УДК 519.6

РАЦИОНАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Иванов Ю.Б.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *ivanov@ccssu.crimea.ua*

Abstract

Rational modeling for wave processes in rotating liquid is presented.

Введение

Для получения количественной информации при изучении поведения сложных объектов или явлений применяется методика вычислительного эксперимента [1], представляющая собой на данный момент наиболее совершенную форму научных исследований, которая объединяет в себе предметные здания, математические модели и вычислительные средства. Определяющими условиями успеха вычислительного эксперимента является рационально выбранная математическая модель изучаемого объекта или явления, численно устойчивый алгоритм решения корректной математической задачи, поставленной в рамках выбранной модели, и оптимальный способ реализации алгоритма на ЭВМ.

Выбор и построение соответствующей рациональной (оптимальной для достижения поставленных в вычислительном эксперименте целей исследования) математической модели является основным моментом теоретических подходов численного моделирования в настоящее время. Особенно актуальным представляется применение методов численного моделирования в задачах механики сплошных сред, в частности, в гидродинамике.

В данной работе строится рациональная математическая модель распространения длинных волн на поверхности тяжелой вращающейся жидкости.

1. Математическая модель свободных колебаний

В качестве сложного природного явления, подлежащего исследованию, рассмотрим волны на поверхности Черного моря, длина которых сравнима с размерами этого природного водоема. Для волн такого типа поставим цель - определить частоты и моды нормальных колебаний жидкости в этом бассейне.

Мы располагаем определенной информацией об исследуемом явлении из двух источников; в результате наблюдений [2] с помощью физических приборов, а также в результате расчетов по некоторой математической модели [2]. Сравнивая спектры экспериментальных колебаний с рассчитанными в рамках математической модели, делаем вывод, что для колебаний с периодами восемь часов я менее совладение спектров достаточно хорошее. Однако, экспериментальные спектры указывают на существование колебаний с большими периодами.

Легко доказать, что математическая модель [2] колебавйй с такими большими периодами не может содержать в принципе. Возникает вопрос: какова природа этих длиннопериодных колебаний, регестрируемых физическим прибором. Выдвигаем гипотезу, что и в низкочастотном диапазоне физический прибор регестрирует сейшевые колебания Черного моря.

Проблема состоит теперь в том, какую математическую модель следует выбрать, чтобы с помощью вычислительных экспериментов можно было подтвердить или опровергнуть выдвигаемую гипотезу.

Изучение известных простых задач [3] о колебаниях идеальной однородной жидкости в ограниченном сосуде указывает на то, что низкочастотные колебания жидкости могут возникать в равномерно вращающихся бассейнах переменной глубины.

Рациональная математическая модель, создаваемая для проведения вычислительных экспериментов в низкочастотной части спектра свободных колебаний вращающейся жидкости, должна быть состоятельной, то есть не противоречить известным экспериментальным результатам, и содержательной, то есть в результате вычислительных экспериментов в рамках этой модели, можно получить новую ценную информацию об изучаемом явлении. При этом, математическая модель должна быть достаточно простой.

Построение математической модели проведем в несколько этапов. На первом этапе выберем фундаментальную модель в виде уравнений механики сплошных сред [3], представляющих собой общие законы сохранения массы, количества движения и энергии. Так как нашей целью является исследование малых колебаний жидкости, то нелинейными членами в общих уравнениях движения можно пренебречь. Учтем при построении модели то, что нас интересуют длинные волны, то есть такие, у которых длина волны больше глубины бассейна. Это дает возможность далее упростить модель. В результате приходим к известной [3] математической модели в виде системы уравнений теории мелкой воды

$$\begin{aligned} u_t - f \cdot v &= -g \cdot \xi_x \\ v_t + f \cdot u &= -g \cdot \xi_y \\ \xi_t + (Hu)_x + (Hv)_y &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где u, v – горизонтальные скорости частиц жидкости; ξ – отклонение свободной поверхности жидкости от ее стационарного положения равновесия; $H = H(x, y)$ – глубина бассейна; f – коэффициент Кориолиса, учитьшаюпшй возникающую при вращении жидкости силу Кориолиса.

Система уравнений (1) представляет собой приближенную фундаментальную модель (фундаментальную модель второго уровня), отражающую достаточно точно все существенные свойства изучаемого явления.

На основе фундаментальной модели (1) строим прикладную математическую модель, добавляя к модели (1) условия ее взаимодействия, как системы, с внешней средой. В нашем случае - это граничные условия, которые вместе с описанием геометрических свойств бассейна, представляют собой геометрическую модель.

Систему (1) дополняем следующими условиями в случае ограниченного замкнутого бассейна, занимающего область G на плоскости (x, y).

На любой момент времени решения системы (1) должны удовлетворять граничному условию непротекания жидкости через вертикальные боковые стенки бассейна

$$H(u \cdot v_x + v \cdot v_y) = 0, \tag{2}$$

где $\vec{n} = (v_x, v_y)$ – внешняя нормаль к границе Γ области G, занимаемой бассейном, и условию сохранения объема жидкости

$$\iint\limits_G \xi(x, y) dG = 0. \tag{3}$$

Прикладная математическая модель (1-3), как легко показать на примерах, не является замкнутой моделью. Под замкнутой математической моделью понимаем такую модель, в которой класс задач, сформулированных в рамках этой модели и подлежащих решению, содержит только корректно поставленные задачи.

Замыкание непрерывной модели (1-3), которую мы здесь рассматриваем, неоднозначная и сложная процедура. Для того, чтобы получить в результате замыкания рациональную модель, поступим следующим образом. Исключим из уравнений (1-2) скорости, оставив в качестве неизвестной функции только функцию ξ – отклонение свободной поверхности от положения равновесия. Получаем диффереииальную модель в виде эллиптической системы дифференциальных уравнений второго порядка и соответствующих граничных условий. Модель содержит теперь симметрические, полуограниченные операторы. Замыкание модели проводим в энергетическом функциональном пространстве. Получаем в процессе замыкания максимальные расширения дифференциальных симметрических операторов. Математическая модель представляется теперь операторным пучком $\mathbf{Q}(\lambda)$, который может быть записан как полином третьей степени с неограниченными операторными коэффициентами, действующими в гильбертовых функциональных пространствах. Для этой модели задача отыскания отдельных решений уравнения $\mathbf{Q}(\lambda)\xi = 0$, представляющих собой изолированные собственные значения и соответствующие собственные функции, как можно доказать [4], является корректно поставленной.

Численное решение этих задач при различных значениях параметров модели составляет основное содержание вычислительного эксперимента по определению низкочастотных колебаний свободной поверхности Черного моря.

Для реализации вычислительных экспериментов на ЭВМ необходимо теперь перейти от непрерывной замкнутой математической модели к дискретным замкнутым моделям. Кроме того, для множества дискретных моделей должно выполняться свойство сходимости, то есть для любой как угодно малой погрешности существует дискретная математическая модель, позволяющая получить приближенное решение непрерывной задачи с заданной точностью. Для рационально выбранных дискретных моделей сходимость должна быть достаточно быстрой.

Рациональные дискретные модели будем строить на основе известного [5] метода конечных элементов, который позволяет получать оптимальные по точности дискретные аппроксимации непрерывных моделей и дает быструю сходимость дискретных решений к непрерывным.

Дискретная математическая модель, полученная таким образом [6], представляет собой матричный пучок $Q(\lambda)$, который можно записать в виде полинома третьей степени от λ, коэффициенты которого представляют собой симметричные матрицы. Размерность матриц совпадает с количеством узлов сетки метода конечных элементов. Анализ дискретной модели показывает, что задача решения уравнения $Q(\lambda)\xi = 0$, то есть задача отыскания собственных значений и собственных векторов этого матричного пучка корректна и устойчива.

2. Вычислительные эксперименты

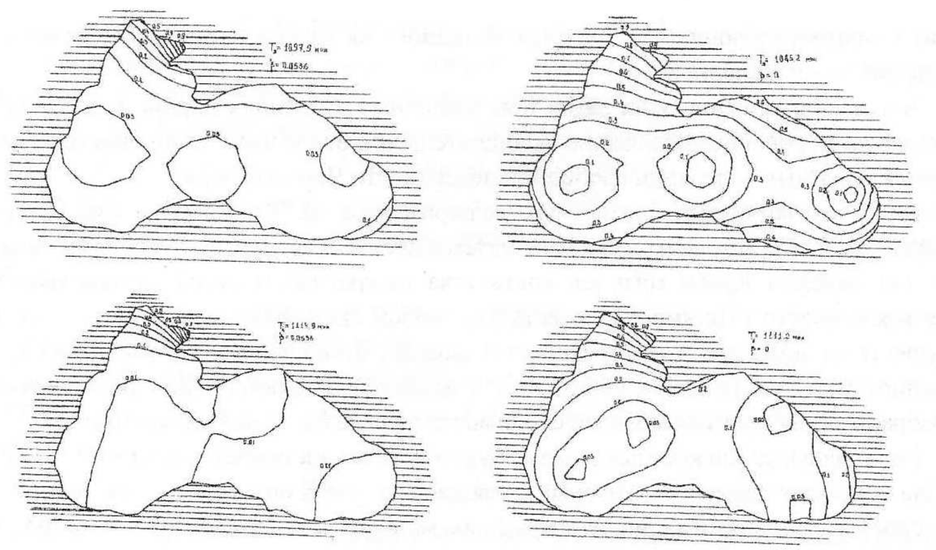
В основу вычислительных экспериментов были положены полученные выше дискретные математические модели. Расчеты проводились для реальной геометрии Черного моря. Варьировался коэффициент Кориолиса f.

Расчет нормальных мод Черного моря без учета эффектов вращения, то есть при $f = 0$, дал значения частот, большие инерционной частоты.

Вычисленные частоты оказались близки к инструментальным наблюдениям в этой области спектра.

Проводился расчет свободных колебаний Черного моря с учетом вращения Земли [6], то есть при значении параметра модели $f = f_1$, где f_1 – инерционная частота, зависящая не только от угловой скорости вращения Земли, но и от географической широты бассейна.

Полученные численные результаты показывают, что учет вращения Земли приводит к эффекту расщепления частот и нормальных мод колебаний, который проявляется в том, что стоячая волна с частотой λ, $\lambda > f_1$, под действием вращения



расщепляется на бегущую вдоль берега в положительном направлении волну и волну, бегущую в отрицательном направлении, причем частота положительной волны меньше λ, а частота отрицательной волны больше λ.

Проведенные вычислительные эксперименты показывают также, что для бассейна с переменным дном, каким является Черное море, учет вращения приводит к появлению новой спектральной ветви свободных колебаний с частотами $\lambda \in (0, f_1)$, которая отсутствует в математической модели при $f = 0$.

Таким образом, можно сделать вывод, что мы достигая поставленной цели – построили рациональную математическую модель, позволяющую изучать низкочастотный спектр свободных колебаний вращающейся жидкости.

Список литературы

1. Новое в численном моделировании: алгоритмы, вычислительные эксперименты, результаты. – М. Наука, 2000 - 247с.
2. *Иванов Ю.Б., Насовкнн В.А., Нестеров В.В., Чехов В.Н.* Литосферлые деформации, возбуждаемые сейшами Черного моря // Геофизический журнал. Киев. - 1994. – 16, – №6. – с.53-60.
3. *Ламб Г* Гидродинамика. М. ОГИЗ, 1947. - 928с.
4. *Иванов Ю.Б,* Обобщенные решения спектральной краевой задачи для системы уравнений теории мелкой воды. // Ученые записки ТНУ. Серия "Математика, Механика, Информатика". – 2001, том 14 (53), №1. –с.43-50.
5. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М. Мир, 1977. – 349 с.
6. *Иванов Ю.Б* Моделирование баротропных сейш в Черном море.// Доп. НАН України – 1999.- №7. – с.117-120.