейшем мы закрепляем обозначения P и Q именно для проекторов $WW^\sharp$ и $I - WW^\sharp$ соответственно.

Важнейшим и наиболее изучаемым классом ПВП являются G-пространтсва. Напомним (см. [2],гл.1, а также ссылки в [2] на многочисленную по этому кругу вопросов литературу), что *G-пространтсвом* называется гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, внутреннее произведение в котором задается при помощи (гильбертово) самосопряженного ограниченного оператора G, называемого *оператором Грама* подпространства $\mathfrak{H}$:

$$[h, g] = (Gh, g)(h, g \in \mathfrak{H}). \tag{1.5}$$

G-пространтсво называется *регулярным*, если $0 \in \rho(G)$; *сингулярным*, если $0 \in \sigma(G)\backslash\sigma_p(G)$ и вырожденным, если $0 \in \sigma_p(G)$ (в последнем случае $KerG$ — нетривиальное изотропное подпространство относительно внутреннего произведения и $[\cdot, \cdot]$ (1.5), последнее называется обычно G-метрикой).

В дальнейшем (за исключением раздела ref86-R2), подчёркивая двойственность G-пространств (наличие двух внутренних произведений — самого скалярного произведения и $[\cdot, \cdot]$ из (1.5)) а также приоритет общих ПВП, ортогональность, (полу)унитарность и т.д. относительно скалярного произведения мы будем называть «гильбертовой ортогональностью», «гильбертовой (полу)унитарностью» и т.д., в то время как соответствующие свойства относительно G-метрики будем называть обычным образом (т.е. «ортогональностью», «(полу)унитарностью» и т.д.).

2. Разложение Вольда в случае пространств с инденфинитной метрикой

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое ПВП и W — полуунитарный оператор в $\mathfrak{X}$. По аналогии с гильбертовым случаем вводятся следующие определения ([14]). Подпространство $\mathfrak{L}$ называется *блуждающим относительно* W, если

$$W^k\mathfrak{L}[\perp]W^m\mathfrak{L}(k \neq m)$$

Рассмотрим подпространство

$$M_W^+(\mathfrak{L}) = Clos_\tau LinW^n\mathfrak{L}$$

($\mathfrak{L}$ называется *порождающим* для $M_W^+(\mathfrak{L})$). Оператор W называется *односторонним сдвигом* в $\mathfrak{X}$, если существует такое блуждающее относительно W подпространство $\mathfrak{L}$, что

$$M_W^+(\mathfrak{L}) = \mathfrak{X}.$$

В отличии от ситуации в гильбертовом пространстве, в случае индефинитности внутреннего произведения порождающее подпространство не всегда определяется однозначно, даже когда $\mathfrak{X}$ - невырождено ([14, пример 6.4]). При условии, что $\mathfrak{X}$ - проекционно полно, однозначность имеет место, если (и только если $M_W^+(\mathfrak{L})$ - невырождено; в этом случае $\mathfrak{L} = M_W^+(\mathfrak{L})[-]WM_W^+(\mathfrak{L})$ ([14], теор.6.5).

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ — невырожденное в ПВП с допустимой топологией τ, и W — τ - сопрягаемый оператор. Для любого элемента $x \in \mathfrak{X}$ аналогично гильбертову случаю определяются его *коэффициенты Фурье* $x_n = QW^{\sharp n}x$.

Однако в отличии от ситуации в гильбертовом пространстве, коэффициенты Фурье могут задавать элементы из $\mathfrak{X}$ неоднозначно ([14], пример 6.4). В случае проекционной полноты $\mathfrak{L}$ отображение, ставящее элементу из $\mathfrak{X}$ его коэффициенты Фурье, инъективно тогда и только тогда, когда пространство $M_W^+(\mathfrak{L})$ - невырождено. Однако даже в случае, когда W - односторонний сдвиг, между вектором и его коэффициентами Фурье нет такой связи, какая имеет место в гильбертовом случае, так как ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} W^k x_k$$

может расходиться даже тогда, когда $\mathfrak{X}$ - пространство Понтрягина ([14], пример 7.3).

Подпространства

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{s}} = M_W^+(KerW^\sharp) \text{ и}$$
$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{r}} = \bigcap_n W^n \mathfrak{X}$$

назовём соответственно *подпространством сдвига (shift subspace)* и *остаточным подпространством (residual subspace)* ([10], [11]). В терминах пространств $\mathfrak{H}_{\mathfrak{s}}$ и $\mathfrak{H}_{\mathfrak{r}}$ можно сформулировать аналог разложения Вольда для произвольных ПВП, однако в столь общей ситуации аналог получается довольно слабым, что связано, естественно, со спецификой индефинитного внутреннего произведения.

Теорема 2.1 (Общий аналог разложения Вольда для невырожденных ПВП с допустимой топологией)**.** *Пусть, как и прежде, W — сопрягаемый (полу)унитарный оператор в невырожденном ПВП $\mathfrak{X}$. Подпрострвнства $\mathfrak{H}_{\mathfrak{s}}$ и $\mathfrak{H}_{\mathfrak{r}}$ приводят W, причём* линеал

$$\mathfrak{L}_W = Lin\{W^k KerW^\sharp\} -$$

невырожден. Операторы $W|\mathfrak{H}_{\mathfrak{s}}$ *и* $W|\mathfrak{H}_{\mathfrak{r}}$ в соответствующих подпространствах соответственно являются односторонним сдвигом и унитарным оператором, причём пространство $\mathfrak{H}_{\mathfrak{r}}$ — наибольшее (относительно порядка, задаваемого включением подпространств) среди всех инвариантных относительно W подпространств $\mathfrak{H}_{\mathfrak{u}}$ таких, что оператор $W|\mathfrak{H}_{\mathfrak{u}}$ — унитарен.

В случае, когда $\mathfrak{H}_{\mathfrak{s}}$ - невырождено, и только в этом случае, имеет место разложение

$$\mathfrak{H} = Clos_\tau(\mathfrak{H}_{\mathfrak{s}}[\dot{+}]\mathfrak{H}_{\mathfrak{r}}),$$

и подпространства $\mathfrak{H}_{\mathfrak{s}}$ и $\mathfrak{H}_{\mathfrak{r}}$ определяются описанными выше свойствами единственным образом.

Введем определение, позволяющее сформулировать условия, которые обеспечивают более полную аналогию разложения Вольда с гильбертовым случаем.

Определение 2.1. Пусть $\{\mathfrak{L}_{\mathfrak{n}}\}$ - некоторое семейство попарно ортогональных подпространств пространства $\mathfrak{X}$. Будем говорить, что это семейство *регулярно порождает* пространство $Clos_\tau Lin\{\mathfrak{L}_{\mathfrak{n}}\}$ (либо $Clos_\tau Lin\{\mathfrak{L}_{\mathfrak{n}}\}$ *регулярно порождается* семейством $\{\mathfrak{L}_{\mathfrak{n}}\}$), если выполняется следующее: для всякого $l = lim l_n$ (предел в топологии τ), где

$$l_n = \sum_{k=0}^{n} l_{kn}\ (l_{kn} \in \mathfrak{L}_k),$$

сумма $\sum\limits_{k=m}^{n}[l_{kn}, l_{kn}]$ стремится к нулю при независимом стремлении m и n $(m \neq n)$ и ∞. Иначе говоря, остаток $\sum\limits_{k=m}^{n} l_{kn}$ суммы $l_n = \sum\limits_{k=0}^{n} l_{kn}$ сколь угодно близко подходит ко множеству нейтральных векторов пространства $\mathfrak{X}$ при неограниченном возрастании n и m ($[\sum\limits_{k=m}^{n} l_{kn}, \sum\limits_{k=m}^{n} l_{kn}] = \sum\limits_{k=m}^{n}[l_{kn}, l_{kn}]$ в силу попарной ортогональности подпространств семейства $\{\mathfrak{L}_n\}$). В случае гильбертовой метрики любое семейство $\{\mathfrak{L}_n\}$ попарно ортогональных подпространств регулярно порождает пространство $\vee_{k=0}^{\infty}\mathfrak{L}_k$. Это связано с тем, что пространство $\vee_{k=0}^{\infty}\mathfrak{L}_k$ изометрически изоморфно (внешней) ортогональной сумме $\oplus_{k=0}^{\infty}\mathfrak{L}_k$: остаток $\sum\limits_{k=m}^{n} l_{kn}$ с возрастанием m и n всё менее и менее будет отличаться по норме от суммы $\sum\limits_{k=m}^{n} P_k l$, где P_k - (гильбертово) ортогональный проектор на $\mathfrak{L}_k$($\sum\limits_{k=0}^{\infty}$) $\| P_k l \|^2 < \infty$ в таком случае).

Замечание 2.1. Из данного определения следует, что для любого семейства $\mathfrak{H}_k$ подпространств $\mathfrak{H}_k \subseteq \mathfrak{L}_k$ пространство $Clos_\tau Line\{\mathfrak{H}_k\}$ регулярно порождается этим семейством, т.е. свойство регулярной порождаемости является в этом смысле наследственным.

Замечание 2.2. В дальнейшем для удобства будем говорить, что блуждающее подпространство $\mathfrak{L}_k$ относительно оператора W *регулярно порождает* $M_W^+(\mathfrak{L}_k)$, если $M_W^+(\mathfrak{L}_k)$ регулярно порождается семейством $\{W^k\mathfrak{L}_k\}$.

Определение 2.2. Сопрягаемый полуунитарный оператор W в невырожденном G -пространстве $\mathfrak{H}$ назовём слабо устойчивым, если последовательность $\{\Pi_n\}$, где $\{\Pi_n = W^n W^{\sharp n}\}$, — равномерно ограничена.

Теорема 2.2. *Пусть W -(полу)унитарный оператор в регулярном G -пространстве $\mathfrak{H}$. Следующие утверждения эквивалентны.*

(а) Оператор W - слабо устойчив.

(б) *Пространство $\mathfrak{H}_s$ и регулярно порождается (блуждающим относительно W) подпространством $KerW^\sharp$, и, следовательно, имеет место разложение $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_s[\dot{+}]\mathfrak{H}_r$.*

Следствие 2.1. *Пусть W - односторонний сдвиг в пространстве $\mathfrak{H}$. При выполнении любого из условий (a) или (b) теоремы 2.2 имеет место утверждение*

(a) *Любой вектор h из $\mathfrak{H}$ (однозначно, -см. рассуждения выше) восстанавливается по своим коэффициентам Фурье $h_n = QW^{\sharp n}h$ по формуле*

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} W^n h_n$$

(в смысле сильного предела).

Рассмотрим операторы P и Q. Пусть $\mathfrak{L}$ некоторое проекционное полное подпространство пространства $KerW^\sharp$ и F — ортогональный проектор на подпространство $\mathfrak{L}$, $F' = Q - F$. Очевидны следующие равенства:

$$\begin{aligned} &FW = W^\sharp F = 0,\\ &F'W = W^\sharp F' = 0,\\ &FF' = F'F = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

откуда вытекают соотношения:

$$W^k F W^{\sharp k} W^j F W^{\sharp j} = \begin{cases} W^k F W^{\sharp k}, & k = j \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

$$W^k F' W^{\sharp k} W^j F' W^{\sharp j} = \begin{cases} W^k F' W^{\sharp k}, & k = j \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$W^k F W^{\sharp k} W^j F' W^{\sharp j} = 0 \tag{2.3}$$

Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} \Phi_m(F) &= \sum_{k=0}^{m} W^k F W^{\sharp k}\\ \Phi_m(F') &= \sum_{k=0}^{m} W^k F' W^{\sharp k} \end{aligned} \tag{2.4}$$

В дальнейшем, когда проекторы F и F' фиксированы, будет обозначать операторы $\Phi_m(F)$ и $\Phi_m(F')$ просто через Φ_m и Φ'_m соответственно. Из (2.2) и (2.3) следует, что

$$\begin{aligned} &\Phi_m \Phi_n = \Phi_m,\\ &\Phi'_m \Phi'_n = \Phi'_m \ (m \leqslant n). \end{aligned}$$

Это означает, что последовательности $\{\Phi_m\}$ и $\{\Phi'_m\}$ является неубывающими ц епочками(ортогональных по опеределению) проекторов. Легко видеть, что

$$R(\Phi_m) = \underset{k=0}{\overset{m}{[\dot{+}]}} W^k \mathfrak{H}$$

$$R(\Phi'_m) = \overset{m}{\underset{k=0}{[\dot{+}]}} W^k F' \mathfrak{H} \tag{2.5}$$

Рассмотрим пространства

$$\mathfrak{J} = \overset{\infty}{\underset{k=0}{\vee}} W^k F \mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{J}' = \overset{\infty}{\underset{k=0}{\vee}} W^k F' \mathfrak{H}$$

По своему определению, очевидно, пространства $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}$ является подпространствами H. Между пространствами $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}$ и цепочками проекторов $\{\Phi_m\}$, $\{\Phi'_m\}$ существует тесная связь, которая явственно проступает в приводимых ниже рассуждениях.

В силу (2.2) $W^k F \mathfrak{H} [\perp] W^m F' \mathfrak{H}$, *откуда*

$$\mathfrak{J} \; [\perp] \; \mathfrak{J}^{'} \tag{2.6}$$

Из (2.6) *и очевидного равенства*

$$\overset{m}{\underset{k=0}{[\dot{+}]}} W^k F \mathfrak{H} [+] \overset{m}{\underset{k=0}{[\dot{+}]}} W^k F' \mathfrak{H} = \overset{m}{\underset{k=0}{[\dot{+}]}} W^k Ker W^{\sharp}$$

следует равенство

$$\overline{\mathfrak{J}[+]\mathfrak{J}'} = \mathfrak{H}_s. \tag{2.7}$$

Сумма в (2.7)*, конечно же, не обязана быть прямой. Однако ясно, что она будет такой, если пространство $\mathfrak{H}_s$ — невырождено.*

Из уже приведенных соотношений следует, что если $dim Ker W^{\sharp} \geqslant 2$, то у оператора W существует нетривиальное приводящее подпространство. Более того, можно утверждать, что в таком случае существует пара взаимно ортогональных приводящих (оператор W) подпространств. Действительно, в силу определения пространств $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$ видно, что эти пространства приводят W. Равенство $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}'$ не может иметь места. В противном случае $\mathfrak{J}$ в силу (2.6) *было бы нейтральным, а в силу* (2.7) *-и $\mathfrak{H}_s = \mathfrak{J}$ также было бы нейтральным. Но последнее невозможно, так как $\mathfrak{H}_s$ содержит невырожденное подпространство $Ker W^{\sharp}$ (здесь, однако, не исключено случай (строгого) включения одного из пространств $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}^{'}$ в другое).*

Далее, если $f_n = \sum\limits_{k=0}^{n} W^k f_{kn}$ и $f'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} W^k f'_{kn}$ (где $f_{kn} \in F\mathfrak{H}$и$f'_{kn} \in F\mathfrak{H}$), то в силу (2.2), (2.1) *и* (2.3)

$$\Phi_m f_n = \sum_{k=0}^{n} W^k f_{kn} \text{ и}$$

$$\Phi'_m f'_n = \sum_{k=0}^{n} W^k f'_{kn} \; (n > m),$$

поэтому

$$[\Phi_m f_n, f'_n] = 0 \ (n < m)$$

Переходя к предплам, получим

$$[\Phi_m f, f'] = 0 \ (f \in \mathfrak{J}, \ f' \in \mathfrak{J}') \tag{2.8}$$

Аналолгично,

$$[\Phi'_m f, f'] = 0 \ (f \in \mathfrak{J}, \ f' \in \mathfrak{J}') \tag{2.9}$$

Структура проекторов Φ_m, Φ'_m (2.4),(2.5) *и равенства* (2.8), (2.9) *показывают, что пределы последовательностей* $\{\Phi_m\}$,$\{\Phi'_m\}$ *(если они существуют) — это естественные «кандидаты» на проекторы с образами* $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$ *соответственно; при этом необходимым требованием является проекционная полнота* $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$. *С другой стороны, необходимым условием существования соответствующих пределов является равномерная ограниченность последовательностей* $\{\Phi_m\}$ *и* $\{\Phi'_m\}$. *В гильбертовом случае это условие всегда выполняется. Следующая теорема показывает, что сходная ситуация имеет место и для регулярных G-пространств, с учетом, однако, требования проекционной полноты; также существенную роль играет регулярная порождаемость пространств* $\mathfrak{J}$ *и* $\mathfrak{J}'$ *соответсвующими подпространствами.*

Теорема 2.3. Следующие утверждения эквивалентны.

(a) Последовательности $\{\Phi_m\}$ и $\{\Phi'_m\}$ равномерно ограничены.

(b) Имеет место разложение

$$\mathfrak{H}_s = \mathfrak{J}[\dot{+}]\mathfrak{J}',$$

и (проекционно полные) пространства $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$ регулярно порождаются подпространствами $F\mathfrak{H}$ и $F'\mathfrak{H}$ соответвтвенно.

При выполнении любого из условий или справедливо

(c) Последовательности $\{\Phi_m\}$ *и* $\{\Phi'_m\}$ сильно сходятся к ортогональным проекторам соответстственно на подпространства $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}'$.

Замечание 2.3. Утверждение (a) можно заменить на любое из двух нижеследующих:

(a) Оператор W — слабо устойчив и последовательность $\{\Phi_m\}$ - равномерно ограничена.

(b) Оператор W — слабо устойчив и последовательность $\{\Phi'_m\}$ - равномерно ограничена.

Также условие регулярной порождаемости $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}'$ можно заменить на условие регулярной порождаемости $\mathfrak{H}_s$

Следствие 2.2. *Пусть оператор* W *— слабо устойчив. Тогда соответсвие*

$$\mathfrak{L} \to Mw^+(\mathfrak{L}) \tag{2.10}$$

является взаимно однозначным соответствием между проекционно полными подпространствами пространства $KerW^\sharp$*, для ортогональных проекторов которых соответствующая последовательность* $\{\Phi_m(KerW^\sharp)\}$ *— равномерно ограничена, и проекционно полными регулярно порожденными подпространствами пространства* $\mathfrak{H}_s$*, приводящими операторов* W*. Более того, пусть* $\mathfrak{P}$ *- семейство всех ортогональных проекторов на подпространство пространства* $\mathfrak{H}_s$*, для которых сильно сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} W^k F W^{\sharp k}$*, а* $\mathfrak{S}$ *— семейство всех ортогональных проекторов на проекционно полное регулярно порождаемые соответсвующими подпространствами подпространства* $\mathfrak{H}_s$*, приводящее оператор* W*. Тогда соответствие* (2.10) *может быть определено через отображение* $\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{S}$*, заданное формулой*

$$\varphi(F) = \sum_{k=0}^{\infty} W^k F W^{\sharp k} \tag{2.11}$$

которое обладает следующими свойствами:

1. φ *- псевдобулево отображение;*
2. F *-положительный (отрицательный) проектор в* $\mathfrak{P}$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi(F)$ *- положительный (отрицительный) проекторов в* $\mathfrak{S}$*;*
3. φ *-взаимно однозначно, и обратное к* φ *отображение* φ^{-1} *задается формулой*

   $$\varphi^{-1}(\Phi) = \Phi Q = (Q\Phi),$$

   где $\Phi \in \mathfrak{S}$*.*

Отметим, что φ *в общем случае не является булево продолжаемым, т.е. семейство* $\mathfrak{S}$ *в общем случае не является замкнутым относительно произведения элементов, однако соответствующее контрпример в данной работе рассматриваться не будут.*

3. Критерий биподобия (полу)унитарного оператора гильбертового (полу)унитарному

Вводимое ниже определение связано со специфкой G-пространств.

Определение 3.1. Пусть $\mathfrak{S}$ — невырожденное G-пространство (не обязательно регулярное) и $T \in [\mathfrak{H}]$ — сопрягаемый в некоторой допустимой топорлогии оператор. Будем говорить, что оператор T *биподобен* оператору $T_1 \in [\mathfrak{H}]$, если существует такой гильбертово самосопряженный положительно определенный оператор $A \in [\mathfrak{H}]$ (A>0), что имеют место равенства

$$T = AT_1A^{-1}$$

$$T^\sharp = AT_1^*A^{-1}$$

Оператор назовем *биффинитетом.*

Как явствует из самого опредоления, биподобие является частным и весьма специфическим случаем подобия операторов; для отношения биподобия на $[\mathfrak{H}]$ в общем случае не имеют места обычные свойства подобия, такие как: рефлексивность, симметричность и транзитивность (в случае регулярного -пространства, например, нетрудно проверить, что T биподобен себе тогда и только тогда, когда $TG = GT$, - при этом в качестве биаффинитета будет выступать тождественный оператор).

Однако заметим, что если T биподобен T_1, то дифектные операторы (отнесенные к T)

$$\delta_T = I - T^\sharp T,\ \delta_{T^\sharp} = I - TT^\sharp,$$

$$\Delta_T = I - T^* T,\ \Delta_{T^*} = I - TT^*$$

соответствующим образом связаны друг с другом отношением биподобия: т.е. δ_T биподобен Δ_{T_1} и $\delta_{T^\sharp}$ биподобен . Это, в частности, приводит к тому, что некоторые вопросы, исследуемые для G-метрики и касающиеся, например, каких-либо свойств дефектных операторов или дефектных подпространств (см.[9]) могут быть сведены к исследованию соответствующих вопросов для гильбертовой метрики.

В данной работе мы сформулируем результаты, касающиеся соотношений между подобием и биподобием а также свойств биподобных операторов для частного случая, когда $T = W$ —(полу)унитарный, а $T_1 = V$ —гильбертово (полу)унитарноый операторы.

Предложение 3.1. Для того, чтобы W был биподобен гильбертово (полу)унитарному оператору, необходимо и достаточно существования такого аффинитета $S \in [\mathfrak{H}]$ и такого (полу)унитарного оператора V, что

$$W = S^{-1} V S,$$

$$SKerW^\sharp \subseteq KerV^*.$$

Следствие 3.1. *Для унитарного оператора биподобие гильбертово (полу)унитарному оператору эквивалентно подобию, т.е. унитарный оператор W биподобен гильбертово унитарному оператору U тогда и только тогда, когда он подобен некоторому (возможно, отличному от U) гильбертово унитарному оператору $\widetilde{U}$.*

Таким образом, предложение 3.1 со следствием 3.1 показываю, что биподобие операторов достаточно тесно (вплоть до равносильности в унитарном случае) связано с подобием для рассматриваемого нами частного случая (полу)унитарных операторов.

Предложение 3.2. Пусть W — сопрягаемый (полу)унитарный оператор в невырожденном G -пространстве $\mathfrak{H}$. Если существует обратимый неотрицательный оператор

T, коммутирующий с W, то найдутся такие операторы B и B: V — гильбертово (полу)унитарный и B — гильбертово неотрицательный, что

$$VB = BW$$

$$V^*B = BW^*$$

Если пространство $\mathfrak{H}$ — регулярно и $0 \in p(T)$, то оператор B может быть выбран так, что $B > 0$; в таком случае W биподобен V, причем оператор $A = B^{-1}$ является биаффинитетом.

Канонической парой инвариантных подпространств непрерывного оператора T в ПВП $\mathfrak{X}$ назовем такую пару инвариантных подпраcтранств оператора W,-положительного и отрицательного, -прямая ортогональная сумма которых дает $\mathfrak{X}$.

Предложение 3.3. Пусть W — сопрягаемый (полу)унитарный оператор в невырожденном ПВП, обладающий канонической парой инвариантных подпространств. Тогда существует непрерывная положительная инволюция (т.е. такой оператор S, что $S^2 = 1$), коммутирующая с W.

Обобщим понятие устойчивочти [2], [3] на случай полуунитарных операторов.

Определение 3.2. (Полу)унитарный оператор W в невырожденном G-пространстве назовем *устойчивым*, если W — непрерывный и сопрягаемый оператор в сильной топологии, и последовательности $\{W^n\}, \{W^{\sharp n}\}$ — равномерно ограничены.

Предложение 3.4. Если W — устойчивый оператор в невырожденном G-пространстве $\mathfrak{H}$, то у существует каноническая пара инвариантных линеалов, замкнутых в сильной топологии (т.е. гильбертовых пространствах).

Вышеприведенные частные результаты можно суммировать в общее утв ерждение. Итак, пусть W —(полу)унитарный оператор в регулярном G-пространстве. Очевидно, устойчивость оператора является необходимым условием подобия этого оператора гильбертова (полу)унитарному, поэтому ниже мы предпологаем, что W — устойчивый оператор.

Теорема 3.1. Пусть W — оператор, описанный выше. Следующие утверждения эквивалентны.

(a) Для некоторой канонической пары (проекционно полного) пространства $KerW^\sharp$ с соответствующими ортогональными проекторами $F^\pm$ последовательности $\{\Phi_m(F^\pm)\}$ равномерно ограничены.
(b) Для любого ортогонального проектора F с образом, лежащим в $KerW^\sharp$, последовательность $\{\Phi_m(F)\}$ равномерно ограничена.
(c) Любое коммутативное семейство проекторов на подпространства пространства $KerW^\sharp$ вкладывается в булеву алгебру по правилам (1.1), (1.2), (1.3) и отображение (2.11) является булево продолжаемым.
(d) Коммутант $(W)'$ содержит положительный оператор T с $0 \in p(T)$.

(e) Коммутант $(W)'$ содержит положительную инволюцию.

(f) У оператора W существует каноническая пара инвариантных гильбертовых подпространств.

(g) W биподобен гильбертово (полу)унитарному оператору.

(h) При выполнении любого из условий (a) - (g) справедливы следующие утверждения.

(i) Имеет место разложение

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_s[\dot{+}]\mathfrak{H}_r$$

Причем (односторонний сдвиг)$W\mathfrak{H}_s$ биподобен некоторому гильбертовому одностороннему сдвигу U_s, а (унитарный оператор*)* $W\mathfrak{H}_r$ биподобен некоторому гильбертовому оператору U_r (какое-либо из $\mathfrak{H}_s$ или $\mathfrak{H}_r$, конечно же, может оказаться нулевым*)*

(j) Любое приводящее оператор W подпространство $\mathfrak{J}$ имеет вид

$$\mathfrak{J} = M_W^+(\mathfrak{L}[\dot{+}]\mathfrak{R})$$

где $\mathfrak{L} \subseteq KerW^\sharp$, а $\mathfrak{R}$-инвариантно относительно W_r.

Оказывается, для одностороннего сдвига теорему 3.1 можно неско лько усилить, если опустить общее условие устойчивости. А именно, спарвидливо

Следствие 3.2. *Для одностороннего сдвига W в регулярном G-пространстве $\mathfrak{H}$ любое из эквивалентных утверждений (a)-(g) теоремы 3.1 влечет следующее:*

(a) W *— устойчивый оператор.*

Список литературы

1. *Адамян В.М., Аров Д.З.* Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов // Математические висследования. —1966. — т.1, №2. — С.3-64. С. 289-294.
2. *Азизов Т.Я., Йохвидов И.С.* Основы теории линейных операторов а пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1985. — 352 с.
3. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
4. *Кужель А.В.* Эволюция понятийхарактеристической функции линейного оператора // Укр. матем. журн. — 1993. — т.45, №6. — С.731-743.
5. *Маламуд М.М.* Критерий подобия замкнутого оператора самосопряженному // Укр. матем. журн. — 1985. — т.37, №1. — С.49-56.
6. *Плеснер А.И.* О полуунитарных операторах // Докл. АН СССР. — 1939. — Т.25, №9. — С.708-710.
7. *Сахнович Л.А.* Операторы, подобные унитарным, с абсолютно непрерывным спектром // Функ. анализ и его прил. — 1968. — т.2, №1. — С.51-63.
8. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. — М: Мир, 1970. — 431 с.
9. *Тышкевич Д.Л.* Об одном максимальном инвариантном подпространстве в случае пространств с индифинитной метрикой // Ученые записки ТНУ им. Вернадского — т.12, №2. — С.84-87.

10. *Штраус В.А.* Об аналоге разложения Вольда для π -полуунитарных операторов // Успехи мат. науки — 1988. — т.43, №1. — С.185-186.
11. *Штраус В.А.* Модельное представление и функциональное исчесление операторов в пространствах с индиииииефинитной метрикой. - Вариант диссертации на соискание уч. степени д-ра физ.-мат. наук. - Челябинск. - 1993.
12. *Bognar J.* Indefinite inner product spaces. - Berlin - Heidelberg - New-York : Springer-Verlag, 1974. - 224 p.
13. *Kuzhel A.V.* Characteristic function and models of nonself-adjoint operayors. - Kluwer Academic Publishers. - 1995. - 245 p.
14. *McEnnis Brian W.* Shifts on indefinite inner product spaces // Pacific J. Math. - 1979. - vol.81, №1. - P. 113-130.