МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

БИФУРКАЦИИ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ОКРУЖНОСТИ

Белан Е.П.

Таврический национальный университет, факультет математики и информатики, ул. Ялтинская, 4, Симферополь, Украина

Abstract

In this article we formulate conditions defining the bifurcations of equilibria in parabolic equations on a circle. This equations are mathematical models of spread of flame in gas. There are considered one and two parameter bifurcations of equilibria.

Введение

В работе [1], посвященной описанию некоторых общих типов бифуркаций, наблюдаемых в распределенных динамических системах, изучены, в частности, бифуркации пространственно неоднородных стационарных режимов (диссипативных структур) параболических уравнений. В указанной работе возникновение диссипативных структур исследовалось для параболических уравнений на прямой. При изучении параболических уравнений на окружности важную роль играют топологические характеристики, определяющие глобальные свойства решений.

В данной работе проводится бифуркационный анализ параболических уравнений на окружности. Эти уравнения являются математическими моделями процессов распространения пламени в газе. Распространение газоваого пламени описывается уравнением [1]

$$\dot{\xi} - \beta\sqrt{-\Delta}\xi + 2\alpha\Delta\xi + \Delta^2\xi + (\nabla\xi)^2 = 0. \tag{1}$$

В этом уравнении ξ – отклонение фронта горения от стационарного, точка обозначает дифференцирование по времени, Δ – оператор Лапласа. Нелокальный оператор $\sqrt{-\Delta}$ описывает гидродинамическую устойчивость Ландау, комбинация $2\alpha\Delta + \Delta^2$– теплодиффузионную устойчивость, член $(\nabla\xi)^2$ обеспечивает нелинейную стабилизацию. Уравнение (1) относится к случаю плоского пламени. Если рассматривается распространение цилиндрического или сферического пламени со средней кривизной R^{-1}, тогда уравнение (1) принимает вид

$$\dot{\xi} - \beta\sqrt{-\Delta}\xi + 2\alpha\Delta\xi + \Delta^2\xi + R^{-1}\xi + (\nabla\xi)^2 = 0. \tag{2}$$

При рассмотрении слабонадкритического случая $0 < R - R_0 << R_0$, где R_0^{-1} – значение кривизны, при котором тривиальное решение теряет устойчивость, вместо уравнения (2) будем, согласно [1], рассматривать уравнение

$$\dot{\xi} + 2\alpha\Delta\xi + \Delta^2\xi + \xi + (\nabla\xi)^2 = 0, \quad 0 < \alpha - 1 << 1. \tag{3}$$

Уравнения (1), (2), (3). на $S^1 = R/2\pi Z$ инвариантны относительно группы вращения окружности $\theta \to \theta + \varphi$, $\varphi \in R/ \bmod 2\pi$. Следовательно, если $\xi(\theta)$ решение одного из этих уравнений, то $\xi(\theta + \varphi)$, $\varphi \in R/ \bmod 2\pi$ также решение. Диссипативные структуры $\xi(\theta)$, $\xi(\theta + \varphi)$ различать не будем.

Полученные далее бифуркационные теоремы основаны на работе [2]. Применимость результатов работы [2] по центральным многообразиям эквивариантных векторных полей для рассматриваемых здесь уравнений вытекает из [3, 4].

Бифуркационный анализ в уравнениях (1) – (3), а также аналогичным им, проведем исходя из кратности нулевых собственных значений, порожденных этими уравнениями, операторов.

1. **Одна пара нулевых собственных значений**

В этом пункте рассматривается уравнение (3). В качестве фазового пространства уравнения (3) примем соболевское пространство $H^2(S^1)$. Обозначим $\|.\|_{H^2(S^1)} = \|.\|_2$.

Собственным значением оператора

$$L_1(\alpha)\xi = 2\alpha\Delta\xi + \Delta^2\xi + \xi$$

в пространстве $H^2(S^1)$, соответствующим собственной функции $e^{ik\theta}$, является

$$\lambda_k(\alpha) = -2\alpha k^2 + k^4 + 1, \quad k = 0, \pm 1, \dots .$$

Очевидно, $\lambda_{\pm 1}(1)$=0. Собственные значения $\lambda_k(\alpha)$ для $k \neq \pm 1$, $0 < \alpha - 1 << 1$ положительны и равномерно отделены от нуля. Имеет место

Теорема 1. *Существуют такие $a > 0$, $\delta_0 > 0$, что для $0 < \alpha - 1 < \delta_0$ уравнение (3) имеет стационарное решение $\xi_1(\theta, \alpha)$. Функция $\xi_1(\theta, \alpha)$ удовлетворяет равенству $\xi_1 = 3(2(\alpha - 1)^{1/2}) \cos\theta + (\alpha - 1)\cos 2\theta - 9(\alpha - 1) + O\left((\alpha - 1)^{3/2}\right)$.*

Решение ξ_1 орбитально экспоненциально устойчиво. Нулевое решение уравнения (3) неустойчиво. Для $\|\xi\|_2 < a$ уравнение (3) неблуждающих точек, кроме $\xi = 0$, $\xi = \xi_1(\theta + \varphi, \alpha)$, $\varphi \in R/ \bmod 2\pi$, не имеет.

Доказательство. При сформулированных условиях уравнение (3) имеет экспоненциально устойчиво двумерное центральное многообразие V, инвариантное относительно группы вращения окружности. Для точек $\xi \in V$ имеет место представление

$$\xi = ze^{i\theta} + \bar{z}e^{-i\theta} + \sigma_2\left(ze^{i\theta}, \bar{z}e^{-i\theta}, \alpha\right) + \sigma_3\left(ze^{i\theta}, \bar{z}e^{-i\theta}, \alpha\right) + \cdots, \tag{4}$$

где $\sigma_2, \sigma_3, \ldots$ квадратичная, кубическая, …формы относительно $\zeta, \bar{\zeta}$. Ограничение уравнения (3) на центральное многообразие V представляет систему уравнений на плоскости, которая инвариантна относительно преобразования $z \to ze^{-i\varphi}$, $\varphi \in R/ \bmod 2\pi$, и, следовательно, имеет нормальную форму Пуанкаре

$$\dot{z} = z\left(2(\alpha - 1) + c_1(z\bar{z}) + c_2(z\bar{z})^2 + \cdots\right). \tag{5}$$

Второе уравнение получается операцией комплексного сопряжения. Подставляем (4), (5) в уравнение (3). В результате получим рекуррентную последовательность уравнений вида

$$B\sigma_k = Q_k, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{6}$$

где Q_k форма k-го порядка относительно ζ, $\bar{\zeta}$. Имеет место равенство

$$Q_2 = (\zeta - \bar{\zeta})^2. \tag{7}$$

Коэффициенты форм Q_k, $k = 3, \ldots$ выражаются полиномиальным образом через коэффициенты форм σ_s, $2 \leqslant s < k$. Оператор B является диагональным на множестве всех многочленов относительно ζ, $\bar{\zeta}$. Собственными функциями оператора B являются мономы $\zeta^k\bar{\zeta}^s$:

$$B\zeta^k\bar{\zeta}^s = (-2(k-s)^2 + (k-s)^4 + 1)\zeta^k\bar{\zeta}^s. \tag{8}$$

Согласно равенств (7), (8), из уравнения (6) следует

$$\sigma_2 = \frac{1}{9}\left(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2\right) - 2\zeta\bar{\zeta}.$$

Из разрешимости уравнения (6) для $k = 3$ находим $c_1 = -\dfrac{4}{9}$. Подставляя значение c_1 в (5), получим

$$\dot{z} = z\left(2(\alpha - 1) - \frac{4}{9}z\bar{z} + \cdots\right). \tag{9}$$

Полагая $z\bar{z} = r$ приходим к уравнению

$$\dot{r} = 2r\left(2(\alpha - 1) - \frac{4}{9}r + O(r^2)\right). \tag{10}$$

Уравнение (10) имеет два стационарных решения

$$r = 0, \quad r = r_0(\alpha) = \frac{9}{2}(\alpha - 1) + o(\alpha - 1).$$

Решение $r = r_0$ экспоненциально устойчиво. Следовательно, уравнение (9) для малых $\alpha - 1 > 0$ имеет однопараметрическое семейство инвариантных окружностей $|z|^2 = r_0(\alpha)$. Каждая такая окружность состоит из стационарных точек системы (9).

Неблуждающее множество системы (9) в окрестности нуля целиком состоит из таких окружностей. Полагая в (4)

$$z = \sqrt{\frac{9}{2}(\alpha - 1) + o(\alpha - 1)},$$

убеждаемся в справедливости разложения (4). Из принципа сведения следует орбитальная экспоненциальная устойчивость семейства стационарных решений $\xi_1(\theta + \varphi, \alpha)$, $\varphi \in R/ \bmod 2\pi$.

2. Три нулевых собственных значений

Рассмотрим на окружности S^1 уравнение

$$\dot{\xi} - \beta\sqrt{-\Delta}\xi - \Delta\xi + \alpha\xi + \frac{4}{3}\xi^3 = 0, \tag{11}$$

где $0 < \beta - 1 << 1$, $0 < \alpha << 1$. В качестве фазового пространства уравнения (11) примем соболевское пространство $H^1(S^1)$. Обозначим $\|.\|_{H^1(S^1)} = \|.\|_1$.

Собственной функции $e^{ik\theta}$ оператора

$$L_2(\alpha, \beta)\xi = -\beta\sqrt{-\Delta} - \Delta\xi + \alpha\xi$$

в пространстве $H^1(S^1)$ отвечает собственное значение

$$\lambda_k(\alpha, \beta) = -\beta|k| + k^2 + \alpha, \quad k = 0, \pm 1, \dots .$$

Очевидно, $\lambda_0(0, 1) = 0$, $\lambda_{\pm 1}(0, 1) = 0$, а остальные собственные значения оператора $L_2(\alpha, \beta)$ положительны и отделены от нуля.

Динамика семейства уравнений (11) в окрестности нуля описывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Существуют такие $a > 0$, $\delta_0 > 0$, что если $\|(\beta - 1, \alpha)\| < \delta_0$, $\alpha > 0$, $(\beta - 1) - \alpha > 0$, тогда уравнение (11) имеет пространственно неоднородное стационарное решение $\xi_1(\theta, \alpha, \beta)$. Имеет место равенство*

$$\xi_1(\theta, \alpha, \beta) = (\beta - 1 - \alpha)^{1/2}\cos\theta - \frac{4}{9}(\beta - 1 - \alpha)^{3/2}\cos 3\theta + \cdots . \tag{12}$$

Решение $\xi_1(\theta, \alpha, \beta)$ уравнения (11) орбитально экспоненциально устойчиво. Нулевое решение уравнения (11) неустойчиво. Неблуждающих точек для $\|\xi\|_1 < a$, кроме $\xi = 0$, $\xi = \xi_1(\theta + \varphi, \alpha)$, $\varphi \in R/ \bmod 2\pi$, уравнение (11) не имеет.

Доказательство. Уравнение (11) инвариантно относительно отражения $\xi \to -\xi$. Экспоненциально устойчивое трехмерное центральное многообразие V уравнения (11) инвариантно относительно группы вращения окружности и преобразования $\xi \to -\xi$. Для точек $\xi \in V$ имеет место представление

$$\xi = s + ze^{i\theta} + \bar{z}e^{-i\theta} + \sigma_3\left(s, ze^{i\theta}, ze^{-i\theta}, \alpha, \beta\right) + \cdots , \tag{13}$$

где σ_3 кубическая форма относительно $s, \zeta, \bar{\zeta}$. Ограничение уравнения (11) на многообразие V приводит к системе уравнений в трехмерном пространстве

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -s\alpha + a_3^1(s, z, \bar{z}) + \cdots, \\ \dot{z} &= z(\beta - 1 - \alpha) + a_3^2(s, z, \bar{z}) + \cdots, \end{aligned} \tag{14}$$

которая инвариантна относительно преобразований $s \to s$, $z \to ze^{-i\varphi}$, $\varphi \in R/ \bmod 2\pi$; $s \to -s$, $z \to -z$. В системе (14) $a_3^1, a_3^2, \ldots$ кубическая форма относительно $s, \zeta, \bar{\zeta}$. Подставляем (13), (14) в уравнение (11). В результате относительно $\sigma_3, \sigma_4, \ldots$ получаем рекуррентную последовательность уравнений вида

$$B\sigma_k = Q_k, \quad k = 3, 4, \ldots \tag{15}$$

Здесь Q_k – форма k-го порядка относительно $s, \zeta, \bar{\zeta}$. Имеет место равенство

$$Q_3 = -\frac{4}{3}\left(s + \zeta + \bar{\zeta}\right)^3.$$

Коэффициенты формы Q_k выражаются через коэффициенты формы σ_s, $3 \leqslant s < k$ полиномиальным образом. Оператор B является диагональным оператором на множестве всех многочленов относительно $s, \zeta, \bar{\zeta}$. Собственными функциями оператора B являются мономы $s^{j_1}\zeta^{j_2}\bar{\zeta}^{j_3}$:

$$Bs^{j_1}\zeta^{j_2}\bar{\zeta}^{j_3} = (-|j_2 - j_3| + (j_2 - j_3)^2)s^{j_1}\zeta^{j_2}\bar{\zeta}^{j_3}. \tag{16}$$

Из условия разрешимости уравнения (15) для $k = 3$ следует

$$a_3^1 = -\frac{4}{3}s^3, \quad a_3^2 = -4s^2 z - 4z^2\bar{z}. \tag{17}$$

В этом случае уравнение (15) имеет решение

$$\sigma_3 = -\frac{2}{9}\left(\zeta^3 + \bar{\zeta}^3\right).$$

Коэффициенты формы σ_3 определены с точностью $O(\|(\beta - 1), \alpha\|)$. Систему (14), учитывая отмеченную выше инвариантность и равенства (17), можно представить в форме

$$\begin{aligned} \dot{s} &= s(-\alpha - \frac{4}{3}s^2 - 8z\bar{z} + g_1(s^2, z\bar{z}, \alpha, \beta)), \\ \dot{z} &= z(\beta - 1 - \alpha - 4s^2 - 4z\bar{z} + g_2(s^2, z\bar{z}, \alpha, \beta)), \end{aligned} \tag{18}$$

где $g_k(u, v, \alpha, \beta) = O(\|(u, v)\|)$, $k = 1, 2$. В системе (18) опустим функции g_k, $k = 1, 2$. Перейдем от полученной полиномиальной системы уравнений к факторсистеме

$$\begin{aligned} \dot{p} &= 2p(-\alpha - \frac{4}{3}p - 8r), \\ \dot{r} &= 2r(\beta - 1 - \alpha - 4p - 4r), \end{aligned} \tag{19}$$

где $p = s^2$, $r = z\bar{z}$. Эта система принадлежит к двупараметрическому семейству уравнений Лотка-Вольтерра легкого типа. Бифуркационные диаграммы в этих семействах представлены в [5], [6] . В силу условий теоремы и согласно [5], [6] система (18) имеет неустойчивое нулевое решение и орбитально экспоненциально устойчивое инвариантное множество $s = 0$, $4z\bar{z} = \beta - 1 - \alpha + O((\beta - 1 - \alpha)^2)$ целиком состоящее из стационарных точек. Рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 1, завершают доказательство теоремы.

В случае $\alpha < 0$, $(\beta - 1) - \alpha > 0$ динамика системы (18), а, следовательно, и динамика уравнения (11) является более богатой. В следующей теореме, полученной на основе анализа систем (19), (18), приведены условия, при которых уравнение (11) в окрестности нуля имеет наибольшее число различных стационарных режимов.

Теорема 3. *Существуют такие $a > 0$, $\delta_0 > 0$, что если $\|(\beta - 1, \alpha)\| < \delta_0$, $\alpha < 0$, $2(\beta - 1) + \alpha > 0$, $(\beta - 1) + 2\alpha < 0$, то уравнение* (11) *имеет два пространственно однородных стационарных решений $\xi_0(\alpha, \beta)$, $-\xi_0(\alpha, \beta)$ и пять пространственно неоднородных стационарных решений $\xi_1(\theta, \alpha, \beta)$, $\xi_2^{\pm}(\theta, \alpha, \beta)$, $-\xi_2^{\pm}(\theta, \alpha, \beta)$. Имеет место равенства*

$$\xi_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(-2\alpha)^{1/2} + O((-\alpha)^{3/2}),$$
$$\xi_2^{\pm}(\theta, \alpha, \beta) = \pm\frac{1}{2}(\frac{3}{5}(2(\beta - 1) + \alpha))^{1/2} + (-\frac{1}{5}(2\alpha + \beta - 1))^{1/2}\cos\theta + O(\|(\beta - 1, \alpha)\|).$$

Функция $\xi_1(\theta, \alpha, \beta)$ удовлетворяет равенству (12). *Решения $\xi_0(\alpha, \beta)$, $-\xi_0(\alpha, \beta)$ экспоненциально устойчивы, решение $\xi_1(\theta, \alpha, \beta)$ орбитально экспоненциально устойчиво. Нулевое решение и решения $\xi_2^{\pm}(\theta, \alpha, \beta)$, $-\xi_2^{\pm}(\theta, \alpha, \beta)$ неустойчивы. Уравнения* (11) *для $\|\xi\|_1 < a$ неблуждающих точек, кроме указанных выше стационарных точек и их сдвигов, не имеет.*

Переход от кубической функции к квадратичной, как правило, существенно усложняет бифуркационный анализ. Рассмотрим в этой связи уравнение (1). В качестве фазового пространства уравнение (1) примем пространство $H^2(S^1)$. Собственным значением оператора:

$$L_3(\alpha, \beta)\xi = -\beta\sqrt{-\Delta}\xi + 2\alpha\Delta\xi + \Delta^2\xi$$

в пространстве $H^2(S^1)$, соответствующим собственной функции $e^{ik\theta}$, является:

$$\lambda_k(\alpha, \beta) = -\beta|k| - 2\alpha k^2 + k^4$$

Очевидно, $\lambda_0(\alpha, \beta) = 0$. Обозначим $\gamma = \beta + 2\alpha - 1$.

Теорема 4. *Существует такое δ_0, что если $0 < \beta + 2\alpha - 1 < \delta_0$, то уравнение* (1) *имеет решение вида:*

$$\xi_0(t, \theta, \alpha, \beta) = Vt + \chi(\theta), \tag{20}$$

где

$$\chi(\theta) = 2(3\gamma)^{1/2}\cos\theta + \cdots, \quad V = -18\gamma t + \cdots.$$

Решение ξ_0 устойчиво.

Доказательство. Уравнение (1) имеет экспоненциально устойчивое трехмерное центральное многообразие V, инвариантное относительно группы вращения окружности. Для точек $\xi \in V$ имеет место представление

$$\xi = s + ze^{i\theta} + \bar{z}e^{-i\theta} + \sigma_2\left(s, ze^{i\theta}, \bar{z}e^{-i\theta}\right) + \cdots, \tag{21}$$

где $\sigma_2(s,\zeta,\bar{\zeta})$ квадратичная форма относительно $s,\zeta,\bar{\zeta}$. Ограничение уравнения (1) на V приводит к системе

$$\begin{aligned} \dot{s} &= a_2^1(s,z,\bar{z}) + \cdots, \\ \dot{z} &= z\gamma + a_2^2(s,z,\bar{z}) + \cdots, \end{aligned} \tag{22}$$

где $a_2^1(s,z,\bar{z}), a_2^2(s,z,\bar{z}), \ldots$ квадратичные формы относительно $s,z,\bar{z}$. Подставляем (21), (22) в уравнение (1). В результате относительно $\sigma_2, \sigma_3, \ldots$ получаем рекуррентную последовательность уравнений вида:

$$B\sigma_k = Q_k, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{23}$$

где Q_k – форма k-го порядка относительно $s,\zeta,\bar{\zeta}$. Имеет место равенство:

$$Q_2 = (\zeta - \bar{\zeta})^2. \tag{24}$$

Оператор B является диагональным оператором на множестве всех многочленов относительно $s,\zeta,\bar{\zeta}$. Собственными функциями оператора B являются мономы $s^{j_1}\zeta^{j_2}\bar{\zeta}^{j_3}$:

$$Bs^{j_1}\zeta^{j_2}\bar{\zeta}^{j_3} = (-\beta|j_2 - j_3| - 2\alpha(j_2 - j_3)^2 + (j_2 - j_3)^4)s^{j_1}\zeta^{j_2}\bar{\zeta}^{j_3} \tag{25}$$

Из равенств (24), (25), уравнения (23) следует:

$$a_2^1 = -2z\bar{z}, \quad a_2^2 = 0, \quad \sigma_2 = \frac{1}{12}(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2).$$

Из условия разрешимости уравнения (23) для $k = 3$ находим a_3^1, a_3^2. Подставляем a_3^1, a_3^2 в систему (22). В результате получаем систему, инвариантную относительно преобразования $s \to s$, $z \to ze^{-i\varphi}$, $\varphi \in R/ \bmod 2\pi$, вида

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -2z\bar{z} + \cdots, \\ \dot{z} &= z(\beta + 2\alpha - 1 - \frac{1}{3}z\bar{z} + \cdots). \end{aligned} \tag{26}$$

Второе уравнение системы (26) не содержит переменной s, а правая часть первого уравнения является функцией $z\bar{z}$. Второе уравнение системы (26) имеет при $0 < \beta + 2\alpha - 1 < \delta$ орбитально экспоненциально устойчивое семейство инвариантных окружностей

$$|z| = r_0 = (3(\beta + 2\alpha - 1))^{1/2} + O(\beta + 2\alpha - 1),$$

состоящее из стационарных точек. Очевидно, что решение $s = -2r_0^2 t$ первого уравнения системы (26) является устойчивым.

3. Две пары нулевых собственных значений

Рассмотрим в пространстве $H^2(S^1)$ уравнение

$$\dot{\xi} - \beta\sqrt{-\Delta}\xi + 2\alpha\Delta\xi + \Delta^2\xi + \gamma\xi + \frac{4}{3}\xi^3 = 0. \qquad (27)$$

В этом уравнение α, β будем считать параметрами. Собственным значением оператора

$$L_4\xi = -\beta\sqrt{-\Delta}\xi + 2\alpha\Delta\xi + \Delta^2\xi + \gamma\xi$$

в пространстве $H^2(S^1)$, соответствующим собственной функции $e^{ik\theta}$, является

$$\lambda_k(\alpha, \beta) = \beta|k| - 2\alpha k^2 + k^4 + \gamma, \quad k = 0, \pm 1, \ldots .$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} -\beta - 2\alpha + 1 + \gamma = 0,\\ -2\beta - 8\alpha + 16 + \gamma = 0. \end{aligned} \qquad (28)$$

Пусть $\gamma \in (4, 12)$. В этом случае система (28) имеет решение $\alpha = \alpha^* = \dfrac{14-\gamma}{4}$, $\beta = \beta^* = \dfrac{3\gamma - 12}{2}$ лежащее в первой четверти пространства параметров (α, β). Очевидно, $\lambda_{\pm 1}(\alpha^*, \beta^*) = 0$, $\lambda_{\pm 2}(\alpha^*, \beta^*) = 0$. Уравнение (27) инвариантно относительно отражения $\xi \to -\xi$. Экспоненциально устойчивое четырехмерное центральное многообразие V уравнения (27) инвариантно относительно группы вращения окружности и преобразования $\xi \to -\xi$. Для точек $\xi \in V$ имеет место представление

$$\xi = z_1 e^{i\theta} + \bar{z}_1 e^{-i\theta} + z_2 e^{i2\theta} + \bar{z}_2 e^{-i2\theta} + \sigma_3(z_1 e^{i\theta}, \bar{z}_1 e^{-i\theta}, z_2 e^{i2\theta}, \bar{z}_2 e^{-i2\theta}, \alpha, \beta) + \cdots ,$$

где $\sigma_3, \ldots$ кубическая, …формы относительно $\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2$. Действуя также, как и выше, приходим к заключению, что сужение уравнения (27) на V приводит к системе

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = z_1(\beta - \beta^* + 2(\alpha - \alpha^*) - 4z_1\bar{z}_1 - 8z_2\bar{z}_2) + f_1(z, \alpha - \alpha^*, \beta - \beta^*),\\ \dot{z}_2 = z_2(2(\beta - \beta^*) + 8(\alpha - \alpha^*) - 8z_1\bar{z}_1 - 4z_2\bar{z}_2) + f_2(z, \alpha - \alpha^*, \beta - \beta^*), \end{aligned} \qquad (29)$$

которая инвариантна относительно преобразования

$$z_1 \to z_1 e^{i\varphi}, \quad z_2 \to z_2 e^{i2\varphi}, \quad \varphi \in R/ \bmod 2\pi; \quad z_1 \to -z_1, \quad z_2 \to -z_2.$$

В системе (29) $\|f_k(z, \alpha - \alpha^*, \beta - \beta^*)\| = O(\|z\|^5)$, $k = 1, 2$. Опустим в системе уравнений (29) функции f_k, $k = 1, 2$ и перейдем от полученной полиноминальной системы уравнений к факторсистеме

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 = 2\rho_1(\beta - \beta^* + 2(\alpha - \alpha^*) - 4\rho_1 - 8\rho_2),\\ \dot{\rho}_2 = 2\rho_2(2(\beta - \beta^*) + 8(\alpha - \alpha^*) - 8\rho_1 - 4\rho_2). \end{aligned} \qquad (30)$$

Система (30) является двупараметрическим семейством уравнений Лотка-Вольтерра легкого типа. Результаты в [5, 6] по бифуркационному анализу в двупараметрических семействах уравнений Лотка-Вольтерра легкого типа позволяют дать полное описание бифуркационных диаграмм и перестроек в системе (29) в окрестности нуля. Представление V центрального многообразия приводит к соответствующим результатам для уравнения (27). Ограничимся ниже описанием динамики уравнения (27) в наиболее интересной области изменения параметров. Отметим, что в формулируемой теореме 5 представление инвариантного тора, векторного поля на нем получено, исходя из указанных выше свойств инвариантности, а также анализа разложения функций f_k, $k = 1, 2$ в системе (29).

Теорема 5. *Существуют такие* $a > 0$, $\delta_0 > 0$, *что если* $\|(\alpha - \alpha^*, \beta - \beta^*)\| < \delta_0$, $\beta - \beta^* + 2(\alpha - \alpha^*) > 0$, $2(\beta - \beta^*) + 8(\alpha - \alpha^*) > 0$, $3(\beta - \beta^*) + 14(\alpha - \alpha^*) > 0$, $\alpha - \alpha^* > 0$, *то уравнение* (27) *имеет два орбитально экспоненциально устойчивых пространственно неоднородных стационарных решений* $\xi_1(\theta, \alpha, \beta)$, $\xi_2(\theta, \alpha, \beta)$. *Имеют место равенства*

$$\xi_1(\theta, \alpha, \beta) = (\beta - \beta^* + 2(\alpha - \alpha^*))^{1/2} \cos\theta + \cdots ,$$
$$\xi_2(\theta, \alpha, \beta) = (2(\beta - \beta^*) + 8(\alpha - \alpha^*))^{1/2} \cos 2\theta + \cdots .$$

Уравнение (27) *имеет двумерный инвариантный тор, определяемый равенством*

$$\begin{aligned}\xi = (&\frac{3(\beta - \beta^*) + 14(\alpha - \alpha^*)}{3})^{1/2}(1 + (\alpha - \alpha^*) r_1(\varphi_1, \varphi_2, \alpha, \beta)) \cos(\theta + \varphi_2) + \\ &+((\alpha - \alpha^*)^{1/2} + (\beta - \beta^*)^{1/2}(\alpha - \alpha^*) r_2(\varphi_1, \varphi_2, \alpha, \beta)) 2 \cos(2\theta + \varphi_2) + \cdots ,\end{aligned} \tag{31}$$

где $r_1(\varphi_1, \varphi_2, \alpha, \beta)$, $r_2(\varphi_1, \varphi_2, \alpha, \beta)$ — 2π*-периодические функции* φ_1, φ_2. *Ограничение уравнения* (27) *на тор* (31) *определяется системой уравнений*

$$\dot\varphi_1 = (3(\beta - \beta^*) + 14(\alpha - \alpha^*))^{1/2}(\alpha - \alpha^*) g(2\varphi_1 - \varphi_2, \alpha, \beta),$$
$$\dot\varphi_2 = 0,$$

где $g(\phi, \alpha, \beta)$ — 2π*-периодическая функция* ϕ.

Решение $\xi_1(\theta, \alpha, \beta)$, $\xi_2(\theta, \alpha, \beta)$ *орбитально экспоненциально устойчивы. Тор и нулевое решение уравнения* (27) *неустойчивы.*

Уравнение (27) *в области* $\|\xi\|_1 < a$ *неблуждающих точек, отличных от точек, принадлежащих указанным выше инвариантным множествам и их сдвигам, не имеет.*

Список литературы

1. **Зельдович Я.Б., Маломед Б.А.** Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах// Изв. вузов, Радиофизика. – 1982 – 25. – 6. С. 591 – 618.
2. **Ruels D.** Bifurcation in the of a summetry group// Arch. Rat. Mecxh. An. – 1973 p. 136–152
3. **Марсден Дж., Мак Кракен М.** Бифуркация рождения цикла и её приложения 1980. – М.: Мир,. – 368 с.

4. **Хенри Д.** Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. 1985. – М.: Мир,. – 376 с.
5. **Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.** Теория бифуркаций.//1986. сер. Современные проблемы математики. М.:ВИНИТИ Т.5.С.5–218.
6. **Kuznetzov Y.A.** Elements of applied bifurcation theory. 1998 – New York. Springer-Verlag,. – 591 p.