

**ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ
ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,
ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ
КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ.**

В.А. Карпенко

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ,
ул. ЯЛТИНСКАЯ, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, УКРАИНА, E-MAIL: karpenkov@ukr.net.

Abstract

There was obtained a mathematical model of a problem about oscillation of a construction under the layer of a fluid on the elastic foundation. In this work a numerical algorithm of solving was suggested, taking into consideration peculiarities of this model. Also there were investigated the results of numeral calculations.

Рассматривается задача взаимодействия жесткого штампа с упругим основании - ем в условиях нестационарных воздействий на штамп со стороны сооружения. Целью является получение зависимости между обобщенными силами и координатами фундамента и использование их для практического расчета простейшей модели сооружения. Пусть упругое однородное изотропное полупространство $y \geq 0$ находится в условиях плоского напряженно-деформированного состояния и на его поверхности расположены сооружения (в простейшем случае моделируемая твердым штампом) или система сооружений. Если сооружение контактирует с основанием посредством штампа шириной $2a$, то граничные условия при $y = 0$ для малых углов поворота могут быть записаны в виде:

$$\vec{U}(x, t) = \vec{U}_0(t) + \vec{\theta}(t) \times \vec{r}_0(x), |x| < a \quad (1)$$

где $\vec{U}(x, t) = (U, V, W)$ - вектор смещений поверхности среды; $\vec{U}_0(t)$ - перемещение середины подошвы плиты, $\varphi(t)$ - поворот фундамента относительно оси

$$\vec{\theta}(t) = (0, 0, \varphi)^T, \vec{r}_0(x) = (x, 0, 0)^T.$$

Вектор напряжений на поверхности $\vec{\sigma}_n$ можно представить в виде суммы неизвестного распределения контактного давления под фундаментом $\vec{q}(x, t) = (q, p, r)$ и заданного напряжения на свободной границе $\vec{q}_0(x, t)$:

$$\vec{\sigma}_n(x, t) = -\vec{q}(x, t) - \vec{q}_0(x, t) \quad (2)$$

В случае колебания жесткого штампа уравнения динамики имеет вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{U}}_c &= \vec{P}(t) - \vec{R}(t), \\ J_0\ddot{\varphi} &= M_0(t) - M_{0z}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}\vec{U}(t) &= \vec{U}_0 + \vec{\theta}(t) \times \vec{r}_c, \\ \vec{R}(t) &= \int_{-a}^a \vec{q}(x, t) dx, \\ M_{0z}(t) &= \int_{-a}^a xp(x, t) dx - h_c \int_{-a}^a q(x, t) dx\end{aligned}$$

В этих выражениях: $\vec{U}_c(t)$ - перемещение центра масс штампа; $\vec{R}(t)$ - главный вектор контактных давлений под штампом; $\vec{P}(t), M_0(t)$ - внешние силы и момент $M_{0z}(t)$ - главный момент вектора напряжений h_c - высота центра масс штампа; $\vec{r}_c = (0, h_c, 0)$; J_0 - момент инерции штампа относительно точки 0. Характерной длиной выберем a - полуширину штампа, эталоном времени $-\frac{a}{c_2}$.

Безразмерные масса и момент инерции определяются равенствами

$$m_0 = \frac{m}{\rho_0 a^2} \quad J_0 = m_0 d^2,$$

где d - отнесенный к полуширине штампа радиус инерции.

В качестве сооружения может быть взята система фундамент-машина при наличии виброизоляции, уравнения динамики для которой в случае действия вертикальных сил имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{m_1 c_2^2}{\mu a^2} \ddot{V}_1 + \frac{c_2 b}{a \mu} (\dot{V} - \dot{V}_0) + \frac{c}{\mu} (V_1 - V_0) &= P_1(t) \\ \frac{m_0 c_2^2}{\mu a^2} \ddot{V}_0 - \frac{c_2 b}{a \mu} (\dot{V}_1 - \dot{V}_0) - \frac{c}{\mu} (V_1 - V_0) &= P_0(t) - R_y(t)\end{aligned} \quad (4)$$

Для получения замкнутой системы к уравнениям динамики (3), (4) должны быть добавлены уравнения, связывающие перемещения границы и напряжения на границе полупространства, с учетом соответствующего, если необходимо, граничного условия для перемещения (1).

Рассмотрим задачу, когда над упругой полуплоскостью расположен бесконечный слой жидкости. Для решения задачи воспользуемся волновыми уравнениями в потенциалах для упругого полупространства в условиях плоского напряженно - деформированного состояния и волновым уравнением для потенциала скоростей жидкости. Рассмотрим следующие граничные условия задачи на границе раздела упругой и жидкой полуплоскостей ($y = 0$):

$$\sigma_y(x, 0, t) = \begin{cases} -p(x, t) - p_0(x, 0, t) & |x| \leq 1 \\ -p_0(x, 0, t) & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\tau_{xy}(x, 0, t) = \begin{cases} -q(x, t) & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi_0(x, 0, t)}{\partial y} = c_2 \frac{\partial V(x, 0, t)}{\partial t} \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $p(x, t)$ и $q(x, t)$ - нагрузки, приложенные на границу раздела полуплоскостей. $p_0(x, y, t)$ - гидродинамическое давление жидкости.

Для такой задачи, после применения к волновым уравнениям преобразований Лапласа по времени $t(s)$ и Фурье по координате $x(\xi)$, и учета условий на бесконечности, получим:

$$U(x, 0, t) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\xi}{S(\xi, s)} (2\xi^2 + s^2 - 2v_1v_2) \sigma_y^{LF}(\xi, s) e^{-i\xi x + st} d\xi ds -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2 \left(v_1 - \alpha_1 \frac{\xi^2 - v_1 v_2}{v_3} \right)}{S(\xi, s)} \tau_{xy}^{LF}(\xi, s) e^{-i\xi x + st} d\xi ds$$

$$V(x, 0, t) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2 v_2}{S(\xi, s)} \sigma_y^{LF}(\xi, s) e^{-i\xi x + st} d\xi ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\xi}{S(\xi, s)} (2\xi^2 + s^2 - 2v_1v_2) \tau_{xy}^{LF}(\xi, s) e^{-i\xi x + st} d\xi ds$$

$$v_1 = \sqrt{\xi^2 + s^2}; v_2 = \sqrt{\xi^2 + \gamma^2 s^2}; v_3 = \sqrt{\xi^2 + \beta_0^2 s^2}. \alpha_1 = \frac{\rho_0}{\rho}$$

$$S(\xi, s) = (2\xi^2 + s^2)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 + s^2} \sqrt{\xi^2 + \gamma^2 s^2} + \alpha_1 s^4 \frac{\sqrt{\xi^2 + \gamma^2 s^2}}{\sqrt{\xi^2 + \beta_0^2 s^2}};$$

Произведем замену переменной $s = p\xi$ и проинтегрируем эти соотношения (контур интегрирования указан на рисунке).

Интегрирование в комплексной плоскости по переменной p производим по контурам Γ_1 и Γ_2

В этом случае имеем следующие особые точки:

$$p = \pm \frac{i}{\beta_0} \left(\frac{1}{\beta_0} < 1 \right); p = \pm i; p = \pm \frac{i}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma_0} < 1 \right) -$$

точки ветвления радикалов

$$\eta_3 = \sqrt{1 + \beta_0^2 p^2}; \quad \eta_1 = \sqrt{1 + p^2}; \quad \eta_2 = \sqrt{1 + \gamma^2 p^2};$$

$$p = \pm \frac{i}{\beta} -$$

полюсы первого порядка (β - корень уравнения $S(\beta, i)$). Фиксируем ветви многозначных функций η_1 , η_2 и η_3 при условии, что эти радикалы положительны на вещественной оси, и тем самым, устанавливаем правило знаков...

После этого можно записать интегральную зависимость между перемещениями и напряжениями на границе раздела упругой и жидкой полуплоскостей в векторной форме

$$\vec{U}(x, 0, t) = - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(t - t_0, x - x_0) \vec{\sigma}_n(x_0, t_0) dx_0 dt_0, \quad (5)$$

где

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11}(t, x) & A_{12}(t, x) \\ A_{21}(t, x) & A_{22}(t, x) \end{bmatrix}; \quad (6)$$

$$A_{11}(t, x) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \frac{x^2 \left(\sqrt{t^2 - \gamma^2 x^2} - \alpha_1 \frac{t^2 - \sqrt{t^2 - x^2} \sqrt{t^2 - \gamma^2 x^2}}{\sqrt{t^2 - \beta_0^2 x^2}} \right)}{(2t^2 - x^2)^2 - 4t^2 \sqrt{t^2 - x^2} \sqrt{t^2 - \gamma^2 x^2} + \alpha_1 x^4 \frac{\sqrt{t^2 - \gamma^2 x^2}}{\sqrt{t^2 - \beta_0^2 x^2}}}$$

$$A_{12}(t, x) = -A_{21}(t, x) =$$

$$= \left[Q_1 \delta \left(|x| - \frac{1}{\beta} \right) - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{t \left(2t^2 - x^2 - 2\sqrt{t^2 - \gamma^2 x^2} \sqrt{t^2 - x^2} \right)}{(2t^2 - x^2)^2 - 4t^2 \sqrt{t^2 - x^2} \sqrt{t^2 - \gamma^2 x^2} + \alpha_1 x^4 \frac{\sqrt{t^2 - \gamma^2 x^2}}{\sqrt{t^2 - \beta_0^2 x^2}}} \right] \cdot \operatorname{Sign}(x)$$

$$A_{22}(t, x) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \frac{x^2 \sqrt{t^2 - \gamma^2 x^2}}{(2t^2 - x^2)^2 - 4t^2 \sqrt{t^2 - x^2} \sqrt{t^2 - \gamma^2 x^2} + \alpha_1 x^4 \frac{\sqrt{t^2 - \gamma^2 x^2}}{\sqrt{t^2 - \beta_0^2 x^2}}}$$

$$S_1(t, x) = (2t^2 - x^2)^2 - 4t^2 \sqrt{t^2 - \gamma^2 x^2} \sqrt{t^2 - x^2} + \alpha_1 x^4 \frac{\sqrt{t^2 - \gamma^2 x^2}}{\sqrt{t^2 - \beta_0^2 x^2}} -$$

функция Стоунли.

Заметим, что аналогичные результаты можно получить, если использовать методику, изложенную в [3].

Добавив к уравнениям (6) уравнения динамики штампа, получим замкнутую систему уравнений для решения плоской контактной задачи о колебаниях штампа на упругом основании под бесконечным слоем жидкости при заданных нагрузках на штамп. Таким образом, нестационарная контактная задача для сооружения, контактирующего с основанием посредством жесткой плиты конечной ширины, сводится к решению системы интегральных уравнений (5) с учетом выражения (2) и граничных условий (1), а также дифференциальных уравнений динамики: (3) для штампа и (4) для системы фундамент-машина.

Систему уравнений (5) будем решать, заменяя интегралы конечными суммами по квадратурным формулам прямоугольников, а производные в соответствующих уравнениях динамики (3), (4) — конечно-разностными выражениями, при этом, учитывая особенность ядер интегральных уравнений A_{11} , A_{12} , и A_{22} , численное интегрирование проводится аналогично известному в гидродинамике методу дискретных особенностей. Ранее [1] аналогичный алгоритм применялся для решения задачи без слоя жидкости. В [2] показано, что в рассматриваемой задаче тип особенности в ядрах не изменяется.

Для того, чтобы избежать бесконечных значений ядер интегральных уравнений, достаточно совместить точки разбиения и коллокации по координате разнести по времени, при этом соотношение шага по времени к шагу по координате выбирается равным β (корень уравнения Стоунли). Таким образом, достигается расположение узлов разностной сетки параллельной прямой, на которых ядра принимают неограниченные значения.

На основании вышеизложенного разностная сетка для плоской задачи выбирается следующим образом:

$$t_i = \beta i h; \quad t_{0k} = \beta(k - 0.5)h; \quad i = 1, 2, 3, \dots; \quad k = 1, 2, 3, \dots, k$$

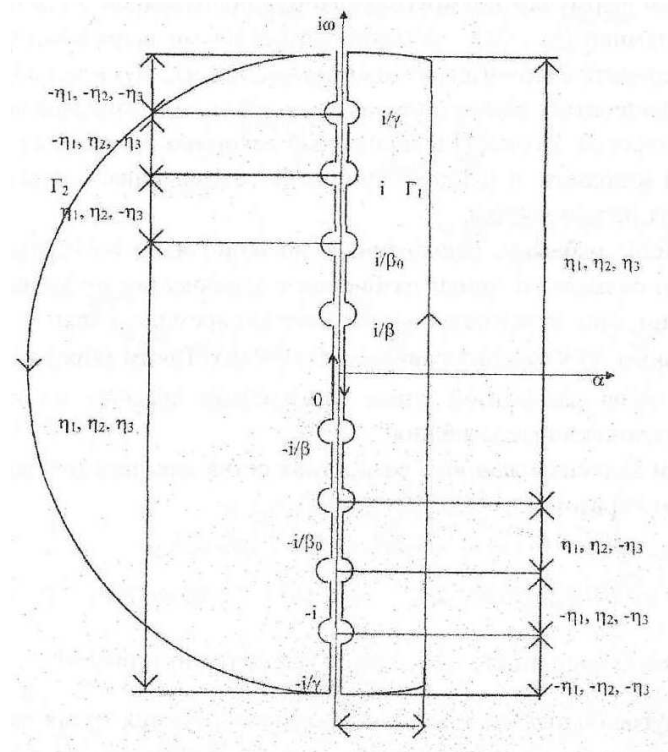
$$x_j = -1 + (j - 0.5)h; \quad j = 1, \dots, N; \quad x_{0m} = -1 + (m - 0.5)h; \quad m = 1, \dots, N;$$

$h = \frac{2}{N}$ - шаг по координате; N - число разбиений интервала $[-1; 1]$.

В задаче упругое основание и жидкость характеризуются тремя параметрами $\gamma, \beta_0, \alpha_1$ - отношение скорости поперечной волны c_2 к скорости продольной волны c_1 в упругой среде, отношение скорости поперечной волны c_2 к скорости волны c_0 в жидкости и отношение плотности жидкости к плотности упругой среды, соответственно. При этом рассматривалась упругая среда, для которой выполняется соотношение $c_0 < c_2 < c_1$ и $\beta_0 > 1$. С учетом того, что плотность жидкости меньше плотности основания, рассматривались значения $\alpha_1 = 0.3$ и $\alpha_1 = 0.4$. Для фиксированного значения β_0 проводились вычисления при $\gamma^2 = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4$. Найдены перемещения штампа и реакции основания при различных значениях. Численные расчеты показали, что метод устойчив при $\gamma^2 > 0.1$ и $\beta_0 \leq 1.2$.

Результаты, полученные при воздействии постоянной, ударной и гармонической нагрузок для задачи с бесконечным слоем жидкости качественно совпадают с результатами рассмотренной в [1] задаче без жидкости.

Важным моментом при решении задач было сравнение результатов, полученных для задачи с жидкостью и задачи без жидкости при одинаковых внешних воздействиях на штамп. При введении бесконечного слоя жидкости перемещение и скорости центра масс штампа уменьшаются. Напряжения под штампом практически совпадают, за исключением ударной нагрузки, при которой напряжение во второй задаче по амплитуде больше, чем в первой.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Карпенко В.А.** Нестационарные плоские колебания штампа и осциллятора на двуслойном основании. //Динамические системы. - 1987. -№ 6. - С. 64-68.
2. **Карпенко В.А.** Нестационарные колебания штампа и осциллятора на границе раздела жидкой и упругой сред. ГНТБ Украины, №1178 - Ук от 21.06.1994.
3. **Слепян Л.И., Яковлев Ю.С.** Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики: Судостроение, 1980. - 263с.