УДК 519.6

НЕКОТОРЫЕ ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГРАФОВ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

А. А. Сапоженко

Московский государственный университет, Россия
Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 01-01-00266

Abstract

The survey of results about the number of independent sets in graphs and the number of sum-free sets of the segment $[1,\ n]$ of natural numbers is given. A theorem about the number of independent sets in quasi-regular graphs is proved.

Введение

Данная работа посвящена решению некоторых перечисленных задач из теории групп и теории чисел с помощью теории графов. Пусть задано множество G с операцией сложения $+$. Подмножество $A \subseteq G$ называется *свободным от сумм*, если для любых $a,\ b \in A$ их сумма $a+b$ не принадлежит множеству A. Это понятие было введено Шуром, который доказал, что нельзя разбить отрезок $[0,\ n]$ на фиксированное число подмножеств, свободных от сумм, если n достаточно велико по сравнению с числом подмножеством. В [3] Камерон и Ердеш доказали, что число множеств, свободных от сумм, в отрезке $n/3, n$ равно $O\left(2^{n/2}\right)$. Н. Алон [1] и независимо Н. Калкин [2] доказали, что число $s(n)$ множеств, свободных от сумм, в отрезке $n/3, n$ равно $s(n) = 2^{n(1/2+o(1))}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим через $s_\varepsilon(n)$ число множеств, свободных от сумм, в отрезке $\left[\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)n, n\right]$. В [5] доказана следующая

Теорема 1. *Существует константа $c > 0$, зависящая от ε такая, что для всякого $\varepsilon > 0$*

$$s_\varepsilon(n) \leqslant c2^{n/2}. \tag{1}$$

В [4] и в несколько другой формулировке в и с $\varepsilon \approx 10^{-8}$ доказана

Теорема 2. *Для достаточно больших четных n для любой абелевой группы G четного порядка n с числом подгрупп индекса 2, равным t,*

$$t \cdot 2^{n/2} - 2^{(n/4)(1+o(1))} \leqslant s(n) \leqslant t \cdot 2^{n/2} + 2^{n(1/2-\varepsilon)}, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0.017$.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $f(n) = n^{3/4}\log n$. Тогда существует абсолютная константа $c > 0$, что для числа $\hat{s}(n)$ множеств, свободных от сумм в отрезке $[f(n),\ n]$, выполняется неравенство $\hat{s}(n) \leqslant c2^{n/2}$.*

При доказательстве используются теорема Фреймана из [8] и доказываемая ниже теорема 18 Для произвольного подмножества K множества G с операцией сложения $+$ положим $K+K=\{a+b : a,b\in K\}$.

Теорема 4. *(Г. А. Фреймана) Пусть K — конечное множество натуральных чисел. Тогда*

$$|K+K|\geqslant 2|K|-1.$$

Если при этом

$$|K+K|\geqslant 2|K|-1+b,\qquad 0\leqslant b\leqslant |K|-3,$$

то K содержится в арифметической прогрессии длины $|K|+b$.

Обзор резутьтатов о числе независимых множеств в графах

Граф с n вершинами, в котором минимальная степень вершины равна k, а максимальная не превосходит $k+\theta$, назовем $(n,\ k,\ \theta)$ — *графом.* Везде в дальнейшем предполагается, что n и k достаточно велики, а $\theta=o(k)$ при $k\to\infty$. При выполнении последнего условия $(n,\ k,\ \theta)$ — граф называется *почти регулярным.* Подмножество A вершин графа G называется *независимым*, если подграф, порожденный множеством A, не содержит ребер. Семейство всех независимых множеств графа G обозначим через $\tilde{I}(G)$ и положим $I(G)=|\tilde{I}(G)|$. Пусть $G=(V;\ E)$ — граф с множеством вершин V и множеством ребер E, а $\nu\in V$. Назовем *границей* вершины ν в графе G множество $\partial\nu=\{u:\ \ (u,\ \nu)\in E\}$. Ясно, что $\sigma(\nu)=|\partial\nu|$ есть степень вершины ν. *Границу* подмножества A вершин графа G, определим как множество

$$\partial A=\left(\bigcup_{\nu\in A}\partial\nu\right)\setminus A.$$

Пусть $0\ \leqslant\ \delta\ <\ 1$. Граф $G\ =\ (V;\ E)$ назовем δ — *расширителем*, если $|A|\leqslant|\partial A|(1-\partial)$ для всех $A\in\tilde{I}(G)$. Ниже представлен обзор результатов, касающихся числа независимых множеств в графах и доказывается теорема 18 Справедливо следующее очевидное утверждение

Теорема 5. *Для всякого графа* Γ *на n вершинах*

$$n+1\leqslant I(\Gamma)\leqslant 2^n. \tag{3}$$

Нижняя граница достигается на полном графе, верхняя - на пустом.

Следующая часть результатов касается деревьев, цепей и циклов. Пусть P_n — цепь на n вершинах, а S_n — звезда, т. е. дерево с n вершинами, имеющее вершину степени $n-1$.

Теорема 6. *Для любого дерева T на n вершинах*

$$\varphi_{n+2}=I(P_n)\leqslant I(T)\leqslant I(S_n)=2^{n-1}+1, \tag{4}$$

где $\{\varphi_n,\ n = 1, 2, ...,\}$ *последовательность Фиббоначчи: 1,2,3,5,...*

Обозначим через C_n цикл на n вершинах.

Теорема 7. *Пусть* $\hat{\varphi}_n$, *последовательность, такая, что* $\hat{\varphi}_1 = 1$, $\hat{\varphi}_2 = 3$, $\hat{\varphi}_{n+2} = \hat{\varphi}_{n+1} + \hat{\varphi}_n$. *Тогда*

$$I(C_n) = \hat{\varphi}_n. \tag{5}$$

Теорема 8. *Пусть* $n = km + r,\ r < k$. *Тогда для любого леса* F *на* n *вершинах с* k *компонентами связности без изолированных вершин*

$$3^{k-1}\varphi_{n-2k+4} \leqslant I(F) \leqslant (2^m + 1)^r \left(2^{m-1} + 1\right)^{k-r}. \tag{6}$$

Для регулярных и почти регулярных графов известно следующее. Н. Алоном [1] доказана следующая

Теорема 9. *Для любого* k *- регулярного графа* Γ *на* n *вершинах*

$$I(\Gamma) \leqslant 2^{n(1/2+O(k^{-0.1}))}. \tag{7}$$

Граница [7] достижима на графе $H_{n,k}$, представляющем собой объединение $n/2k$ попарно непересекающихся полных двудольных графов степени k, каждый из которых имеет $2k$ вершин. Для такого графа

$$I(H_{n,k}) = (2^{k+1} - 1)^{n/2k} = 2^{n(1/2+O(k^{-1}))}. \tag{8}$$

Н. Алон [1] предположил, что $H_{n,k}$ имеет наибольшее число независимых множеств среди k - регулярных графов на n вершинах. Это предположение было частично доказано в работе Кана [9], где получен следующий результат:

Теорема 10. *Для всякого* k *- регулярного двудольного графа* Γ *на* n *вершинах*

$$I(\Gamma) \leqslant 2^{(n/2k)\log(2^{k+1}-1)}. \tag{9}$$

Пусть B^n есть n - мерный единичный куб, который является n - регулярным графом на $N = 2^n$ вершинах. А. Д. Коршунов и А. А. Сапоженко [10] доказали следующее утверждение.

Теорема 11.

$$I(B^n) \sim 2\sqrt{e}2^{2^{n-1}} = 2\sqrt{e}2^{N/2}. \tag{10}$$

Обозначим степень вершины ν через $\sigma(\nu)$. Граф Γ на n вершинах назовем $(n,\ k,\ \theta)$ $-$ *графом*, если $k \leqslant \sigma(\nu) \leqslant k + \theta$ для любой вершины ν. Назовем $(n,\ k,\ \theta)-$ *graph* Γ *почти регулярным*, если $\theta/k = \varepsilon(k)$, где $\varepsilon(k) \to 0$ при $k \to \infty$.

А.А. Сапоженко [6] доказал следующие три утверждения.

Теорема 12. *Для произвольного* $(n,\ k,\ \theta)$ $-$ *графа* Γ

$$I(\Gamma) \leqslant 2^{\frac{n}{2}\left(1+O\left(\theta/k+\sqrt{(\log k)/k}\right)\right)}. \tag{11}$$

Этот рузультат улучшает остаточный член в оценке Алона из [1] и обобщает ее на почти регулярные графы.

Обозначим через $I_\beta(\Gamma)$ число подмножеств $A \in \tilde{I}(\Gamma)$, таких, что $||A| - n/4| \geqslant \beta n/4$.

Теорема 13. *Пусть* $\Gamma = (V;\ E)$ *является* $(n,\ k,\ \theta)$ *– графом и* $0 < \beta < 1$. *Обозначим через* $I_\beta(\Gamma)$ *число подмножеств* $A \in \tilde{I}(\Gamma)$, *таких, что* $||A| - n/4| \geqslant \beta n/4$. *Тогда*

$$I_\beta(\Gamma) \leqslant 2^{\frac{n}{2}\left(\frac{\beta^2}{2\ln 2} + O\left(\frac{\theta}{k} + \sqrt{\frac{\log k}{k}}\ \right)\right)}. \tag{12}$$

Теорема 14. *Пусть* $(n,\ k,\ \theta)$ *– граф* $\Gamma = (V;\ E)$ *является* δ *– расширителем для некоторого* $0 \leqslant \delta < 1$. *Тогда* [1]

$$I(\Gamma) \leqslant 2^{\frac{n}{2}\left(1 - \delta/7 + O\left(\theta/k + \sqrt{(\log k)/k}\ \right)\right)}. \tag{13}$$

Приведем некоторые результаты о двудольных графах. Н. Алон доказал следующую оценку.

Теорема 15. *Пусть* Γ *– двудольный граф на* n *вершинах, такой, что* $|\sigma(\nu) - k| \leqslant k^{5/8}$ *для вякой величины* ν. *Тогда*

$$I(\Gamma) \leqslant 2^{n(1/2 + O(k - 0.1))}. \tag{14}$$

Двудольный граф $\Gamma = (X, Z; E)$ с долями вершин X и Z назовем *двудольным* $(\varepsilon,\ \delta)$ *– расширителем*, если $|A| \leqslant |\partial A|(1-\delta)$ для всех $A \subseteq X$, таких что $|A| \leqslant \varepsilon|X|$ для всех $A \subseteq Z$, таких, что $|A| \leqslant \varepsilon|Z|$. В получен следующий результат.

Теорема 16. *Пусть* $(n,\ k,\ \theta)$ *– граф* $\Gamma = (X, Z; E)$ *является двудольным* $(1/2,\ \delta)$*– расширителем,* n *и* k *достаточно велики. Кроме того пусть* z *– наибольшее из решений уравнения* $x = \log(2ex/c\delta)$. *Тогда*

$$2^{|X|} + 2^{|Z|} - 1 \leqslant I(\Gamma) \leqslant \left(2^{|X|} + 2^{|Z|}\right)\left(1 + 2^{-k\delta/z + O\left(\sqrt{k}\log k + \theta\right)}\right). \tag{15}$$

Рассмотрим теперь случайные графы на n вершинах, такие, что каждое ребро появляется случайно и независимо с вероятностью $1/2$.

Теорема 17. *С вероятностью, стремящейся к 1 при* $n \to \infty$, *т. е. почти всегда выполнено*

$$I(\Gamma) = 2^{\left((1/2)\log^2 n - \log n \log\log n + (\log n)\right)}. \tag{16}$$

При доказательстве теоремы 3 мы опираемся на следующее утверждение.

[1] Здесь и далее $\log n = \log_2 n$.

Теорема 18. *Пусть в n - вершинном графе G максимальная степень вершины равна m, минимальная степень вершины равна l, доля вершин степени, меньшей чем $k-\theta$, не превышает δ, а доля вершин степени, большей чем $k+\theta$, не превышает Δ и $l \leqslant k-\theta \leqslant k+\theta \leqslant m$. Тогда*

$$I(G) \leqslant 2^{\frac{n}{2}\left(1+\delta(1-l/k)+\Delta(m/k-1)+o((\theta+\sqrt{k\log k})/k)\right)}. \tag{17}$$

Доказательство. С небольшими изменениями оно повторяет доказательство теоремы 2 из [6]. Для произвольного независимого множества A построим множество T с помощью следующей пошаговой процедуры.

Шаг 1. Пусть u_1 – произвольная вершина из A. Положим $T_1 = \{u_1\}$. Пусть сделано m шагов и построено множество $T_m = \{u_1, ...u_m\}$.

Шаг $m+1$. Если существует $u_{m+1} \in A$ такая, что $|\partial u_{m+1} \setminus \partial T_m| \geqslant \varphi$, то полагаем $T_m \cup \{u_{m+1}\}$. В противном случае процесс заканчивается и полагаем $T = T_m$. Это множество T будем называть φ – *локализатором* множества A. Число независимых множеств A, для которых множество T является φ – *локализатором*, обозначим $I(G,\ T)$. Определим для каждого такого T

$$D = D(T) = \{\nu \in V \setminus \partial T_m : |\partial\nu \setminus \partial T| < \varphi\}.$$

Обозначим через D_1 ту часть вершин $\nu \in D$, для которых $|\partial\nu \cap \partial T| \geqslant k-\theta-\varphi$, а через D_2 – множество вершин $\nu \in \partial T$, для которых $|\partial\nu| > k+\theta$. Рассмотрим двудольный подграф графа G с долями вершин D и ∂T. Степень каждой вершины из D_1 не меньше $(k-\varphi-\theta)$, а степень каждой вершины из $\partial T \setminus D_2$ не больше $k+\theta$. Поэтому $|D_1|(k-\theta-\varphi) + |D \setminus D_1|(l-\varphi) \leqslant (|\partial T| - |D_2|)(k+\theta) + |D_2|m$.

С учетом того, что $|D| - \partial n \leqslant |D_1|,\ |\partial T| \leqslant n - |D|$ и $|D_2| \leqslant \Delta n$, имеем

$$|D| \leqslant n\frac{k+\theta+\delta(k-\theta-l)+\Delta(m-k+\theta)}{2k-\varphi} = \\ = \frac{n}{2}(1+\delta(1-l/k)+\Delta(m/k-1)+O((\theta+\varphi)/k)). \tag{18}$$

Положим $\varphi = \sqrt{k\log k}$. Заметим, что $|T| \leqslant |\partial A|/\varphi$ по построению и $|\partial A| \leqslant n$ для любого A. Следовательно, в семействе $\Psi = \Psi(n,\ \varphi)$ всех подмножеств множества $[1,\ n]$, мощности, не превосходящей n/φ, для каждого независимого множества A найдется $T \in \Psi$, являющееся φ – локализатором для A.

Ясно, что

$$|\Psi| = \sum_{i \leqslant n/\varphi} C_n^i \leqslant 2^{n\sqrt{\frac{\log k}{k}}}. \tag{19}$$

В силу(18) и включения $A \subseteq D$

$$I(G,\ T) \leqslant 2^{|D|} \leqslant 2^{\frac{n}{2}(1+\delta(1-l/k)+\Delta(m/k-l)+O((\theta+\varphi)/k))}.$$

Отсюда с учетом(19) получаем

$$I(G) \leqslant \sum_{T \in \Psi} I(G,\ T) \leqslant 2^{\frac{n}{2}(1+\delta(1-l/k)+\Delta(m/k-l)+O((\theta+\varphi)/k))}.$$

Список литературы

1. *Alon N.* Independent sets in regular graphs and Sum-Free Subsets of Finite Groups. Israel Journal of Math., 73(1991), No 2, p.247-256.
2. *Calkin N. J.* On the number of sum-free sets, Bull. London Math. Sol. 22(1990), 141-144.
3. *Cameron P. J., Erdos P.* On the number of integers with various properties. In Number Theory (R. A. Mollin, Ed.), de Gruyter, Berlin, 1990, p. 61-79.
4. *Сапоженко А. А.* О числе множеств, свободных от сумм в абелевых группах // Вестник Московского Университа. Сер 1, Математика, Механика 2002. №4 (в печати)
5. *Омельянов К. Г., Сапоженко А. А.* О числе множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел // Дискретная математика, М.: Наука, 2002. (в печати)
6. *Сапоженко А. А.* О числе независимых множеств в расширителях // Дискретная математика, М.: Наука, 2001, т. 13, №1, 56-62с.
7. *Lev V., Luczak T., Shoen T.* Sum-Free Sets in Abelian Groups. Israel Journal of Math. (в печати)
8. *Фрейман Г. А.* Сложение конечных множеств // Изв. высш. учевн. завед. Математика. 6(13) 1959, p.202-213.
9. *Kahn J.* An entropy aproach to the hard-core model on bipartite graph, Comb., Prob. Comput. (2001), v. 10, №3б p.219-238.
10. *Коршунов А. Д., Сапоженко А. А.* О числе двоичных кодов с расстоянием 2 // Проблемы кибернетики, М.: Наука, вып. 40, 1993, 111-140 с.
11. *Sapozhenko A. A.* On the Number of Independent Sets in Bipartite Graphs with Large Minimum Degree // DIMACS Technical Report 2000-25, p.1-7.