УДК 517.94

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ПЛАВНОГО ПЕРЕХОДА В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Лукьяненко В. А.

Таврический национальный университет,
факультет математики и информатики
ул. Ялтинская, 4, Симферополь, Украина
e-mail: artinf@crimea.com

Abstract

Solubility conditions for difference equation of smooth transfer type and its adjoint equation were obtained for regular and spectral cases. Connection with other equations in particular generalized hypergeometrical one studied by Y.I. Chersky are determined. The solution is obtained in quadratures.

Дифференциально-разностные уравнения с переменными коэффициентами имеют широкий класс приложений. Уравнение типа плавного перехода является частным случаем таких уравнений. Ранний период теории дифференциально-разностных уравнений отражен в монографии [1]. Разрешимость дифференциально-разностных операторов в частных производных исследуется в работе [2]. Нормальный случай уравнения анонсирован в совместной с Ю.И. Черским работе [3]. Близкие уравнения исследовались в работе В.В. Керекеши, А. Отилио [4]. Как и для впервые введенного Ю.И. Черским интегрального уравнения плавного перехода [5], для изучаемого уравнения применяется преобразование Фурье и теория краевой задачи Карлемана для полосы.

1. Нормальный случай уравнения

Пусть даны комплексные постоянные a_{kp}, b_{kp}, вещественные постоянные h_{kp} и функция $\mathrm{g}(t) \in L_2(R)$. В пространстве функций таких, что $f^k(t) \in L_2(R)$, $k = 0, 1, ..., n$ ищется решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{p=1}^{m} (a_{kp} + b_{kp}e^{-t}) f^{(k)}(t - h_{kp}) = \mathrm{g}(t), \quad t \in R. \tag{1}$$

Приведем это уравнение к равносильной задаче Карлемана для полосы $0 < \operatorname{Im} z < 1$

$$\Phi(x) + A(x)\Phi(x + i) = H(x), \quad x \in R \tag{2}$$

относительно искомой функции $\Phi(x) \in \{\{0, 1\}\}$ [5]. Для этого введем новую неизвестную функцию

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=1}^{m} b_{kp} f^{(k)}(t - h_{kp}), \tag{3}$$

которая принадлежит пространству $L_2(R)$, как сумма функций принадлежащих $L_2(R)$. Из (1) следует, что $e^{-t}\varphi(t) \in L_2(R)$, т. е. функция $\varphi(t)$ удовлетворяет одновременно двум условиям

$$\varphi(t) \in L_2(R), \quad e^{-t}\varphi(t) \in L_2(R), \tag{4}$$

что является необходимым и достаточным для того, чтобы ее интеграл Фурье $\Phi(x) = \mathcal{F}\{\varphi(t)\}(x)$ принадлежал классу $\{\{0,1\}\}$, т. е. был аналитически продолжим на полосу $0 < \operatorname{Im} z < 1$ и чтобы существовала постоянная C такая, что для $\forall y \in [0,1]$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2 dx \leqslant \mathrm{C}.$$

Перейдем в равенствах (1) и (3) к интегралам Фурье,

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} a_{kp}(-ix)^k exp(ixh_{kp})F(x) + \Phi(x+i) = G(x), \quad x \in R, \tag{5}$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} b_{kp}(-ix)^k exp(ixh_{kp})F(x), \quad x \in R.$$

Исключив неизвестную функцию $F(x)$, получим задачу Карлемена (2), в которой

$$A(x) = \left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} b_{kp}(-ix)^k exp(ixh_{kp})\right]\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} a_{kp}(-ix)^k exp(ixh_{kp})\right]^{-1} \tag{6}$$

$$H(x) = G(x)\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m}(b_{kp}-a_{kp})(-ix)^k exp(ixh_{kp})\right]\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} a_{kp}(-ix)^k exp(ixh_{kp})\right]^{-1}.$$

Исследуем задачу (2), (6). В нормальном случае, если выражения коэффициента $A(x)$ (6), стоящие в квадратных скобках, не имеют вещественных нулей, $A(x) \to 1$ при $x \to \pm\infty$, то разрешимость задачи (2) и уравнения (1) определяется величиной $\varkappa = indA(x)$. Известно, что уравнение (1) имеет n линейно независимых решений, но не все они принадлежат выбранному классу, в нашем случае будет $\varkappa$-решений. Точнее, справедлива

Теорема 1. *Предположим, что выполняются условия*

$$\left[\sum_{p=1}^{m} a_{np}\ exp(ixh_{np})\right]\left[\sum_{p=1}^{m} b_{np}\ exp(ixh_{np})\right]^{-1} = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} a_{kp}(-ix)^k\ exp(ixh_{kp}) \neq 0, \quad \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} b_{kp}(-ix)^k\ exp(ixh_{kp}) \neq 0, \quad x \in R.$$

Пусть $\varkappa$—индекс функции $A(x)$

$$\varkappa = ind\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m} b_{kp}(-ix)^k\ exp(ixh_{kp})}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m} a_{kp}(-ix)^k\ exp(ixh_{kp})}.$$

Тогда при $\varkappa \leqslant 0$ однородное уравнение (1) имеет в классе функций $f(t)$ таких, что

$$f^{(k)}(t) \in L_2(R), \quad k = 0, 1, ..., n \tag{7}$$

только нулевое решение; в случае $\varkappa > 0$ это уравнение в классе (7) имеет ровно $\varkappa$ линейно независимых решений. При $\varkappa \geqslant 0$ неоднородное уравнение (1) безусловно разрешимо, причем общее решение в классе (7) определяется формулами

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\Phi(x) + G(x)]\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} b_{kp}(-ix)^k\ exp(ixh_{kp})\right]^{-1} e^{-ixt}dx,$$

$$\Phi(x) = F^{+}(e^{2\pi x})e^{\pi x},$$

$$F^{+}(\xi) = X^{+}(\xi)\left[\Psi^{+}(\xi) + \frac{P_{\varkappa-1}(\xi)}{(\xi+i)^{\varkappa}}\right], \quad \xi > 0,$$

$$\Psi^{+}(\xi) = \frac{H_1(\xi)}{2X^{+}(\xi)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{H_1(\tau)d\tau}{X^{+}(\tau)(\tau-\xi)},$$

$$X^{+}(\xi) = exp\left\{\frac{1}{2}\ln\left[A_1(\xi)\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)^{\varkappa}\right] + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln[A_1(\tau)(\frac{\tau+i}{\tau-i})^{\varkappa}]d\tau}{\tau-\xi}\right\},$$

$$A_1(\xi) = \begin{cases} A(\ln\xi/2\pi), & \xi>0, \\ 1, & \xi<0, \end{cases}$$

$$H_1(\xi) = e^{-\pi x}H(x), \quad \xi > 0, \quad \xi = e^{2\pi x}; \quad H_1(\xi) \equiv 0, \quad \xi < 0.$$

Здесь $P_{\varkappa-1}(\xi)$—произвольный многочлен степени не выше $\varkappa - 1$ с комплексными коэффициентами, $H(x)$, $A(x)$ определяются выражениями (6). В случае $\varkappa < 0$ для разрешимости уравнения (1) необходимыми и достаточными являются условия

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{H_1(\xi)d\xi}{X^{+}(\xi)(\xi+i)^k} = 0, \quad k = 1, 2, ..., |\varkappa|,$$

при выполнении которых решение уравнения (1) в классе (7) единственно и определяется указанными формулами, где $P_{\varkappa-1}(\xi) \equiv 0$.

2. Исключительный случай дифференциально-разностного уравнения

Будем предполагать, что у тригонометрических многочленов

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} a_{kp}(-ix)^k \ \exp(ixh_{kp}) \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} b_{kp}(-ix)^k \ \exp(ixh_{kp})$$

допускаются вещественные корни.

Пусть μ, ν—целые неотрицательные числа. Рассмотрим однородную задачу Карлемана

$$\Phi(x) = -A(x)\Phi(x+i), \quad x \in R, \tag{8}$$

где искомая аналитическая функция $\Phi(x) \in \{\{0,1\}\}$, а заданная функция допускает представление

$$A(x) = \prod_{k=1}^{\mu}\left(\frac{x-s_k}{x-i}\right)\prod_{k=1}^{\nu}\left(\frac{x+i}{x-\sigma_k}\right)N(x), \tag{9}$$

в котором функция $N(x)$ непрерывна, не обращается в нуль и стремится к единице на бесконечности, s_k, σ_k—вещественные числа, а дробь в (9)—несократимая. Среди чисел s_k могут быть равные, что соответствует кратному нулю функции $A(x)$. Равными могут быть также числа σ_k. Имеет место

Теорема 2. *Пусть* $\varkappa = indN(x)$. *Тогда при* $\varkappa \leqslant 0$ *задача* (8) *имеет только нулевое решение, а при* $\varkappa > 0$ *имеет ровно* $\varkappa$ *линейно независимых решений. Общее решение дается в квадратурах*

$$\Phi(\zeta) = F(e^{2\pi\zeta})e^{\pi\zeta}, \qquad F(z) = \begin{cases} F^+(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ F^-(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

$$F^+(z) = X^+(z)\frac{\prod\limits_{k=1}^{\nu}(z-p_k)}{(z+i)^{\varkappa+\nu}}P_{\varkappa-1}(\zeta),$$

$$F^-(z) = X^-(z)\frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(z-q_k)}{(z-i)^{\varkappa+\mu}}P_{\varkappa-1}(\zeta),$$

$$X^+(\xi) = \exp\left\{\frac{1}{2}\ln\left[M(\xi)\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)^{\varkappa}\right] + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\left[M(\tau)\left(\frac{\tau+i}{\tau-i}\right)^{\varkappa}\right]d\tau}{\tau-\xi}\right\},$$

$$X^-(\xi) = \left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)^{\varkappa}\exp\left\{-\frac{1}{2}\ln\left[M(\xi)\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)^{\varkappa}\right] + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\left[M(\tau)\left(\frac{\tau+i}{\tau-i}\right)^{\varkappa}\right]d\tau}{\tau-\xi}\right\},$$

$$M(\xi)=\begin{cases} N\left(\frac{\ln\xi}{2\pi}\right)\left(\frac{\ln\xi+2\pi i}{\xi+i}\right)^{\nu}\left(\frac{\xi-i}{\ln\xi-2\pi i}\right)^{\mu}\prod\limits_{k=1}^{\mu}\left(\frac{\ln\xi-\ln p_k}{\xi-p_k}\right)\prod\limits_{k=1}^{\nu}\left(\frac{\xi-q_k}{\ln\xi-\ln q_k}\right), & \xi>0,\\ \prod\limits_{k=1}^{\mu}\left(\frac{\xi-i}{\xi+p_k}\right)\prod\limits_{k=1}^{\nu}\left(\frac{\xi-q_k}{\xi+i}\right), & \xi\leqslant 0,\end{cases}$$

$$2\pi s_k=\ln p_k,\qquad 2\pi\sigma_k=\ln q_k.$$

Здесь $P_{\varkappa-1}(z)$—произвольный многочлен степени не выше $\varkappa-1$, а сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения.

Доказательство теоремы основано на сведении задачи (8) к задаче Римана. Введем функцию

$$\omega(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}\Phi\left(\frac{\ln z}{2\pi}\right), \tag{10}$$

которая представима интегралом типа Коши

$$\omega(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{\infty}\frac{\Omega(\tau)d\tau}{\tau-\zeta},\quad \Omega(\tau)\in L_2(0,\infty).$$

Умножая (8) на $e^{-\pi x}$ и полагая $\xi=e^{2\pi x}$, получим краевую задачу Римана на полуоси

$$\omega^+(\xi)=\prod_{k=1}^{\mu}\left(\frac{\ln\xi-\ln p_k}{\ln\xi-2\pi i}\right)\prod_{k=1}^{\nu}\left(\frac{\ln\xi+2\pi i}{\ln\xi-\ln q_k}\right)N\left(\frac{\ln\xi}{2\pi}\right)\omega^-(\xi),\quad \xi>0. \tag{11}$$

С помощью функций

$$F(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{\infty}\frac{\Omega(\tau)d\tau}{\tau-\xi}=\begin{cases}F^+(\xi),\ \mathrm{Im}\ \xi>0,\\ F^-(\xi),\ \mathrm{Im}\ \xi<0\end{cases}$$

приходим к задаче Римана на всей оси

$$F^+(\xi)=M(\xi)\prod_{k=1}^{\mu}\left(\frac{\xi-p_k}{\xi-i}\right)\prod_{k=1}^{\nu}\left(\frac{\xi+i}{\xi-q_k}\right)F^-(\xi),\ \xi\in R \tag{12}$$

При этом $F^{\pm}(\xi)=\omega^{\pm}(\xi),\ \xi>0$ и $F^+(\xi)=F^-(\xi),\ \xi<0$, а индекс функции $M(\xi)$ совпадает с индексом функции $N(\xi)$. Решив задачу Римана в исключительном случае (12), получим доказательство всех утверждений теоремы 2.

Для применения результатов теоремы 2 к однородному уравнению (1), достаточно предположить,что

$$\sum_{p=1}^{m}a_{np}\exp(ixh_{np})=\sum_{p=1}^{m}b_{np}\exp(ixh_{np})\neq 0.$$

В этом случае функцию $A(x)$ (6) можно представить в виде (9). Через $\varkappa$ будем обозначать индекс построенной таким путем функции $N(x)$ в представлении (9). Согласно теореме 2 в случае $\varkappa \leqslant 0$ задача (8) и вместе с ней и однородное дифференциально-разностное уравнение имеет только нулевое решение. Если $\varkappa > 0$, то решение (1) $f(t)$ найдем по его преобразованию Фурье $F(t)$ с помощью равенств (5) при $G(x) \equiv 0$, откуда

$$F(x) = \frac{\Phi(x)}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{p=0}^{m} b_{kp}(-ix)^k \exp(ixh_{kp})}. \tag{13}$$

Для получения решения в нужном классе $f^{(k)}(t) \in L_2(R),\ k = 0, 1, \ldots, n$, согласно теории интегралов Фурье, необходимо и достаточно, чтобы

$$(1 + |x|)^n F(x) \in L_2(R) \tag{14}$$

Из (5) следует,что функция $\Phi(x)$ является аналитической для всех конечных точек $x \in R$. Следовательно, чтобы функция (13) удовлетворяла условиям (14), необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(x)$ имела нули (не меньшей кратности) во всех точках вещественных корней тригонометрического многочлена

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} b_{kp}(ix)^k \exp(ixh_{kp}).$$

Пусть r — число вещественных корней указанного многочлена (с учетом кратности). Тогда при $r \geqslant \varkappa$ условию (14) можно удовлетворить лишь при равном нулю многочлене $P_{\varkappa-1}(z)$ входящем в общее решение $\Phi(z)$ (теорема 2), а однородное уравнение (1) будет иметь лишь тривиальное решение. Если $r < \varkappa$, то для выполнения (14) необходимо и достаточно определить r параметров многочлена $P_{\varkappa-1}(z)$, остальные $\varkappa - r$ будут произвольными, что будет соответствовать линейно независимым решениям однородного уравнения (1).

Теорема 3. *Пусть в однородном уравнении* (1)

$$\sum_{p=1}^{m} a_{np} \exp(ixh_{np}) = \sum_{p=1}^{m} b_{np} \exp(ixh_{np}) \neq 0.$$

$\varkappa$ — индекс функции $N(x)$, определяемой формулами (6), (9) *и r — число вещественных корней (считая кратность) многочлена* $\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m} b_{kp}(-ix)^k \exp(ixh_{kp})$.

Тогда при $\varkappa - r$ однородное дифференциально-разностное уравнение (1) *в классе* (14) *$f^{(k)}(t) \in L_2(R),\ k = 0, 1, \ldots, n$, имеет только нулевое решение. Если $\varkappa - r > 0$, это уравнение в классе* (14) *имеет ровно $\varkappa - r$ линейно независимых решений. Общее* *решение в этом случае имеет вид*

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\Phi(x)}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m} b_{kp}(-ix)^k \exp(ixh_{kp})}\right\},$$

где функция $\Phi(x)$ строится по формулам теоремы 2 и имеет те же вещественные корни, что и многочлен

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} b_{kp}(-ix)^k \exp(ixh_{kp}).$$

Исследование неоднородного уравнения (1) опирается на исключительный случай неоднородной краевой задачи Карлемана (2), или соответствующей ей краевой Римана в исключительном случае. Ввиду громоздкости формулировок в этом случае они не приводятся. Заметим, что, опираясь на более общие случаи решения задачи Римана (12) (и неоднородной задачи) в особом случае, можно получить решения соответствующих дифференциально-разностных уравнений.

3. Союзное уравнение

Запишем уравнение (1) в более виде

$$Kf \equiv \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m}\left(\alpha_{kp} + \beta_{kp} th\frac{t}{2}\right) f^{(k)}(t - h_{kp}) = \mathrm{g}_1(t),\ t \in R, \tag{15}$$

здесь

$$2a_{kp} = \alpha_{kp} + \beta_{kp}\,,\ 2b_{kp} = \alpha_{kp} - \beta_{kp}\,,\ \mathrm{g}_1(t) = e^{t/2}\mathrm{g}(t)/ch\frac{t}{2} \in L_2(R).$$

Уравнение

$$K^*\psi \equiv \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m}(-1)^k\left\{\alpha_{kp}\psi^{(k)}(t+h_{kp}) + \beta_{kp}\frac{d^k}{dt^k}\left[th\frac{(t+h_{kp})}{2}\psi(t+h_{kp})\right]\right\} = q(t) \tag{16}$$

будет союзным к (15). Для сведения уравнения (16) к краевой задаче Карлемана (2) введем новую неизвестную функцию

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t)}{1+e^{-t}},\ (\in \{0,1\}). \tag{17}$$

Получим

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m}(-1)^k\left\{\alpha_{kp}\varphi^{(k)}(t+h_{kp}) + \beta_{kp}\frac{d^k}{dt^k}\left[e^{-(t+h_{kp})}\varphi(t+h_{kp})\right]\right\} = \frac{q(t)}{2},\ t \in R,$$

а после применения преобразования Фурье

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} a_{kp}(ix)^k \exp(-ixh_{kp})\Phi(x) + \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} b_{kp}(ix)^k \exp(-ixh_{kp})\Phi(x+i) = \frac{\mathcal{Q}(t)}{2}.$$

Умножим обе части полученного равенства на $\left[\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m} a_{kp}(ix)^k \exp(-ixh_{kp})\right]^{-1}$, получим краевую задачу Карлемана вида (2)

$$\Phi(x) + A(x)\Phi(x+i) = H(x)\ x \in R, \tag{18}$$

где $A(x)$ определяется формулой (6), а

$$H(x) = \frac{1}{2}\mathcal{Q}(x)\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m} a_{kp}(ix)^k \exp(-ixh_{kp})\right]^{-1},$$

к задаче (18) в полном объеме применимы результаты п. 1,2.

При этом, картина разрешимости этой задачи, а значит и, равносильного ей союзного дифференциально-разностного уравнения (16), определяется числом $\varkappa$

$$\varkappa^* = indA(-x) = -\varkappa$$

При $\varkappa < 0$ однородное уравнение (16) имеет ровно $\varkappa$ линейно независимых решений, а неоднородное безусловно разрешимо. Если $\varkappa = 0$, то решение уравнения (16) существует при любой правой части $q(t) \in L_2(R)$ и единственно. При $\varkappa > 0$ однородное уравнение имеет лишь нулевое решение, а для решимости неоднородного необходимы и достаточны условия, указанные в теореме 1. Во всех случаях, когда решение уравнения (16) существует, его можно построить по формуле $\psi(t) = (1+e^{-t})\mathcal{F}^{-1}\{\Phi(x)\}(t)$, причем функция $\Phi(x)$ определена формулами п.1, где следует заменить $A(x)$ на $A(-x)$.

Таким образом, заключаем, что для уравнений $Kf = \mathrm{g}_1$, $K^*\psi = q$ справедливы теоремы Нетера, уравнения нормально разрешимы, индекс оператора K

$$IndK = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m} b_{kp}(-ix)^k \exp(ixh_{kp})}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m} a_{kp}(-ix)^k \exp(ixh_{kp})}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

согласован с индексом коэффициента соответствующей задачи Карлемана.

4. Некоторые другие дифференциальные и дифференциально-разностные уравнения типа плавного перехода

Дифференциально-разностное уравнение (1) допускает естественное обобщение

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{m}\left(a_{kp}e^{-\alpha t} + b_{kp}e^{-\beta t}\right) f^{(k)}(t-h_{kp}) = \mathrm{g}(t),\ t \in R \tag{19}$$

где α, β — вещественные числа $\alpha < \beta$.

Исследование (16) может быть проведено по схеме п.1 в классе функций, обеспечивающих принадлежность вводимой функции (3) классу $\{\alpha, \beta\}(\varphi(t) \in \{\alpha, \beta\})$. При этом, исследование (19) приводит к эквивалентной краевой задаче Карлемана для полосы $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$. Это позволяет получить результаты, аналогичные п.1.

Результаты, полученные для уравнений (1) и (19), остаются справедливыми и для соответствующих им дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k e^{-t)})f^{(k)}(t - h_k) = \mathrm{g}(t),\ t \in R \tag{1`}$$

$$\text{и } \sum_{k=0}^{n}(a_k e^{\alpha t} + b_k e^{-\beta t)})f^{(k)}(t - h_k) = \mathrm{g}(t),\ t \in R \tag{19`}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение, обобщающее известное гипергеометрическое [5]

$$\sum_{k=0}^{n} x^k(\alpha_k x + \beta_k)y^{(k)}(x) = h(x),\ x > 0, \tag{20}$$

где α_k, β_k — комплексные числа. Путем замены переменных $x = e^t$ уравнение (20) сводится к уравнению (1‘), т.е. к частному случаю уравнения (1). Дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} x^k(\alpha_k x^{\alpha} + \beta_k x^{\beta})y^{(k)}(x) = h(x),\ x > 0, \tag{21}$$

где α, β — вещественные ($\alpha < \beta$), а α_k, β_k — комплексные числа, заменой $x = e^t$ сводится к уравнению (19‘).

Список литературы

1. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. —М.:Мир, 1967.
2. *Рабинович В.С.* О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на R^n и в полупространстве. —ДАН СССР, 1978, т.243, №5, с.1134-1137.
3. *Черский Ю.И., Лукъяненко В.А.* Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, приводящее к задаче Карлемана. // Тез. докл. IV Всесоюзн. конфер. по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Киев. Наукова думка, 1975, с.244-245.
4. *Керекеша П.В., Отилио А.* Об одном классе линейных дифференциально-разностных уравнений конечного и бесконечного порядка со специальными переменными коэффициентами. — Дифференц. уравнения, т.18,№10, 1982, с.1822-1824.
5. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. —М.:Наука, 1978, с.296.